Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Dr. P. Otte

SS 2012
05.04.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 1

Aufgabe 1:

Man zeige, dass das Axiom (M1) der Positivität, $d(x,y) \geq 0$, aus den anderen Axiomen gefolgert werden kann.

Aufgabe 2:

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

1. Man zeige, dass durch

$$d'(\varphi,\psi) := \frac{d(\varphi,\psi)}{1+d(\varphi,\psi)},\ \varphi,\psi \in X,$$

   eine Metrik auf X gegeben wird.

2. Welche Eigenschaften müsste eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben, damit $d_F(\varphi,\psi) := F(d(\varphi,\psi))$ analog zu (1) wieder eine Metrik ist?

Aufgabe 3*:

Seien $X := C[a,b]$ der Raum der stetigen Funktionen und

$$d(\varphi,\psi) := \sup_{x\in[a,b]} |\varphi(x)-\psi(x)|,\ \varphi,\psi \in X$$

die Supremums-Metrik. Man zeige, dass (X,d) vollständig ist.

Aufgabe 4*:

Sei $l(\mathbb{N})$ der Raum aller reellwertigen Folgen

$$l(\mathbb{N}) := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R}\}.$$

1. Man zeige, dass durch

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$$

   eine Metrik auf $l(\mathbb{N})$ gegeben ist.

2. Wie lässt sich die Konvergenz bzgl. d äquivalent charakterisieren?

3. Ist $l(\mathbb{N})$ bzgl. d vollständig?

Abgabe 12.04.2012