Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Dr. P. Otte

SS 2012
14.06.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 10

Aufgabe 37*:

Gegeben sei die Volterra-Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x),\ x \in [a,b],$$

wobei $f \in C[a,b]$ gegeben und $\varphi \in C[a,b]$ gesucht ist. Die Kernfunktion $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Man zeige, dass dann die Integralgleichung für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung in $C[a,b]$ besitzt.

Aufgabe 38*:

Man beweise das Prinzip der Normbeschränktheit ohne die Dichtheitsaussage mithilfe des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit.

Hinweis: Die stetigen Funktionen sind $F_A(\varphi) := \|A\varphi\|$ mit $A \in L(X,Y)$.

Aufgabe 39*:

Sei $C_N : C_{2\pi}[-\pi,\pi] \to C_{2\pi}[-\pi,\pi]$ der Fejér-Operator wie in der Vorlesung; d.h. C_N lässt sich als Integraloperator

$$(C_N\varphi)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-y)\varphi(y)\,dy$$

mit dem Fejér-Kern F_N schreiben. Man untersuche, ob $\|C_N\|_\infty$ beschränkt bleibt für $N \to \infty$ oder nicht.

Aufgabe 40*:

Gegeben sei eine Folge von Quadraturformeln $Q_n : C[a,b] \to \mathbb{C}$ der Form

$$Q_n(\varphi) := \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \varphi(x_k^{(n)}),\ \varphi \in C[a,b].$$

Die Folge (Q_n) heißt konvergent, falls für alle $\varphi \in C[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Man beweise den Satz von Szegő: Die Folge (Q_n) konvergiert genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind. (i) (Q_n) konvergiert für alle Polynome. (ii)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} |a_k^{(n)}| < \infty.$$

Es darf vorausgesetzt werden, dass die Polynome bzgl. der Supremums-Norm dicht in $C[a,b]$ liegen.

Abgabe 21.06.2012