Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
Dr. P. Otte

SS 2012
21.06.2012

# Übungsaufgaben zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 11

Aufgabe 41*:

Sei $A : C[a, b] \to C[a, b]$ monoton und linear.

(a) Man zeige, $A$ ist beschränkt bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm und es gilt $\|A\|_\infty = \|Ae_0\|_\infty$, $e_0(x) = 1$.

(b) Zusätzlich gelte $Ap = p$ für alle $p \in \Pi_2$ also für alle Polynome vom Grad zwei oder kleiner. Man zeige $A = \mathbb{1}$.

Aufgabe 42*:

Seien $B_n : C[0, 1] \to C[0, 1]$ der Bernstein-Operator und $\varphi \in C[0, 1]$ Lipschitz-stetig; d.h. es gilt $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq L|x-y|$ für alle $x, y \in [0, 1]$. Man beweise die Ungleichung

$$\|B_n\varphi - \varphi\|_\infty \leq \frac{L}{2\sqrt{n}}.$$

Aufgabe 43:

Seien $X$ und $Y$ normierte Räume sowie $A \in L(X, Y)$ bijektiv. Man zeige, dass im allgemeinen nicht $A^{-1} \in L(Y, X)$ gilt.

Aufgabe 44:

Seien $X$ und $Y$ Banach-Räume sowie $A \in L(X, Y)$.

(a) Sei $A$ zusätzlich injektiv. Man zeige, dass $A^{-1} : \operatorname{ran}(A) \to X$ genau dann beschränkt ist, wenn $\operatorname{ran}(A) \subset Y$ abgeschlossen ist.

(b) Sei $A$ zusätzlich bijektiv. Man zeige, es gibt Konstanten $\gamma, \Gamma > 0$ mit $\gamma\|\varphi\| \leq \|A\varphi\| \leq \Gamma\|\varphi\|$ für alle $\varphi \in X$.

Abgabe 28.06.2012