Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Dr. P. Otte

SS 2012
03.05.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 5

Aufgabe 17:

Man gebe einen vollständigen metrischen Raum X an und einen Operator $A : X \to X$, sodass zwar
$$d(A\varphi, A\psi) < d(\varphi, \psi)$$
für alle $\varphi, \psi \in X$, $\varphi \neq \psi$, ist, aber A keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 18*:

Seien X ein vollständiger metrischer Raum und $A : X \to X$ ein Operator. Man beweise die folgenden Aussagen

(a) Sei A^m kontrahierend für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann hat A genau einen Fixpunkt.

(b) Es gelte $d(A^n\varphi, A^n\psi) \leq q_n d(\varphi, \psi)$ für alle $\varphi, \psi \in X$, sodass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ konvergiert. Dann hat A genau einen Fixpunkt.

Aufgabe 19:

(a) Man zeige, dass sich bei den Axiomen der Norm, die Positivität (N1) und eine Richtung der Definitheit (N2) jeweils aus den anderen Axiomen folgern lassen.

(b) Sei X ein Vektorraum mit einer Metrik d. Man zeige, dass die Metrik $d' = \frac{d}{1+d}$ nicht von einer Norm stammen kann.

Aufgabe 20*:

Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Man beweise der Reihe nach

(a) Seien $a, b \geq 0$. Dann gilt die Youngsche Ungleichung
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(b) Seien $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Dann gilt die Höldersche Ungleichung
$$\left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right| \leq \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

(c) Seien $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Dann gilt die Minkowskische Ungleichung
$$\left[\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Abgabe 10.05.2012