Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Dr. P. Otte

SS 2012
17.05.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 7

Aufgabe 25*:

Sei X ein Prä-Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Für $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, beweise man die Gramsche Ungleichung

$$\det\left((\varphi_j,\varphi_k)\right)_{j,k=1,\dots,n} \geq 0$$

und folgere die Ungleichung von Ostrowski

$$|(\varphi,\psi)|^2\|\chi\|^2 \leq \|\varphi\|^2\|\psi\|^2\|\chi\|^2 - \|(\chi,\psi)\varphi - (\chi,\varphi)\psi\|^2.$$

Was ergibt sich für $\|\chi\| = 1$?

Aufgabe 26:

Sei X ein komplexer, normierter Raum, dessen Norm $\|\cdot\|$ die Parallelogrammgleichung erfüllt

$$\|\varphi+\psi\|^2 + \|\varphi-\psi\|^2 = 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2).$$

Man zeige, dass durch

$$(\varphi,\psi) := \frac{1}{4}(\|\varphi+\psi\|^2 - \|\varphi-\psi\|^2 + i\|i\varphi+\psi\|^2 - i\|i\varphi-\psi\|^2)$$

ein Skalarprodukt auf X gegeben ist.

Aufgabe 27*:

Seien $X := C[0,1]$ und $U := \{u(x) = \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset X$. Man zeige, die beste Approximierende an $\varphi \in X$ bzgl. U ist

1. in der L^2-Norm gegeben durch

$$\alpha = \int_0^1 \varphi(y)\,dy,$$

2. in der Supremums-Norm gegeben durch

$$\alpha = \frac{1}{2}(\sup_{y\in[0,1]} \varphi(y) + \inf_{y\in[0,1]} \varphi(y)).$$

Hängt die beste Approximierende von der verwendeten Norm ab?

Aufgabe 28:

Der normierte Raum X sei strikt konvex; d.h. für alle $\varphi,\psi \in X$, $\varphi \neq \psi$, mit $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ gilt $\|\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\| < 1$. Sei weiter $U \subset X$ konvex. Man zeige, dass es zu jedem $\varphi \in X$ höchstens eine beste Approximierende $v \in U$ gibt.

Abgabe 24.05.2012