Fakultät für Mathematik SS 2012
Ruhr-Universität Bochum 28.06.2012
Dr. P. Otte

Übungsaufgaben zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 12

Aufgabe 45*:

Sei X ein separabler, normierter Raum; d.h. es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge $U \subset X$. Man gebe einen konstruktiven Beweis des Satzes von Hahn-Banach, der nicht auf das Lemma von Zorn zurückgreift.

Aufgabe 46 Seien X ein Hilbert-Raum und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem. Man zeige,

$$\lim_{n\to\infty} F(\varphi_n) = 0$$

für alle $F \in L(X, \mathbb{C})$.

Aufgabe 47*:

Sei X ein Hilbert-Raum, der aus Funktionen φ besteht, die auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ erklärt sind, $\varphi : G \to \mathbb{C}$. Eine Funktion $K : G \times G \to \mathbb{C}$ heißt reproduzierender Kern für X, falls gilt $k_z := K(z, \cdot) \in X$ für alle $z \in G$ und $(k_z, \varphi) = \varphi(z)$ für alle $\varphi \in X$ und alle $z \in G$. Man beweise den Satz von Aronszajn-Bergman, wonach X genau dann einen reproduzierenden Kern besitzt, falls zu jedem $z \in G$ ein C_z existiert, sodass $|\varphi(z)| \le C_z \|\varphi\|$ ist für alle $\varphi \in X$.

Aufgabe 48:

Man zeige, der reproduzierende Kern K aus Aufgabe 47 hat die Eigenschaft

$$\sum_{j,k=1}^{n} K(z_j, z_k)\bar{\xi}_j \xi_k \ge 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $z_j, \xi_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$; d.h. K ist positiv.

Abgabe 05.07.2012