Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Dr. P. Otte

SS 2012
26.04.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 4

Aufgabe 13:

Seien X ein kompakter metrischer Raum und (f_n) eine Folge aus $C(X)$ mit $f_n \to f$ im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz. Man zeige, für jede Folge (x_n) aus X mit $x_n \to x \in X$ gilt $f_n(x_n) \to f(x)$.

Aufgabe 14:

Sei J die Menge der irrationalen Zahlen in $[0,1]$. Man zeige, dass sich J nicht als $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, U_n abgeschlossen, schreiben lässt, und folgere daraus, dass es keine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, die genau in den rationalen Punkten stetig ist.

Aufgabe 15*:

Die Funktion $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Man zeige, die Menge der Stetigkeitspunkte von $f']a,b[\to \mathbb{R}$ liegt dicht in $]a,b[$.

Hinweis: Satz von Baire über punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen.

Aufgabe 16*:

Seien X ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to X$ stetig. Weiter gelte

$$d(x,y) \leq d(f(x), f(y))$$

für alle $x, y \in X$. Man zeige, dass f bijektiv und $f^{-1} : X \to X$ stetig ist.

Hinweis: Wäre $f(X) \neq X$, dann gäbe es ein $x_0 \in X \setminus f(X)$ und man könnte die Folge $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$, betrachten.

Abgabe 03.05.2012