Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Dr. P. Otte

SS 2012
12.04.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 2

Aufgabe 5:

Seien (X, d) ein metrischer Raum und

$$d'(\varphi, \psi) := \frac{d(\varphi, \psi)}{1 + d(\varphi, \psi)}, \ \varphi, \psi \in X$$

(vgl. Aufgabe 2). Man zeige, dass die Metriken d und d' auf X äquivalent sind.

Aufgabe 6:

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $U \subset X$ mit $U \neq \emptyset$. Sei ferner

$$d(\varphi, U) := \inf\{d(\varphi, \psi) \mid \psi \in U\}.$$

Man zeige, dass die abgeschlossene Hülle $\bar{U} = \{\varphi \in X \mid d(\varphi, U) = 0\}$ ist.

Aufgabe 7*:

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $U \subset X$ separabel; d.h. es gibt eine abzählbare Menge, die dicht in U liegt. Man zeige, dass auch jedes $V \subset U$ sowie $\bar{U}$ separabel sind.

Aufgabe 8*:

Man beweise die folgenden Aussagen. (a) Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt. (b) Der Durchschnit beliebig vieler kompakter Mengen ist kompakt.

Abgabe 19.04.2012