Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung

Von D. Braess, Münster [1])

Eingegangen am 28. März 1968

Zusammenfassung: Für die Straßenverkehrsplanung möchte man den Verkehrsfluß auf den einzelnen Straßen des Netzes abschätzen, wenn die Zahl der Fahrzeuge bekannt ist, die zwischen den einzelnen Punkten des Straßennetzes verkehren. Welche Wege am günstigsten sind, hängt nun nicht nur von der Beschaffenheit der Straße ab, sondern auch von der Verkehrsdichte. Es ergeben sich nicht immer optimale Fahrzeiten, wenn jeder Fahrer nur für sich den günstigsten Weg heraussucht. In einigen Fällen kann sich durch Erweiterung des Netzes der Verkehrsfluß sogar so umlagern, daß größere Fahrzeiten erforderlich werden.

Summary: For each point of a road network let be given the number of cars starting from it, and the destination of the cars. Under these conditions one wishes to estimate the distribution of the traffic flow. Whether a street is preferable to another one depends not only upon the quality of the road but also upon the density of the flow. If every driver takes that path which looks most favorable to him, the resultant running times need not be minimal. Furthermore it is indicated by an example that an extension of the road network may cause *a* redistribution of the traffic which results in longer individual running times.

1. Einleitung

Für die Verkehrsplanung und Verkehrssteuerung interessiert, wie sich der Fahrzeugstrom auf die einzelnen Straßen des Verkehrsnetzes verteilt. Bekannt sei dabei die Anzahl der Fahrzeuge für alle Ausgangs- und Zielpunkte. Bei der Berechnung wird davon ausgegangen, daß von den möglichen Wegen jeweils der günstigste gewählt wird. Wie günstig ein Weg ist, richtet sich nach dem Aufwand, der zum Durchfahren nötig ist. Die Grundlage für die Bewertung des Aufwandes bildet die Fahrzeit.

Für die mathematische Behandlung wird das Straßennetz durch einen gerichteten Graphen beschrieben. Zur Charakterisierung der Bögen gehört die Angabe des Zeitaufwandes. Die Bestimmung der günstigen Stromverteilungen kann als gelöst betrachtet werden, wenn die Bewertung konstant ist, d. h., wenn die Fahrzeiten unabhängig von der Größe des Verkehrsflusses sind. Sie ist dann äquivalent mit der bekannten Aufgabe, den kürzesten Abstand zweier Punkte eines Graphen und den zugehörigen kritischen Pfad zu bestimmen [1], [5], [7].

Will man das Modell aber realistischer gestalten, ist zu berücksichtigen, daß die benötigte Zeit stark von der Stärke des Verkehrs abhängt. Wie die folgenden Untersuchungen zeigen, ergeben sich dann gegenüber dem Modell mit konstanter (belastungsunabhängiger) Bewertung z. T. völlig neue Aspekte. Dabei erweist sich schon eine Präzisierung der Problemstellung als notwendig; denn es ist zwischen dem Strom zu unterscheiden, der für alle am günstigsten ist,, und dem, der sich einstellt, wenn jeder Fahrer nur seinen eigenen Weg optimalisiert.

---

[1]) Priv.-Doz. Dr. Dietrich Braess, Institut für numerische und instrumentelle Mathematik, 44 Münster, Hüfferstr. 1 a.

An Hand eines einfachen Modellbeispiels mit nur vier Knoten werden Eigenschaften diskutiert, die einige zunächst plausibel erscheinende Tatsachen widerlegen. So kann eine allgemeine Steuerung selbst für die Fahrer Vorteile bringen, die der Meinung sind, fiir sich selbst günstigere Wege herausfinden zu können. Außerdem ergibt sich als ein Paradoxon, daß sich bei einer Erweiterung des Verkehrsnetzes um eine zusätzliche Straße der Strom in ungünstigen Fällen so umschichten kann, daß längere Fahrzeiten notwendig werden.

2. Graph und Straßennetz

Der Beschreibung von Verkehrsnetzen dienen Graphen, bei denen die Verbindungslinien der Knoten, die Bögen, einen Richtungssinn haben [2], [4]. Zwei Bögen, die sich nur durch ihre Richtungen unterscheiden, kann man in Abbildungen auch zu einer Strecke zusammenfassen (Abb. 1).

Im allgemeinen sind die Knoten den Straßenkreuzungen zugeordnet. Wo eine genauere Beschreibung angebracht ist, kann man die Kreuzungen entsprechend den (vier) Einmündungen wie in Abb. 2 in (vier) Knoten auflösen [7].

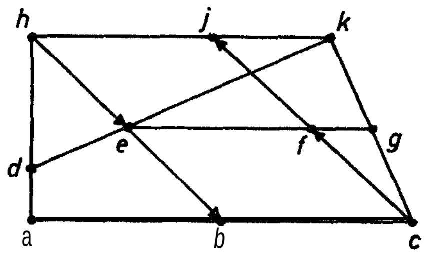

Abb. 1.

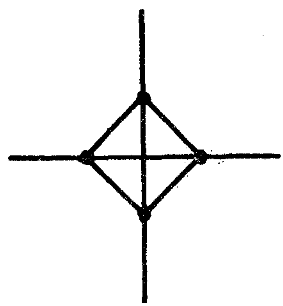

Abb. 2.

Für die Knoten, Bögen und Ströme führen wir die untenstehende Schreibweise ein. Die Indexmengen sind immer endlich. Da wir jeden Index nur in Verbindung mit einer Variablen benutzen, verzichten wir durchweg auf die Angabe der oberen Schranken für die Indizes.

$\{a^i\}$ Knoten (Punkte) des Graphen.

$\{u_\alpha\}$ Bögen des Graphen.

(Die Bögen sind mit einer Richtung versehen.)

φ_α Strom (Fluß) auf u_α (Fahrzeuge/Zeiteinheit).

Betrachtet werden Verkehrsnetze mit stationärem Strom. Nützlich ist die Vorstellung, daß sich der Gesamtstrom aus verschiedenen Stromfäden zusammensetzt, wobei jeder Faden einen Ausgangs- und einen Zielknoten in dem Netz besitzt. Jedem Stromfaden entspricht ein Pfad in dem Netz. Es brauchen nur die Pfade berücksichtigt zu werden, die keine Zyklen enthalten :

$\{U_\beta\}$ Pfade, die keinen Bogen mehrfach enthalten.
Φ_β Strom entlang U_β.
Φ sei der Vektor mit den Komponenten Φ_β.

Die Verknüpfung der Ströme von Pfaden und Bögen wird durch eine Wegmatrix C hergestellt, deren Koeffizienten wegen des Verbots von Zyklen nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{falls der Pfad } U_\beta \text{ den Bogen } u_\alpha \text{ enthält} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Es ist

$$\varphi_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} \Phi_\beta . \tag{2.2}$$

Selbstverständlich haben in der Verkehrsplanung alle Ströme nichtnegative Werte.

Einen Teil der prinzipiellen Überlegungen werden wir der Einfachheit halber für den Spezialfall durchführen, daß der gesamte Strom einen gemeinsamen Ausgangspunkt und einen gemeinsamen Zielpunkt besitzt, die wir dann mit a^0 bzw. a^∞ bezeichnen. Der Gesamtfluß berechnet sich gemäß

$$|\Phi| = \sum_\beta \Phi_\beta . \tag{2.3}$$

In den anderen, d. h. den allgemeinen Fällen führen wir Indexmengen B_ν derart ein, daß sich in den Klassen

$$\{U_\beta;\ \beta \in B_\nu\}$$

gerade die Pfade mit gleichen Ausgangs- und gleichen Zielknoten befinden. Es sei in Analogie zu (2.3)

$$|\Phi_\nu| = \sum_{\beta \in B_\nu} \Phi_\beta . \tag{2.3'}$$

Die Auswahl der günstigsten Pfade geschieht auf Grund der Bewertung durch den Aufwand, der für das Durchfahren erforderlich ist, und richtet sich nach Wegkosten, Fahrzeit und Weglänge (s. [4], S. 23). Als ausschlaggebende Größe gilt jedoch die Fahrzeit. Deshalb erscheint es uns angebracht, der Anschaulichkeit halber bei der Bewertung immer vom Zeitaufwand zu sprechen. So bringen wir auch zum Ausdruck, daß der Aufwand von der Verkehrsdichte abhängen kann. Außerdem wird das Modell deterministisch behandelt, und auf statistische Überlegungen wird bewußt verzichtet[1]). In diesem Sinne sind die folgenden Definitionen zu verstehen.

[1]) Für den Verkehrsplaner sind Unterschiede in den Verkehrsdichten uninteressant, falls sie die Belastung und damit die Fahrzeiten nicht deutlich verändern. Deshalb ergeben sich keine gravierenden Fehler, wenn die individuelle Bewertung der Wege durch einen Mittelwert ersetzt wird. Im Gegensatz dazu zeigen sich bekanntlich bei dem Modell mit belastungsunabhängiger Bewertung Schwierigkeiten, weil dort der Strom auch auf die fast optimalen Pfade verteilt werden muß [4].

$t_\alpha(\varphi)$ Zeit, die zum Durchlaufen von u_α benötigt wird, wenn auf u_α der Strom $\varphi = \varphi_\alpha$ fließt.

$T_\beta^{ik}(\Phi)$ Zeitbedarf, um a^i von a^k auf dem Pfad U_β zu erreichen (Bei Unerreichbarkeit wird ∞ eingesetzt). Die Indizes i und k werden unterdrückt, falls a^i Zielknoten und a^k Ausgangsknoten von Φ_β ist.

Der Zeitaufwand hängt vom Fluß Φ, speziell von den Strömen auf U_β ab. Da sich der Aufwand für den ganzen Pfad aus dem für die betreffenden Bögen additiv zusammensetzt, gilt für die Zeiten zwischen Ausgangs- und Zielknoten

$$T_\beta(\Phi) = \sum_\alpha c_{\alpha\beta}\, t_\alpha(\varphi_\alpha). \tag{2.4}$$

Dabei ist der funktionale Zusammenhang $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(\Phi)$ durch (2.2) gegeben. Ferner definieren wir als jeweils ungünstigste Zeit

$$|T^{ik}(\Phi)| = \max\{T_\beta^{ik}(\Phi);\ \Phi_\beta \neq 0\} \tag{2.5}$$

und

$$|T_\nu(\Phi)| = \max\{T_\beta^{i_\nu k_\nu}(\Phi);\ \beta \in B_\nu;\ \Phi_\beta \neq 0\} \tag{2.6}$$

wobei a^{i_ν} und a^{k_ν} die Ziel- bzw. Ausgangspunkte der Pfade $\{U_\beta$, ß $\in B_\nu\}$ seien. Für die Funktionen $t_\alpha(\varphi)$ treffen wir folgende Voraussetzungen:

1. $t_\alpha(\varphi) \geq 0$.

11. $t_\alpha(\varphi)$ ist monoton nicht fallend.

III. $t_\alpha(\varphi)$ ist linksseitig stetig, d. h., es gilt

$$\lim_{\substack{\varphi \to \varphi_0 \\ \varphi < \varphi_0}} t_\alpha(\varphi) = t_\alpha(\varphi_0).$$

Die beiden ersten Voraussetzungen sind von der Problemstellung her selbstverständlich. Durch die Vereinbarung III vereinfacht sich die mathematische Behandlung. Dann sind die Funktionen $t_\alpha(\varphi)$ halbstetig nach unten [6], d. h., es gilt

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0} t_\alpha(\varphi) \geq t_\alpha(\varphi_0). \tag{2.7}$$

In den Abschnitten 4 und 5 werden wir sogar zur weiteren Vereinfachung Stetigkeit voraussetzen.

3. Optimalität

Welche Stromverteilungen für alle Verkehrsteilnehmer möglichst kurze Fahrzeiten bringen, diskutieren wir für Netze mit einer Quelle und einem Ziel. Wie günstig die Ströme verteilt sind, bemessen wir dabei nach der Zeit, die im ungünstigsten Fall zum Erreichen des Zieles benötigt wird und die durch Gleichung (2.6) gegeben ist. Der Gesamtstrom $|\Phi| = \chi$ ist als fest vorgegebene Größe zu betrachten.

Definition:

Der Fluß Φ heißt optimal, wenn die Relation

$$|T(\Phi)| \leq |T(\Psi)| \tag{3.1}$$

für alle Ψ mit

$$|\Phi| = |\Psi| \tag{3.2}$$

gilt.

Das Wesentliche an dieser Definition ist, daß sich die Beurteilung nach allen zusammen richtet (im Gegensatz zu den Überlegungen des folgenden Abschnitts). An diesem Grundkonzept und an den Ergebnissen würde sich auch nichts ändern, wenn für die Güte einer Verteilung die mittlere Fahrzeit

$$\frac{1}{|\Phi|} \sum_{\beta} \Phi_\beta \, T_\beta(\Phi) \tag{3.3}$$

und nicht die maximale Fahrzeit $|T(\Phi)|$ bestimmend wäre. Welche Definition sinnvoll ist, kann jedoch nicht mit mathematischen Überlegungen entschieden werden. Die Entscheidung muß den Verkehrsplanern überlassen bleiben[1]). Allgemein kann man nur fordern, daß die Definition der Optimalität in folgendem Sinne konsistent ist: Es soll unmöglich sein, optimale Ströme so umzuschichten, daß sich für jeden Fahrer der Zeitaufwand vermindert.

Wir wenden uns nun Strömen zu, die gemäß (3.1) optimal sind.

Satz:

Für alle Bögen sei $t_\alpha(\varphi)$ halbstetig nach unten für $0 \leq \varphi \leq \chi$. Dann existiert ein optimaler Fluss mit $|\Phi| = \chi$.

Zum *Beweise* betrachte man eine Minimalfolge $\Phi^{(n)}$ mit $\lim |\Phi^{(n)}| = \chi$. Da die Pfade keine Zyklen enthalten, gilt $0 \leq \Phi_\beta^{(n)} \leq \chi$ und $0 \leq \varphi_\alpha^{(n)} \leq \chi$. Man kann wegen der Beschränktheit eine Teilfolge $\Phi^{(n_\nu)}$ mit konvergenten Werten für $\Phi_\beta^{(n_\nu)}$ auswählen. Es sei

$$\lim_{\nu \to \infty} \Phi_\beta^{(n_\nu)} = \Phi_\beta^* .$$

[1]) Bei mehreren Quellen und Strömen ließe sich Optimalität mit Hilfe der mittleren Fahrzeit sehr einfach definieren. Kann man aber jemandem zumuten, einen langen Weg zu machen, nur damit die mittlere Fahrzeit herabgedrückt wird? Unsere Definition hat den Vorzug, daß – wie wir sehen werden – die optimale Lösung für jeden Fahrer mindestens ebenso günstig ist wie der sich selbst überlassene Verkehr.

Aus (2.4) und (2.7) folgt wegen der Halbstetigkeit

$$T_\beta(\Phi^*) \leq \lim_{\nu\to\infty} T_\beta(\Phi^{(n_\nu)}) \,. \tag{3.4}$$

Sei nun U_β ein Pfad, für den $\Phi_\beta^* \neq 0$ ist. Dann ist für hinreichend großes v auch $\Phi_\beta^{(n_\nu)} \neq 0$, und für die Extremalfolge gilt

$$\varliminf_{\nu\to\infty} T_\beta(\Phi^{(n_\nu)}) \leq \lim_{\nu\to\infty} |T(\Phi^{(n_\nu)})| = \inf\{|T(\Phi)|;\, |\Phi| = \chi\} \,. \tag{3.5}$$

Wegen (3.4) und (3.5) ist Φ^* eine optimale Stromverteilung.

Es wird nun ein Modellbeispiel mit vier Knoten diskutiert. Der Einfachheit halber sind die Zeiten $t_\alpha(\varphi)$ als lineare Funktionen angesetzt. (Außerdem enthält der Graph keine Zyklen).

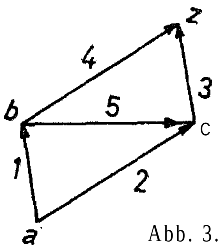

Abb. 3.

$$\begin{aligned} t_1(\varphi) = t_3(\varphi) &= 10\,\varphi \\ t_2(\varphi) = t_4(\varphi) &= 50 + \varphi \\ t_5(\varphi) \qquad\quad &= 10 + \varphi \end{aligned} \tag{3.6}$$

a) Wenn von a nach z der Strom $|\Phi|$ = 2 geleitet werden soll, dann lautet die Lösung

$$\Phi_{abcz} = 2, \quad \Phi_{abz} = \Phi_{acz} = 0, \quad |T(\Phi)| = 52 \,.$$

b) Wenn von a nach z der Strom $|\Phi|$ = 6 geleitet werden soll, dann lautet die Lösung

$$\Phi_{abcz} = 0, \quad \Phi_{abz} = \Phi_{acz} = 3, \quad |T(\Phi)| = 83 \,.$$

c) Wenn von a nach z der Strom $|\Phi|$ = 20 geleitet werden soll, dann lautet die Lösung

$$\Phi_{abcz} = 0\,, \quad \Phi_{abz} = \Phi_{acz} = 10, \quad |T(\Phi)| = 160 \,.$$

Wie man leicht sieht, sind sämtliche Lösungen eindeutig.

4. Kritischer Strom

Jeder Fahrer ist bemüht, für sich den günstigsten Pfad auszuwählen. Wir nehmen an, daß er die Informationen besitzt, die er zur Bestimmung seiner Route benötigt. Damit unterscheidet sich unsere Betrachtungsweise erheblich von der, wie sie bei einer spieltheoretischen Behandlung erfolgen würde (siehe auch Fußnote auf S. 260).

Betrachten wir wieder das im letzten Abschnitt gegebene Modellbeispiel. Bei den Verkehrsdichten in a) und c) ist es am günstigsten, sich in den optimalen Strom einzuordnen. Im Fall b) mit $|\Phi|$ = 6 liegen die Verhältnisse anders. Der optimale

Strom erstreckt sich über die Pfade (abz) und (acz). Aber es gibt einen Pfad, auf dem der Zeitaufwand geringer ist : Es ist $T_{abcz} = 70 < 83 = |T(\Phi)|$. Angenommen der Strom nähme den optimalen Verlauf. Verkehrsteilnehmer, denen die Fahrzeiten auf verschiedenen Wegen bekannt werden, würden dann auf den Pfad $(ubcz)$ überwechseln und damit die Optimalität zerstören.

Wenn also zwei Verkehrsteilnehmer etwa durch Erfahrung über die Fahrzeiten informiert sind, werden sie nicht Pfade mit verschiedenen Fahrzeiten benutzen. Deshalb halten wir die Annahme für realistisch, daß sich der Verkehrsstrom auf eine Verteilung einstellt, die wir als kritisch bezeichnen.

Definition:

Φ heißt kritischer Fluß, wenn für alle Pfade U_β

$$T_\beta(\Phi) = |T(\Phi)|, \text{ falls } \Phi_\beta \neq 0,$$

und

$$T_\beta(\Phi) \geq |T(\Phi)|, \text{ falls } \Phi_\beta = 0 \tag{4.1}$$

gilt. [1])

Anschaulich bedeutet die Kritikalität folgendes. Das Ziel wird auf allen Pfaden mit nicht verschwindendem Strom in der gleichen Zeit erreicht[2]). Auf stromlosen Pfaden wäre der Zeitbedarf höchstens größer. Ein analoger Sachverhalt gilt sogar für alle Zwischenpunkte.

Satz:

Für kritische Ströme Φ gibt es zu jedem Knoten a^i eine Zahl τ^i derart, daß für alle über a^i führenden Pfade

$$T_\beta^{i0}(\Phi) = \tau^i \text{ falls } \Phi_\beta \neq 0,$$

$$T_\beta^{i0}(\Phi) \geq \tau^i \text{ falls } \Phi_\beta = 0$$

gilt. Ferner ist für alle Pfade U_β, die von a^k nach a^i führen

$$T_\beta^{ik}(\Phi) \geq \tau^i - \tau^k$$

und es ist

$$\tau^\infty = |T(\Phi)|.$$

---

[1]) Wir beschränken uns aufstetige Funktionen. Bei halbstetigen Funktionen ist (4.1) zu ersetzen durch

$$T_\beta^-(\Phi) \leq |T(\Phi)|, \text{ falls } \Phi_\beta \neq 0$$

$$T_\beta^+(\Phi) \geq |T(\Phi)| \text{ für alle } \beta.$$

Dabei bezeichnen $T^+(\Phi)$ und $T^-(\Phi)$ an Sprungstellen die oberen bzw. die unteren Grenzwerte. Sie fallen in Stetigkeitspunkten mit $T(\Phi)$ zusammen. Der Existenzsatz in Abschnitt 5 gilt auch für diese Verallgemeinerung.

[2]) Jeder Pfad mit nichtverschwindendem Strom ist also kritisch im üblichen Sinne der Graphentheorie [2].

Der *Beweis* kann leicht indirekt geführt werden. Wenn die Bedingungen mit dem Ansatz

$$\tau^i = \min \{ T_\beta^{i0}(\Phi); \beta \}$$

nicht gelten würden, dann gäbe es nämlich einen Pfad von a^0 nach a^∞, für den $T_\beta < | T(\Phi)|$ wäre.

Ehe wir die Existenz kritischer Ströme und weitere Eigenschaften herleiten, nennen wir ein Zahlenergebnis für das Modellbeispiel. Im Fall b) mit $|\Phi| = 6$ ist der einzige kritische Fluß

$$\Phi_{abcz} = \Phi_{abz} = \Phi_{acz} = 2,$$

und es ist

$$\tau^a = 0, \quad \tau^b = 40, \quad \tau^c = 52, \quad \tau^z = 92.$$

Damit haben wir bereits die Aussage gewonnen, daß sich der kritische Fluß nicht notwendig auf den optimalen Wert einstellt. Das trifft nicht nur für die im letzten Abschnitt eingeführte Optimalität zu, sondern bei jeder konsistenten Definition; denn es existieren offensichtlich Verteilungen, bei denen für alle Verkehrsteilnehmer auf dem Weg von a nach z der Zeitbedarf kleiner als 92 ist. Obwohl jeder den günstigsten Pfad für sich heraussucht, erreicht keiner den Wert, der sich beim optimalen Fluß für jeden erreichen läßt.

In diesem Zusammenhang erkennt man auch eine paradoxe Tatsache. Wenn in dem Netz des Modellbeispiels der Bogen u_5 eliminiert wird, fällt der kritische Fluß mit dem optimalen zusammen; der Fluß wird dann also besser verteilt. Für die Verkehrspraxis bedeutet das : In ungünstigen Fällen kann durch eine Erweiterung des Straßennetzes der Zeitaufwand anwachsen.

5. Existenzsatz

Die Existenz von kritischen Stromverteilungen zu vorgegebenem Gesamtstrom läßt sich für stetige [1]) [s. S. 264] und monotone Zeitfunktionen $t_\alpha(\varphi)$ durch die Zurückführung auf ein konvexes Programm zeigen. Die Funktionen

$$f_\alpha(\varphi) = \int_0^\varphi t_\alpha(\psi)\, d\psi \tag{5.1}$$

sind für monotone t_α konvex. Wir beschränken uns nicht auf Ströme mit einem einzigen Ausgangs- und Zielknoten und verallgemeinern die Definition.

Definition:

Φ **heißt** kritischer Fluß, wenn für alle Pfade U_β mit $\beta \in B_v$

$$\begin{aligned} &T_\beta(\Phi) = |T_v(\Phi)|, \text{ falls } \Phi_\beta \neq 0, \\ \text{und} \quad &T_\beta(\Phi) \geq |T_v(\Phi)|, \text{ falls } \Phi_\beta = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

gilt.

Satz:

Die Funktionen $t_\alpha(\varphi)$ seien für $0 \leq \varphi \leq \chi = \sum_\nu \chi_\nu$ stetig und monoton. Dann sind die Lösungen des konvexen Programms

$$\begin{aligned} \sum_\alpha f_\alpha(\varphi_\alpha) &= \text{Min!} \\ \varphi_\alpha &= \sum_\beta c_{\alpha\beta} \Phi_\beta \\ \sum_{\beta \in B_\nu} \Phi_\beta &= \chi_\nu \\ \Phi_\beta &\geq 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

kritische Ströme.

Beweis:

Die Größen φ_α kann man durch Einsetzen vorübergehend eliminieren. Dann lauten die KUHN-TUCKER-Bedingungen [3] (mit LAGRANGEschen Parametern λ_ν und μ_β)

$$\begin{aligned} &\sum_\alpha c_{\alpha\beta} t_\alpha(\varphi_\alpha) - \lambda_\nu - \mu_\beta = 0 \qquad (\beta \in B_\nu) \\ &\sum_{\beta \in B_\nu} \Phi_\beta = \chi_\nu \\ &\Phi_\beta \cdot \mu_\beta = 0 \\ &\Phi_\beta \geq 0, \quad \mu_\beta \geq 0 . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Die ersten Bedingungen bedeuten wegen (2.4) gerade

$$\left.\begin{aligned} T_\beta(\Phi) - \lambda_\nu &= 0 \text{ falls } \Phi_\beta \neq 0 , \\ T_\beta(\Phi) - \lambda_\nu &\geq 0 \text{ falls } \Phi_\beta = 0 . \end{aligned}\right\} \quad (\beta \in B_\nu)$$

Also ist $\lambda_\nu = |T_\nu(\Phi)|$ und Φ ist kritischer Strom.

Die Existenz kritischer Ströme folgt nun unmittelbar. Die Menge der kritischen Ströme ist konvex. Eine Lösung ist außerdem eindeutig, wenn für mindestens einen Bogen u_α die Funktion $t_\alpha(\varphi)$ bei $\varphi = \varphi_\alpha$ strikt monoton ist. Eindeutigkeit kann man also von vornherein erwarten, wenn jeder Pfad mindestens über einen Bogen läuft, für den $t(\varphi)$ im ganzen Bereich strikt monoton ist.

Daß sich die (kritischen) Bedingungen (5.2) mit einem Extremalprinzip in Verbindung bringen lassen, beruht auf einer Symmetrie in dem Modell. Anschaulich lautet sie: Jeder Fahrer verursacht für andere die gleiche Zeitverzögerung wie der andere für ihn. Diese Symmetrie trifft nicht mehr für ein erweitertes Modell zu.

Vor allem bei mehrspurigen Straßen ist der Zeitaufwand nicht für alle gleich, sondern richtet sich nach dem Fahrzeugtyp. Die deutlichsten Unterschiede ergeben sich zwischen Personen- und Lastkraftwagen. Dies läßt sich z. T. berücksichtigen, indem man die Ströme in Gruppen aufteilt:

$$\varphi_\alpha = \sum_g \varphi_\alpha^g, \qquad \Phi_\beta = \sum_g \Phi_\beta^g.$$

Der Zeitbedarf einer jeden Gruppe richtet sich auch nach den Strömen der anderen Gruppen auf dem betreffenden Bogen.

$$t_\alpha^g(\varphi) = t_\alpha^g(\varphi^1, \varphi^2, \dots).$$

Die Überlegungen, die zur Definition kritischer Ströme führten, lassen sich unmittelbar übertragen. Wir verzichten auf die Angabe der definierenden Relationen, da sie sich von denen in (5.2) fast nur durch Gruppenindizes unterscheiden. Dennoch ergibt sich ein wesentlicher Unterschied. Die Gleichungen lassen sich bei mehreren Gruppen im allgemeinen nicht mehr mit einer Extremalaufgabe verknüpfen[1]).

6. Monotonieverletzung

In dem Modellbeispiel des 3. Abschnittes sind die kritischen Ströme in den Fällen a) und c) auch optimal. An den Lösungen erkennt man, daß für kritische Ströme (und also auch für optimale) keineswegs aus

$$|\Phi| \leq |\Psi| \text{ die Relationen } \varphi_\alpha \leq \psi_\alpha,\ \Phi_\beta \leq \Psi_\beta$$

folgen (obwohl man es vielleicht zunächst erwartet). Das hat wichtige Konsequenzen für die numerische Behandlung des Problems, speziell für ein kürzlich vorgeschlagenes Näherungsverfahren.

Sei n eine vorgegebene natürliche Zahl. Zu verschwindendem Strom bestimme man zwischen allen in Frage kommenden Anfangs- und Zielknoten jeweils den kürzesten Pfad. Es wird angenommen, daß jeweils der n-te Teil des Stromes diese Wege nimmt. Zu dieser geänderten Situation werden wieder die kürzesten Pfade bestimmt und damit der Verlauf für einen weiteren n-ten Teil festgelegt. Indem man so verfährt, hat man nach n Schritten den ganzen Strom aufgeteilt. Das Ergebnis kann man als Näherung für die Lösung betrachten.

Wendet man dieses Verfahren auf das schon mehrfach genannte Beispiel mit $|\varphi| = 20$ an, dann wird bei den ersten Schritten jedoch der Pfad $(abcz)$ ausgewählt, obwohl in der Lösung dieser Pfad stromlos ist. Mit Wachsendern n konvergieren

[1]) Hier sei auf die Analogie zu den Diffusionsgleichungen in der Reaktorphysik hingewiesen. Dort sind die Eingruppengleichungen selbstadjungiert, jedoch nicht die Mehrgruppengleichungen.

die genannten Näherungslösungen nicht gegen die exakte Lösung. Zur Bestimmung der kritischen Ströme kann man jedoch das konvexe Programm (5.3) heranziehen und so bei der Lösung auf bekannte Verfahren zurückgreifen [3]. Ob die Ermittlung des jeweils kürzesten Pfades die Lösung der Programme begünstigt, wurde nicht untersucht.

Herrn Prof. Dr. H. WERNER danke ich für die Förderung der Arbeit und Herrn Prof. Dr. W. KNÖDEL, Stuttgart, für seine wertvollen Anregungen.

Literaturverzeichnis

[1] **BELLMAN,** R.: On a Routing Problem. Quarterly Applied Math. 16, 87-90 (1958).

[2] **BERGE,** C.: La Theorie des Graphes. Paris 1958.

[3] **COLLATZ, L.,** und **WETTERLING, W.:** Optimierungsaufgaben. Berlin-Heidelberg-New York 1966.

[4] **FALKENHAUSEN,** H. v.: Ein stochastisches Modell zur Verkehrsumlegung. Dissertation. Darmstadt 1966.

[5] -: Ein Verfahren zur Prognose der Verkehrsverteilung in einem geplanten Straßennetz. Unternehmensforschung 7, 75-88 (1963).

[6] **NATHANSON,** I. P. : Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin 1961.

[7] **POLLACK,** M., und **WIEBENSON,** W.: Solutions of the Shortest Route Problem – A Review. Operation Research 8, 224-230 (1960).

Vorgel. v. : W. KNÖDEL.