Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Dr. P. Otte

SS 2012
19.04.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 3

Aufgabe 9:

Seien X, Y metrische Räume. Man zeige, dass $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn die Urbilder offener Mengen wieder offen sind; d.h. für offenes $V \subset Y$ ist die Urbildmenge

$$f^{-1}(V) := \{\varphi \in X \mid f(\varphi) \in V\} \subset X$$

ebenfalls offen.

Aufgabe 10:

(a) Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Man zeige, für $U \subset X$ kompakt ist auch $f(U) \subset Y$ kompakt. Gilt dasselbe für die Urbildmengen?

(b) Seien X ein metrischer Raum, $U \subset X$ kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Man zeige, es gibt $x_{min}, x_{max} \in U$, sodass

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

ist für alle $x \in U$.

Aufgabe 11*:

Man beweise den Satz von Dini: Seien X ein kompakter metrischer Raum und (φ_n) eine Folge aus $C(X)$, die monoton gegen $\varphi \in C(X)$ konvergiert; d.h. $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ für alle $x \in X$ und $\varphi_{n+1}(x) \geq \varphi_n(x)$. Dann ist die Konvergenz gleichmäßig; d.h. $d(\varphi_n, \varphi) \to 0$, $n \to \infty$.

Aufgabe 12*:

Man zeige, die Einheitskugel in $C[0, 1]$ bezüglich der Supremums-Metrik,

$$B := \{\varphi \in C[0, 1] \mid \sup_{x \in [0,1]} |\varphi(x)| \leq 1\}$$

ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt.

Hinweis: Es gibt Folgen (einfacher) Funktionen in B, die punktweise gegen eine unstetige Funktion konvergieren.

Abgabe 26.04.2012