Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Dr. P. Otte

SS 2012
24.05.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 8

Aufgabe 29*:

Seien X ein Prä-Hilbert-Raum und $G(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) := \det((\varphi_j, \varphi_k))_{j,k=1,\ldots,n}$ für $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X$ (vgl. Aufgabe 25). Seien $U \subset X$ ein Unterraum mit Basis $\psi_1, \ldots, \psi_n$ und $\varphi \in X$. Man zeige, für die beste Approximierende $u \in U$ an φ gilt

$$\|\varphi - u\|^2 = \frac{G(\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n)}{G(\psi_1, \ldots, \psi_n)}.$$

Hinweis: Normalengleichungen.

Aufgabe 30*:

Bezeichnungen und Voraussetzungen seien wie in Aufgabe 29.

(a) Für $k \leq m < n$ beweise man die Ungleichung ($G(\psi_{m+1}, \psi_m) := 1$)

$$\frac{G(\psi_k, \ldots, \psi_n)}{G(\psi_{k+1}, \ldots, \psi_n)} \leq \frac{G(\psi_k, \ldots, \psi_m)}{G(\psi_{k+1}, \ldots, \psi_m)}.$$

(b) Man folgere aus (a) die Ungleichungen, $m = 1, \ldots, n-1$,

$$G(\psi_1, \ldots, \psi_n) \leq \|\psi_1\|^2 \cdots \|\psi_n\|^2,$$
$$G(\psi_1, \ldots, \psi_n) \leq G(\psi_1, \ldots, \psi_m) G(\psi_{m+1}, \ldots, \psi_n).$$

(c) Sei $A = (a_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Man beweise die Hadamardsche Ungleichung

$$(\det A)^2 \leq \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2.$$

Aufgabe 31*:

Sei $C^1_{2\pi}[-\pi, \pi]$ der Raum der 2π-periodischen, stetig differenzierbaren Funktionen. Man zeige, für $\varphi \in C^1_{2\pi}[-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig gegen φ

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} (u_k, \varphi) u_k = \varphi \text{ bzgl. } \|\cdot\|_\infty.$$

Hinweis: Besselsche Ungleichung für φ'.

Aufgabe 32:

Die Legendre-Polynome P_n seien durch die Rodrigues-Formel definiert

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Man zeige

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \, dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}, \; m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Abgabe 08.06.2012