Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Dr. P. Otte

SS 2012
07.06.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 9

Aufgabe 33:

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei die Operatornorm $\|A\|_p$ über die zugehörige Vektornorm $\|x\|_p$, $x \in \mathbb{C}^n$, definiert. Man zeige

$$\|A\|_1 = \max_{k=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|, \ \|A\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|, \ \|A\|_2^2 \le \sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2.$$

Steht für $p = 2$ Gleichheit?

Aufgabe 34

Sei X ein Banach-Raum. Man zeige, es gibt keine Operatoren $A, B \in L(X, X)$ mit dem Kommutator

$$[A, B] := AB - BA = \mathbb{1}.$$

Aufgabe 35*:

Seien X ein Prä-Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und $A : X \to X$ ein beschränkter linearer Operator. Man zeige

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|\varphi\|\le 1\\ \|\psi\|\le 1}} |(\varphi, A\psi)|.$$

Aufgabe 36*

Sei $X = C[a, b]$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \bar{\varphi}(x)\psi(x)\, dx.$$

Sei $A : X \to X$ ein Integraloperator

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\, dy$$

mit stetiger Kernfunktion K. Man beweise, A ist beschränkt und es gilt

$$\|A\| \le \left[\sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |K(x, y)|\, dy\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sup_{y\in[a,b]} \int_a^b |K(x, y)|\, dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Hinweis: Man verwende die Ungleichung $|fg| \le \frac{c}{2}|f|^2 + \frac{1}{2c}|g|^2$ mit optimalem $c > 0$.

Abgabe 14.06.2012