Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Dr. P. Otte

SS 2012
10.05.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 6

Aufgabe 21*:

Auf dem $\mathbb{R}^n$ und auf $\ell^p(\mathbb{N})$ seien die Normen $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, jeweils wie in der Vorlesung erklärt.

(a) Man zeige $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) In den Unlgeichungen

$$\gamma_{pq}\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \Gamma_{pq}\|x\|_q, x \in \mathbb{R}^n,$$

bestimme man die bestmöglichen Konstanten γ_{pq} und Γ_{pq} für $p, q = 1, 2, \infty$.

(c) Man beweise für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ die Ungleichung von Jensen

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p, x \in \ell^p(\mathbb{N}),$$

und zeige, dass es für $p < q$ keine Abschätzung $\|x\|_p \leq \Gamma_{pq}\|x\|_q$, $x \in \ell^q(\mathbb{N})$, geben kann.

Aufgabe 22:

Man zeige, dass $\ell^\infty(\mathbb{N})$ in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm vollständig ist.

Aufgabe 23:

Sei $1 \leq p < \infty$. Man zeige, dass $\ell^p(\mathbb{N})$ bzgl. der $\|\cdot\|_p$-Norm separabel ist. Lässt sich der Beweis auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$ mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm übertragen?

Aufgabe 24*:

Sei $1 \leq p < \infty$. Man zeige, eine Menge $U \subset \ell^p(\mathbb{N})$ ist genau dann relativ kompakt bzgl. der $\|\cdot\|_p$-Norm, falls sie beschränkt ist und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\varphi\in U} \sum_{j\geq n} |x_j|^p = 0,\ \varphi = (x_1, x_2, \ldots).$$

Abgabe 18.05.2012