Defektindices kubischer Operatoren in einer Fockdarstellung

Diplomarbeit

vorgelegt von
Peter Otte
aus
Bad Lauterberg

angefertigt
im Institut für Theoretische Physik
der Georg-August-Universität zu Göttingen
1992

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Im Einklang mit den allgemeinen Prinzipien der Quantenmechanik werden auch in der Quantenfeldtheorie die meßbaren oder beobachtbaren Größen, die Observablen, durch selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum beschrieben; es ist deshalb ein Grundproblem bei der mathematischen Behandlung der Quantenfeldtheorie, zu entscheiden, ob ein gegebener symmetrischer Operator selbstadjungiert ist. Da solche Operatoren viele angenehme Eigenschaften haben, ist eine Vielzahl von Selbstadjungiertheitskriterien entwickelt worden (vgl. beispielsweise [12]). Der für uns interessante Fall nichtselbstadjungierter Operatoren wird dagegen nur selten untersucht. Für ihn erweist sich der Begriff des Defektindex als wesentlich. Wir stellen daher in Abschnitt 2.1 die wichtigsten Tatsachen über symmetrische Operatoren und ihre Defektindices zusammen.

In der Quantenfeldtheorie werden die Observablen aus Feldoperatoren konstruiert, die auch selbst schon Observable sein können, aber nicht müssen. Die Eigenschaften, die ein Feldoperator haben muß, sind in den Gårding-Wightman-Axiomen festgelegt (vgl. [12], [18]). Die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Operatoren sind motiviert durch gewisse polynomiale Operatoren, die sogenannten n-ten Wickpotenzen, $n \in \mathbb{N}$, des skalaren Feldes (vgl. [18]). Diese sind aus zweierlei Gründen interessant. Zum einen liefern sie eine ganze Klasse von Feldoperatoren, die physikalisch äquivalent sind in dem Sinne, daß sie, wenn überhaupt, alle dieselbe Streutheorie haben, nämlich die triviale. Nichtsdestotrotz unterscheiden sie sich in mathematischer Hinsicht; denn die zugeordneten Wightman-Distributionen (vgl. [12]) haben einige bemerkenswerte Eigenschaften. Der andere Grund ist der, daß man beim Studium von Feldtheorien mit Wechselwirkung, das sind solche mit nichttrivialer Streutheorie, auf nichtlineare Feldgleichungen für operatorwertige Distributionen geführt wird (vgl. 3.1). Das einfachste Beispiel ist die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung für die Distribution $\Phi(f) = \int f(x,t)\Phi(x,t)\, dx\, dt$ (vgl. [12]):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right) \Phi(x,t) = -4\lambda(\Phi(x,t))^3 \tag{1.1}$$

mit $m^2, \lambda > 0$. Φ ist das Analogon zum anharmonischen Oszillator der gewöhnlichen Quantenmechanik. Im Gegensatz zu dort ist in der Quantenfeldtheorie überhaupt nicht klar, was die rechte Seite von (1.1) bedeuten soll. Wickpotenzen sind Beispiele dafür, wie man mathematisch korrekt Potenzen bestimmter operatorwertiger Distributionen einführt.

Die Frage nach der Selbstadjungiertheit allgemeiner Feldoperatoren oder der Wickpotenzen läßt sich nur teilweise beantworten. So folgt aus dem PCT-Theorem (vgl. [12]), daß Feldoperatoren, die den Gårding-Wightman-Axiomen und einer bestimmten Zusatzbedingung genügen, stets gleiche Defektindices besitzen. In [14] wird gezeigt, daß gewisse Wickpotenzen mit $n = 2k$ selbstadjungiert sind. Die Selbstadjungiertheit der ersten und zweiten Wickpotenz ergibt sich aus dem Borchers-Zimmermann-Kriterium (vgl. [4]). Von der dritten Wickpotenz weiß man dagegen nur, daß alle bekannten Selbstadjungiertheitskriterien versagen. Wir hoffen, daß im Verlaufe dieser Arbeit die Gründe dafür etwas klarer werden.

Wir beginnen mit unseren Überlegungen bei den ersten beiden Wickpotenzen. Der übliche Nachweis der Selbstadjungiertheit benutzt wie oben erwähnt das Borchers-Zimmermann-Kriterium, das seinerseits auf dem Satz von Nelson über analytische Vektoren (vgl. [12]) und den Gårding-Wightman-Axiomen aufbaut. Es zeigt sich, daß man diese starken analytischen Hilfsmittel eigentlich nicht benötigt. Die Selbstadjungiertheit der besagten Operatoren läßt sich nämlich ganz elementar einsehen, wenn man in der Fockraumdarstellung arbeitet (vgl. [3]). Der Fockraum ist ein spezieller Hilbertraum, in dem die Feldoperatoren erklärt sind. Wir entwickeln die abstrakten Eigenschaften in Kapitel 3. Wesentlich ist, daß man den Fockraum in natürlicher Weise als unendliche orthogonale Summe darstellen kann. Unsere Wickpotenzen werden dann wie üblich zu Matrixoperatoren, die hier eine ähnliche Struktur haben wie die klassischen Jacobi-Matrizen (vgl. Abschnitt 2.2), deren Theorie somit auf unser Problem anwendbar ist. Der Grund für diese Ähnlichkeit liegt darin, daß sich Wickpotenzen als polynomiale Ausdrücke in den sogenannten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren schreiben lassen. Genauer, die n-te Wickpotenz ist eine (homogene) Form n-ten Grades in den (unendlich vielen) Erzeugern und Vernichtern (vgl. die Überlegungen bei (3.12) und (3.13)). Allgemein läßt sich sogar die Selbstadjungiertheit von Formen ersten und zweiten Grades nachweisen, die nicht unbedingt von Wickpotenzen stammen. Der Gegenstand unserer weiteren Untersuchungen ist deshalb auch nicht nur die dritte Wickpotenz, sondern zunächst eine beliebige (symmetrische) Form aus Erzeugern und Vernichtern.

Die angesprochene Operatorklasse können wir natürlich nicht vollständig behandeln. Wir vereinfachen das Problem dahingehend, daß wir die Anzahl der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren begrenzen. Wir betrachten hier den einfachsten Fall eines Vernichters a und eines Erzeugers a^*. Der zu untersuchende Operator lautet dann:

$$\alpha_3 a^3 + 3\alpha_1 a^* a^2 + 3\bar{\alpha}_1 (a^*)^2 a + \bar{\alpha}_3 (a^*)^3 \ , \ \alpha_3, \alpha_1 \in \mathbb{C}. \tag{1.2}$$

Da sich a, a^* als Differentialoperatoren im $L^2(\mathbb{R})$ realisieren lassen (vgl. Abschnitt 3.3), kann man die Defektindices von (1.2) durch das Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen ermitteln. Dieser Weg wird in [10] beschritten. Man erhält so natürlich dieselben Resultate wie in der vorliegenden Arbeit, doch sollten die folgenden Nachteile angemerkt werden. Zum einen benötigt man nichtelementare Sätze über asymptotische Entwicklungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Zum anderen nutzt man überhaupt nicht die algebraische Struktur des Fockraumes aus. Dadurch lassen sich die gewonnenen Ergebnisse nur schwer als unmittelbare

Eigenschaft des untersuchten Operators interpretieren, und die Übertragung auf kompliziertere Operatoren dürfte schwierig sein. Die vom Autor entwickelte Methode zur Bestimmung der Defektindices von (1.2) vermeidet diesen Nachteil weitgehend.

In einem ersten Schritt führen wir unitäre Transformationen ein, die sogenannten Bogoljubov-Transformationen (vgl. Abschnitt 3.2), mit deren Hilfe wir (1.2) auf verschiedene einfachere Normalformen bringen können. Die Bestimmung der möglichen Normalformen und die Durchführung der Transformation stellen ein rein algebraisches Problem aus der Theorie kubischer Formen dar, das in Kapitel 4 gelöst wird. Der abschließende zweite Schritt besteht darin, die Defektindices der Normalformen zu berechnen. Das geschieht in Kapitel 5. Es gelingt, die beiden wichtigsten Normalformen $\alpha = 0$ und $\alpha = \infty$ im Sinne der Fockraumdarstellung als (verallgemeinerte) Jacobi-Matrizen zu behandeln. Dafür mußten wir mit Satz 2.17 eine Verschärfung der klassischen Ergebnisse beweisen, nachdem ein naheliegender störungstheoretischer Ansatz nicht zum Erfolg führte (vgl. Abschnitt 6.1).

Das beschriebene Verfahren läßt sich leicht auf Formen höheren Grades übertragen. Zwar werden die Rechnungen weitaus umfangreicher, doch treten keine begrifflichen Schwierigkeiten auf. Läßt man hingegen mehrere Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu, so wird das Studium der entsprechenden Bogoljubov-Transformationen und ihrer Wirkung auf kubische Formen vermutlich weitergehende algebraische Hilfsmittel erfordern, die hier nicht nötig waren.

Kapitel 2

Symmetrische Operatoren im Hilbertraum

2.1 Selbstadjungiertheit und Defektindices

Wir geben einen kurzen Abriß der Theorie linearer, symmetrischer (im allgemeinen unbeschränkter) Operatoren in einem Hilbertraum H. In der Darstellung folgen wir weitgehend [11],[12]. Im weiteren lassen wir die Bezeichnung linear fortfallen. Symmetrische, insbesondere selbstadjungierte Operatoren (vgl. Definition 2.6) sind in der Quantenmechanik von Bedeutung. Dort wird jeder meßbaren Größe ein solcher Operator zugeordnet. Die Heisenbergsche Vertauschungsrelation macht es notwendig, auch unbeschränkte, symmetrische Operatoren zu betrachten, die dann allerdings nicht mehr auf ganz H definiert sein können. Sie sollen aber zumindest noch dicht definiert sein, womit wir meinen, daß ein Operator A auf einem dichten Unterraum $D(A) \subset H$, dem Definitionsbereich von A, erklärt ist. Wir erinnern an die wichtigsten Definitionen.

Definition 2.1 *Ein Operator A heißt abgeschlossen, wenn für jede Folge $(\phi_n) \subset D(A)$ mit $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ und $\lim_{n\to\infty} A\phi_n = \psi$ gilt: $\phi \in D(A)$ und $A\phi = \psi$. Man nennt A abschließbar, falls es einen abgeschlossenen Operator $\tilde{A}$ gibt, so daß $\tilde{A} \mid_{D(A)}= A$ ist. Der Operator $\bar{A}$ mit $D(\bar{A}) = \bigcap\{D(\tilde{A}) \mid \tilde{A}$ abgeschlossen, $\tilde{A} \mid_{D(A)}= A\}$ und $\bar{A} \mid_{D(A)}= A$ heißt Abschluß von A.*

Definition 2.2 *Sei $\psi \in H$. Existiert ein $\chi \in H$ derart, daß für alle $\phi \in D(A)$ die Gleichung*

$$(A\phi, \psi) = (\phi, \chi)$$

besteht, dann ist $\psi \in D(A^*)$, wobei der Operator A^* erklärt ist durch $A^*\psi := \chi$. A^* ist der zu A adjungierte Operator.

Die vorangehende Definition 2.2 ist sinnvoll, da wegen der Dichtheit von $D(A)$ der Vektor χ eindeutig bestimmt ist. Der adjungierte Operator ist stets abgeschlossen; ist nämlich $(\psi_n) \subset$

$D(A^*)$ eine entsprechende Folge, also $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ und $\lim_{n\to\infty} A^*\psi_n = \chi$, dann gilt für alle $\phi \in D(A)$:

$$(A\phi, \psi) = \lim_{n\to\infty} (A\phi, \psi_n) = \lim_{n\to\infty} (\phi, A^*\psi_n) = (\phi, \chi)$$

und somit $A^*\psi = \chi$. In späteren Anwendungen verwenden wir häufig unitäre Transformationen. Dabei ist es gleichgültig, ob wir A oder A^* transformieren, genauer:

$$(UAU^*)^* = UA^*U^* \tag{2.1}$$

mit $D(UAU^*) = UD(A)$. Seien nämlich $U^*\phi \in D(A)$ und $U^*\psi \in D(A^*)$; dann ist:

$$(UAU^*\phi, \psi) = (AU^*\phi, U^*\psi) = (\phi, UA^*U^*\psi).$$

Weiter bemerken wir, daß man mittels A und A^* eine orthogonale Zerlegung von H erhält.

Lemma 2.3 *Es gilt:*

$$\operatorname{ran}(A + \lambda\mathbb{1})^\perp = \ker(A^* + \bar{\lambda}\mathbb{1}), \tag{2.2}$$

$$\ker(A^* + \lambda\mathbb{1})^\perp = \overline{\operatorname{ran}(A + \bar{\lambda}\mathbb{1})}. \tag{2.3}$$

Dabei bezeichnet ran *den Bildbereich eines Operators.*

Beweis: Für alle $\phi \in D(A)$ und $\psi \in D(A^*)$ haben wir:

$$((A + \lambda\mathbb{1})\phi, \psi) = (\phi, (A^* + \bar{\lambda}\mathbb{1})\psi)\,.$$

Daraus folgt sofort (2.2). Die andere Gleichung ist eine Konsequenz aus der Tatsache, daß für einen beliebigen Unterraum $G \subset H$ gilt: $(G^\perp)^\perp = \bar{G}$. ■

Wir kommen zu der für die weiteren Betrachtungen wesentlichen Operatorklasse.

Definition 2.4 *Ein Operator A heißt symmetrisch, wenn für alle $\phi, \psi \in D(A)$ gilt:*

$$(A\phi, \psi) = (\phi, A\psi).$$

Man sieht sofort $D(A) \subset D(A^*)$ und $A^* \mid_{D(A)} = A$. Obwohl ein symmetrischer Operator nicht abgeschlossen zu sein braucht, besitzt er stets einen symmetrischen Abschluß; denn man rechnet nach, daß A^{**} das Geforderte leistet. Wir notieren eine einfache, aber nützliche Identität.

Lemma 2.5 *Seien A ein symmetrischer Operator und $\lambda = \mu + i\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $\phi \in D(A)$:*

$$\|(A + \lambda\mathbb{1})\phi\|^2 = \|(A + \mu\mathbb{1})\phi\|^2 + \nu^2\|\phi\|^2. \tag{2.4}$$

Ist A zusätzlich abgeschlossen, so ist $\operatorname{ran}(A + \lambda\mathbb{1})$ *ein abgeschlossener Unterraum, falls $\nu \neq 0$ ist.*

Beweis: Wir rechnen:

$$\begin{aligned}\|(A+\lambda\mathbb{1})\phi\|^2 &= \|A\phi\|^2 + 2\mu(\phi, A\phi) + (\mu^2+\nu^2)\|\phi\|^2 \\ &= \|(A+\mu\mathbb{1})\phi\|^2 + \nu^2\|\phi\|^2.\end{aligned}$$

Sei A abgeschlossen, und die Folge $(\eta_n) \subset \operatorname{ran}(A+\lambda\mathbb{1})$ konvergiere in H. Wir können die η_n schreiben als:

$$\eta_n = (A+\lambda\mathbb{1})\phi_n \ , \ \ \phi_n \in D(A).$$

Aus (2.4) folgt:

$$\|(A+\lambda\mathbb{1})(\phi_n - \phi_m)\| \geq |\nu| \, \|\phi_n - \phi_m\|.$$

Da $\nu \neq 0$ ist, schließen wir, daß (ϕ_n) in H gegen ein $\phi \in H$ strebt. Also ergibt sich wegen der Abgeschlossenheit von A:

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = \lim_{n\to\infty} A\phi_n + \lambda \lim_{n\to\infty} \phi_n = A\phi + \lambda\phi \in \operatorname{ran}(A+\lambda\mathbb{1}).$$

Das war zu zeigen. ■

Wir sahen oben, daß bei symmetrischem A stets $D(A) \subset D(A^*)$ ist. Besonders wichtig ist nun der Fall, in dem die beiden Definitionsbereiche übereinstimmen.

Definition 2.6 *Ein symmetrischer Operator A heißt selbstadjungiert, wenn $D(A) = D(A^*)$ ist. A ist wesentlich selbstadjungiert, wenn der Abschluß $\bar{A}$ selbstadjungiert ist.*

In der Praxis läßt sich die Selbstadjungiertheit eines Operators nur selten bequem anhand der Definition nachweisen; wir beweisen deshalb ein Kriterium, das seinerseits Grundlage für viele weitere Sätze zur Selbstadjungiertheit ist.

Satz 2.7 *Sei A ein symmetrischer Operator. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *A ist selbstadjungiert.*
2. *A ist abgeschlossen, und* $\ker(A^* \pm i\mathbb{1}) = \{0\}$.
3. $\operatorname{ran}(A \pm i\mathbb{1}) = H$.

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. Wir haben oben bemerkt, daß A^* stets abgeschlossen ist. Daher muß auch A abgeschlossen sein. Sei nun $\psi \in D(A^*) = D(A)$ mit $\psi \in \ker(A^* - i\mathbb{1})$. Aus

$$i\psi = A^*\psi = A\psi$$

folgt:

$$-i(\psi,\psi) = (i\psi,\psi) = (A\psi,\psi) = (\psi, A\psi) = i(\psi,\psi).$$

Das ist nur bei $\psi = 0$ möglich. Entsprechend geht man bei $\psi \in \ker(A^* + i\mathbb{1})$ vor.

2. $\Rightarrow$ 3. Nach Lemma 2.5 ist $\operatorname{ran}(A \pm i\mathbb{1})$ ein abgeschlossener Unterraum von H. Sei $\psi \in \operatorname{ran}(A \pm i\mathbb{1})^\perp$. Nach (2.2) heißt das $\psi \in \ker(A^* \mp i\mathbb{1})$, also $\psi = 0$. Das zeigt $\operatorname{ran}(A \pm i\mathbb{1}) = H$.

3. $\Rightarrow$ 1. Sei $\psi \in D(A^*)$. Wir müssen $\psi \in D(A)$ nachweisen. Nun ist $\mathrm{ran}(A - i\mathbb{1}) = H$; somit findet sich ein $\eta \in D(A)$ mit der Eigenschaft:

$$(A^* - i\mathbb{1})\psi = (A - i\mathbb{1})\eta = (A^* - i\mathbb{1})\eta.$$

Da $\psi - \eta \in D(A^*)$ ist, folgt:

$$(A^* - i\mathbb{1})(\psi - \eta) = 0.$$

Wegen (2.2) und $\mathrm{ran}(A + i\mathbb{1}) = H$ ist:

$$\psi - \eta \in \mathrm{ran}(A + i\mathbb{1})^{\perp} = \{0\}.$$

Wir schließen:

$$\psi = \eta \in D(A).$$

Damit ist alles bewiesen. ∎

Korollar 2.8 *Sei A ein symmetrischer Operator. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *A ist wesentlich selbstadjungiert.*
2. $\ker(A^* \pm i\mathbb{1}) = \{0\}$.
3. $\mathrm{ran}(A \pm i\mathbb{1})$ *liegt dicht in H.*

Beweis: Wie oben angedeutet, besitzt A einen symmetrischen Abschluß $\bar{A}$. Anwendung von Satz 2.7 auf $\bar{A}$ liefert die Behauptung. ∎

Durch die Aussage 2. in Satz 2.7 bzw. Korollar 2.8 wird es auf praktikable Weise möglich, nachzuweisen, daß ein Operator nicht selbstadjungiert ist. Man muß nur $\ker(A^* \pm i\mathbb{1})$ berechnen, was einem Eigenwertproblem für A^* entspricht. Wegen ihrer Wichtigkeit erhalten diese Nullräume einen eigenen Namen.

Definition 2.9 *Sei A ein symmetrischer Operator. Die Räume*

$$K_{\pm} := \ker(A^* \mp i\mathbb{1})$$

heißen Defekträume von A, ihre Elemente Defektlösungen. Die Zahlen

$$n_{\pm} := \dim K_{\pm}$$

sind die Defektindices von A. Sie werden häufig auch als Paar (n_+, n_-) geschrieben.

Der folgende Satz zeigt, daß es in der vorangehenden Definition 2.9 nicht auf die Wahl von $\pm i$ als Eigenwerte ankommt.

Satz 2.10 *Seien A ein symmetrischer Operator und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist*

$$\dim\left(\ker(A^* - \lambda\mathbb{1})\right)$$

konstant in der oberen bzw. unteren Halbebene (bzgl. λ).

Beweis: Zur Abkürzung bezeichne:

$$K(\lambda) := \ker(A^* - \lambda\mathbb{1})\ ,\ n(\lambda) := \dim K(\lambda).$$

Um die Idee des Beweises klarer hervortreten zu lassen, setzen wir zunächst voraus, daß A abgeschlossen ist. Sei $\nu := \operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Wir zeigen, daß für hinreichend kleines $\kappa \in \mathbb{C}$ die Dimensionen $n(\lambda)$ und $n(\lambda+\kappa)$ übereinstimmen. Angenommen, es wäre $n(\lambda+\kappa) > n(\lambda)$. Dann gibt es ein $\psi \in D(A^*)$ mit $\|\psi\| = 1$, $\psi \in K(\lambda+\kappa)$ und $\psi \perp K(\lambda)$, wie man sich mithilfe des orthogonalen Projektors auf $K(\lambda)$ überlegen kann. Nach den Lemmata 2.3 und 2.5 ist $\psi \in \operatorname{ran}(A - \bar{\lambda}\mathbb{1})$ (dafür brauchten wir die Abgeschlossenheit von A). Also existiert ein $\phi \in D(A)$ mit:

$$\psi = (A - \bar{\lambda}\mathbb{1})\phi. \tag{2.5}$$

Wir rechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi, (A^* - (\lambda+\kappa)\mathbb{1})\,\psi) \\ &= (\phi, (A^* - \lambda\mathbb{1})\psi) - \kappa(\phi,\psi) \\ &= \|\psi\|^2 - \kappa(\phi,\psi) \\ &\geq 1 - |\kappa|\|\phi\|. \end{aligned}$$

Beachten wir nochmals Lemma 2.5, so sehen wir:

$$1 = \|\psi\|^2 = \|(A - \bar{\lambda}\mathbb{1})\phi\|^2 \geq \nu^2\|\phi\|^2,$$

also:

$$0 \geq 1 - \left|\frac{\kappa}{\nu}\right|. \tag{2.6}$$

Für $|\kappa| < |\nu|$ ist das offensichtlich ein Widerspruch, und es folgt:

$$n(\lambda) \geq n(\lambda+\kappa).$$

In der anderen Richtung schließt man analog. Insgesamt erweist sich $n(\lambda)$ als lokal konstant in einer Halbebene und ist mithin konstant in der gesamten Halbebene.

Wir verzichten jetzt auf die Abgeschlossenheit von A. Dann ist (2.5) i.a. nicht mehr richtig. Wir können ψ aber approximieren:

$$\psi = \lim_{n\to\infty}(A - \bar{\lambda}\mathbb{1})\phi_n\ ,\ \phi_n \in D(A).$$

Wegen (2.4) konvergiert auch (ϕ_n), und zwar ist $\lim\limits_{n\to\infty}\|\phi_n\| = \frac{1}{|\nu|}$. Wie oben folgt:

$$0 \geq \big((A - \bar{\lambda}\mathbb{1})\phi_n, \psi\big) - |\kappa|\|\phi_n\|.$$

Hierin lassen wir $n \to \infty$ streben und erhalten wieder (2.6), was denselben Widerspruch wie oben nach sich zieht. Damit ist alles gezeigt. ■

Satz 2.10 ist beim Bestimmen der Defektindices äußerst nützlich, wie wir in den Kapiteln 4 und 5 sehen werden. Mit mehr Aufwand läßt sich eine bijektive lineare Abbildung der Nullräume $K(\lambda)$ und $K(\lambda+\kappa)$ aufeinander konstruieren. Diese Abbildung hängt analytisch von κ ab, was zeigt, daß sich die Defektlösungen analytisch mit κ ändern (vgl. dazu [5]).

Zum Abschluß geben wir ein Kriterium an, nach dem man entscheiden kann, ob $n_+ = n_-$ ist. Wir werden dieses Kriterium in Abschnitt 2.2 verwenden. Vorab ein neuer Begriff.

Definition 2.11 *Sei $J : H \to H$ eine antilineare Abbildung; d.h.:*

$$J(\alpha\phi + \beta\psi) = \bar{\alpha}J(\phi) + \bar{\beta}J(\psi)\ ,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ ,\ \ \phi, \psi \in H.$$

J heißt Konjugation, falls $\|J\phi\| = \|\phi\|$ für alle $\phi \in H$ und $J^2 = \mathbb{1}$ ist.

Die Wirkung einer Konjugation auf das Skalarprodukt läßt sich angeben, wenn man die Parallelogrammgleichung beachtet (vgl. [11]):

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{4}\left(\|\phi + \psi\|^2 - \|\phi - \psi\|^2 + i(\|\phi + i\psi\|^2 - \|\phi - i\psi\|^2)\right).$$

Es folgt wegen der Antilinearität von J:

$$(J\phi, J\psi) = \overline{(\phi, \psi)}.$$

Damit können wir den folgenden Satz beweisen.

Satz 2.12 (von Neumann) *Seien A ein symmetrischer Operator und J eine Konjugation mit $J(D(A)) \subset D(A)$ und $AJ = JA$ auf $D(A)$. Dann stimmen die Defektindices von A überein: $n_+ = n_-$.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist J bijektiv, und es gilt $JD(A) \subset D(A)$. Hieraus folgt $JD(A) = D(A)$. Seien nun $\psi_+ \in K_+$ und $\phi \in D(A)$. Wir rechnen, wobei wir die vorstehende Bemerkung beachten:

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{((A + i\mathbb{1})\phi, \psi_+)} \\ &= (J(A + i\mathbb{1})\phi, J\psi_+) \\ &= ((A - i\mathbb{1})J\phi, J\psi_+)\,. \end{aligned}$$

Dem entnehmen wir $J\psi_+ \in K_-$, also $J(K_+) \subset K_-$. Analog sieht man $J(K_-) \subset K_+$. Daraus folgt die Behauptung. ■

2.2 Jacobi-Matrizen

In diesem Abschnitt stellen wir die wichtigsten Tatsachen über Jacobi-Matrizen zusammen. Da diese in der Literatur nur selten vorkommen und wenn, dann meist in anderen Zusammenhängen (z.B. Kettenbrüche, Momentenproblem), geben wir die Beweise mit an. Recht ausführlich behandelt wird dieser Problemkreis in [1],[2] und [15].

Definition 2.13 *Die unendliche Matrix $A = (a_{jk})_{j,k=0,1,\ldots}$ heißt Jacobi-Matrix, falls gilt:*

$$a_{jj} \in \mathbb{R}\ ,\ \ a_{j+1,j} = \bar{a}_{j,j+1} \neq 0\ ,\ \ a_{jk} = 0 \text{ für } |j - k| \geq 2$$

für alle $j, k \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen:

$$a_j := a_{j,j+1}\ ,\ \ b_j := a_{jj}\ ,\ \ j = 0, 1, \ldots$$

Jacobi-Matrizen sind also unendliche, hermitesche Tridiagonalmatrizen. Die Überlegungen dieses Abschnittes lassen sich auch auf Bandmatrizen übertragen. Obgleich solche Matrizen später vorkommen werden, verzichten wir hier auf ihre Behandlung und führen die nötigen Rechnungen in den entsprechenden Abschnitten durch.

Jacobi-Matrizen wirken auf natürliche Weise als symmetrische Operatoren im Hilbertraum $l^2(\mathbb{N}_0)$, das ist der Raum der quadratsummierbaren, einfach indizierten Folgen komplexer Zahlen. Da keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir auch kurz l^2. Die Wirkung von A auf

$$\phi = (c_0, c_1, \ldots) =: (c_n) \in l^2$$

ist (formal) gegeben durch:

$$(A\phi)_n = a_n c_{n+1} + b_n c_n + \bar{a}_{n-1} c_{n-1} \ , \ n \geq 0 \ , \ a_{-1} := 0. \tag{2.7}$$

Im folgenden untersuchen wir die Selbstadjungiertheit von A. Dazu müssen wir einen dichten Definitionsbereich angeben. Die kanonische Wahl ist:

$$D_0 := D(A) := l_0^2,$$

worin l_0^2 der Unterraum der endlichen Folgen ist:

$$l_0^2 := \{\phi \in l^2 \mid \phi = (c_n), \exists N = N(\phi) \text{ mit } c_n = 0 \text{ für } n \geq N\}.$$

D_0 liegt bekanntlich dicht in l^2, und A ist dort ein wohldefinierter, symmetrischer Operator. Insbesondere ist $A\phi \in l_0^2$ für $\phi \in l_0^2$. Wir können jetzt den Definitionsbereich des adjungierten Operators A^* angeben.

Satz 2.14 *Die Wirkung des adjungierten Operators A^* auf ein $\phi \in l^2$ ist formal gegeben durch (2.7). Es ist $\phi \in D(A^*)$ genau dann, wenn gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n c_{n+1} + b_n c_n + \bar{a}_{n-1} c_{n-1}|^2 < \infty.$$

Kurz gesagt: $\phi \in D(A^*)$ genau dann, wenn $A^*\phi \in l^2$.

Beweis: Wir haben die allgemeine Definition von A^* nachzuprüfen (vgl. Definition 2.2). Seien dazu $\phi = (c_0, \ldots, c_N, 0, \ldots) \in D_0$ beliebig und $\psi = (d_n) \in l^2$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} (A\phi, \psi) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{a}_n \bar{c}_{n+1} + b_n \bar{c}_n + a_{n-1} \bar{c}_{n-1}) d_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n (\bar{a}_{n-1} d_{n-1} + b_n d_n + a_n d_{n+1}) \\ &= (\phi, \chi) \end{aligned}$$

mit entsprechendem χ. Die Umformung ist erlaubt, da die Summe in Wirklichkeit nur endlich ist. Dies ist für alle $\phi \in D_0$ richtig; deshalb ist ψ nur der Einschränkung unterworfen, daß $\chi \in l^2$ sei. Das ist die Behauptung. ∎

Mittels Satz 2.14 können die Defektindices bestimmt werden. Die Defektgleichung

$$A^*\phi = \lambda\phi \ , \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0$$

führt auf eine Rekursionsformel für die Komponenten von $\phi = (c_n)$:

$$a_n c_{n+1} + b_n c_n + \bar{a}_{n-1} c_{n-1} = \lambda c_n \ , \ n \geq 0 \ , \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0. \tag{2.8}$$

O.B.d.A. kann man $c_0 = 1$ verlangen. Wegen $a_{-1} := 0$ besitzt (2.8) genau eine Lösung. Die Defektindices von A können also nur die Werte 0 oder 1 annehmen, je nachdem ob für die Lösung von (2.8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \infty \text{ oder } \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$$

gilt. Dabei ist die Voraussetzung $a_j \neq 0$ in Definition 2.13 unwesentlich, solange nur endlich viele a_j verschwinden. Dann gibt es nämlich ein maximales N mit $a_N = 0$, und die Rekursionsformel (2.8) zerfällt in zwei Teile; denn beim kritischen Index N ist:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{N-1}c_N & + & b_{N-1}c_{N-1} & + & \bar{a}_{N-2}c_{N-2} & = & \lambda c_{N-1} \\ & & b_N c_N & + & \bar{a}_{N-1}c_{N-1} & = & \lambda c_N \quad . \\ a_{N+1}c_{N+2} & + & b_{N+1}c_{N+1} & & & = & \lambda c_{N+1} \end{array}$$

Für $c_0 \ldots, c_N$ handelt es sich somit um eine gewöhnliche Eigenwertaufgabe für eine endliche hermitesche Matrix. Da solche Matrizen nur reelle Eigenwerte haben, folgt $c_0 = \ldots = c_N = 0$. Wir können also immer o.B.d.A. $a_n \neq 0$ voraussetzen.

Als nächstes sehen wir, daß in (2.8) die Forderung $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ ausreichend ist.

Satz 2.15 *Für den Operator A stimmen auf D_0 stets positiver und negativer Defektindex überein. Es gibt nur die Möglichkeiten* $(0,0)$ *oder* $(1,1)$.

Beweis: Wir betrachten die folgende Abbildung J :

$$(J\phi)_n := \frac{\bar{a}_{n-1}\ldots\bar{a}_0}{a_{n-1}\ldots a_0}\bar{c}_n \ , \ n \geq 1 \ , \ (J\phi)_0 := \bar{c}_0.$$

Offensichtlich ist $J : l^2 \to l^2$ und $J(D_0) \subset D_0$ sowie $\|J\phi\| = \|\phi\|$. Weiter gilt $J^2 = \mathbb{1}$ und $J(\kappa\phi + \lambda\psi) = \bar{\kappa}J(\phi) + \bar{\lambda}J(\psi)$. J ist also eine Konjugation. Wir rechnen ($n \geq 2$):

$$\begin{aligned} (AJ\phi)_n &= a_n\frac{\bar{a}_n\ldots\bar{a}_0}{a_n\ldots a_0}\bar{c}_{n+1} + b_n\frac{\bar{a}_{n-1}\ldots\bar{a}_0}{a_{n-1}\ldots a_0}\bar{c}_n + \bar{a}_{n-1}\frac{\bar{a}_{n-2}\ldots\bar{a}_0}{a_{n-2}\ldots a_0}\bar{c}_{n-1} \\ &= \frac{\bar{a}_{n-1}\ldots\bar{a}_0}{a_{n-1}\ldots a_0}\overline{(a_n c_{n+1} + b_n c_n + \bar{a}_{n-1}c_{n-1})} \\ &= (JA\phi)_n. \end{aligned}$$

Für $n = 1$ und $n = 0$ erhält man das gleiche Ergebnis. Insgesamt sehen wir $AJ\phi = JA\phi$ für alle $\phi \in D_0$. Aus dem von-Neumann-Kriterium (vgl. 2.12) folgt die Gleichheit der Defektindices. Daß die Defektindices nur die Werte 0 oder 1 annehmen können, hatten wir schon im Zusammenhang mit Gleichung (2.8) bemerkt. ∎

Wir wenden uns der Selbstadjungiertheit von Jacobi-Matrizen zu (vgl. [1],[2],[8]).

Satz 2.16 (Carleman) *Für den durch (2.7) erklärten Operator A gelte:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty.$$

Dann ist A auf D_0 wesentlich selbstadjungiert.

Beweis: Wir werden zeigen, daß die Defektgleichung (2.8) keine nichttriviale Lösung mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ besitzt. Angenommen, es gäbe eine solche Lösung. Wir multiplizieren (2.8) mit $\bar{c}_n$ und nehmen den Imaginärteil:

$$\operatorname{Im}(a_n c_{n+1} \bar{c}_n) - \operatorname{Im}(a_{n-1} c_n \bar{c}_{n-1}) = \operatorname{Im} \lambda |c_n|^2.$$

Aufsummieren von 0 bis N ergibt:

$$\operatorname{Im}(a_N c_{N+1} \bar{c}_N) = \operatorname{Im} \lambda \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2.$$

Diese Gleichung ist ein diskretes Analogon zur Greenschen Formel bei Differentialgleichungen. Es folgt (beachte $c_0 = 1$):

$$0 < |\operatorname{Im} \lambda| \leq |\operatorname{Im}(a_N c_{N+1} \bar{c}_N)| \leq \frac{1}{2} |a_N| \left(|c_{N+1}|^2 + |c_N|^2 \right)$$

also:

$$\frac{2 |\operatorname{Im} \lambda|}{|a_N|} \leq |c_{N+1}|^2 + |c_N|^2.$$

Nochmalige Summation führt schließlich auf:

$$2 |\operatorname{Im} \lambda| \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{|a_N|} \leq \sum_{N=0}^{\infty} \left(|c_{N+1}|^2 + |c_N|^2 \right) \leq 2 \sum_{N=0}^{\infty} |c_N|^2.$$

Die linke Seite divergiert aber nach Voraussetzung, so daß wir auf einen Widerspruch gestoßen sind. (2.8) besitzt keine nichttrivialen quadratsummierbaren Lösungen. ■

Diesen Satz werden wir in Abschnitt 6.2 verwenden, um die Selbstadjungiertheit gewisser Operatoren zu zeigen, die bei der quantenmechanischen Behandlung des harmonischen Oszillators auftreten, nämlich der linearen und quadratischen Operatoren aus Gleichung (3.11) und Definition 3.8. Die Beweismethode überträgt sich problemlos auf die entsprechenden Operatoren in der Quantenfeldtheorie (vgl. [3]).

Wir kommen zu der Frage, wann die Lösung der Defektgleichung (2.8) quadratsummierbar ist. Die Umkehrung des Satzes von Carleman ist im allgemeinen nicht richtig, wie der Satz von Dennis und Wall zeigt (vgl. [1]). Danach ist eine Jacobi-Matrix wesentlich selbstadjungiert, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{|a_n||a_{n-1}|} = \infty$$

ist. Es kommt also auf das Verhältnis von Diagonal- zu Nebendiagonalelementen an. Wir führen die Hilfsgrößen e_n gemäß

$$a_n e_{n+1} = \bar{a}_{n-1} e_{n-1} \ , \ n \geq 1 \ ; \ e_0 := 1 \ , \ e_1 := \frac{1}{a_0} \tag{2.9}$$

ein. Die Werte für e_0 und e_1 haben wir vorgegeben, weil die e_n nur die Asymptotik der c_n wiedergeben sollen. Induktiv sieht man:

$$e_{n+1} = \frac{\bar{a}_{n-1}}{a_n}\frac{\bar{a}_{n-3}}{a_{n-2}}\cdots\frac{\bar{a}_{\iota(n+1)}}{a_{\iota(n+1)+1}}e_{\iota(n+1)}\ ,\ n \geq 1 \tag{2.10}$$

mit $\iota(n) \in \{0,1\}$, $\iota(n) \equiv n \bmod 2$. Wir machen den Ansatz:

$$c_n = \tau_n e_n d_n\ ,\ n \geq 0, \tag{2.11}$$

wobei $\tau_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nur zwei Werte annimmt:

$$\tau_n = \begin{cases} \tau^0 & \text{für} \quad n \text{ gerade} \\ \tau^1 & \text{für} \quad n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Durch die τ_n berücksichtigen wir, daß man in (2.9) eigentlich e_0 und e_1 hätte frei wählen können. Ist nun $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |e_n|^2 < \infty$, so müssen wir von den d_n nur noch die Beschränktheit zeigen. Einsetzen in (2.8) gibt:

$$\begin{aligned}\lambda\tau_n e_n d_n &= a_n\tau_{n+1}e_{n+1}d_{n+1} + b_n\tau_n e_n d_n + \bar{a}_{n-1}\tau_{n-1}e_{n-1}d_{n-1} \\ &= \bar{a}_{n-1}\tau_{n-1}e_{n-1}d_{n+1} + b_n\tau_n e_n d_n + \bar{a}_{n-1}\tau_{n-1}e_{n-1}d_{n-1}.\end{aligned}$$

Wir erhalten, wenn wir nach d_{n+1} auflösen:

$$d_{n+1} = (\lambda - b_n)\frac{1}{\bar{a}_{n-1}}\frac{e_n}{e_{n-1}}\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}d_n - d_{n-1}. \tag{2.12}$$

Der Faktor vor d_n läßt sich noch umformen. Aus (2.10) folgt:

$$\frac{e_n}{\bar{a}_{n-1}e_{n-1}} = \frac{1}{\bar{a}_{n-1}}\frac{\bar{a}_{n-2}\ldots\bar{a}_{\iota(n)}}{a_{n-1}\ldots a_{\iota(n)+1}}e_{\iota(n)}\frac{a_{n-2}\ldots a_{\iota(n-1)+1}}{\bar{a}_{n-3}\ldots\bar{a}_{\iota(n-1)}}\frac{1}{e_{\iota(n-1)}} = |e_n|^2$$

aufgrund der Wahl von e_0 und e_1. Damit geht (2.12) über in:

$$d_{n+1} = (\lambda - b_n)\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}|e_n|^2 d_n - d_{n-1}. \tag{2.13}$$

In [1],[2] und [8] wird nun auf (2.13) die Dreiecksungleichung angewandt und induktiv abgeschätzt. Für unsere Zwecke ist das zu grob. Nimmt man einmal an, daß in (2.13) $b_n|e_n|^2 \to 0$ strebt für $n \to \infty$, so wird man erwarten, daß für große n gilt: $d_{n-1} \approx -d_{n+1}$. Mit anderen Worten die Folgen $(|d_{2k}|)$ und $(|d_{2k+1}|)$ sollten konvergieren. Berechnungen auf dem Computer stützen diese Vermutung; es ist deshalb naheliegend, die beiden Teilfolgen gewissermaßen gleichzeitig zu betrachten, indem man die Vektoren $(d_{2k+1}, d_{2k})^T$ einführt. Um für diese Vektoren eine Rekursionsformel abzuleiten, ersetzen wir in (2.13) n durch $n+1$ und eliminieren auf der rechten Seite d_{n+1}:

$$\begin{aligned}d_{n+2} &= (\lambda - b_{n+1})\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}|e_{n+1}|^2 d_{n+1} - d_n \\ &= (\lambda - b_{n+1})\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}|e_{n+1}|^2\left((\lambda - b_n)\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}|e_n|^2 d_n - d_{n-1}\right) - d_n \\ &= \left(-1 + (\lambda - b_{n+1})(\lambda - b_n)|e_{n+1}|^2|e_n|^2\right)d_n - (\lambda - b_{n+1})\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}|e_{n+1}|^2 d_{n-1}.\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise führt das zusammen mit (2.13) auf:

$$\begin{pmatrix} d_{n+2} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+(\lambda-b_{n+1})(\lambda-b_n)|e_{n+1}|^2|e_n|^2 & -(\lambda-b_{n+1})\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}|e_{n+1}|^2 \\ (\lambda-b_n)\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}|e_n|^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ d_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Man kann nun den Spektralradius dieser Matrix berechnen und daran ablesen, ob die d_n beschränkt bleiben oder nicht. Da es sich um eine 2×2-Matrix handelt, ist die exakte Berechnung der Eigenwerte durchaus praktikabel. Wir wollen dies dennoch nicht durchführen, sondern lieber das asymptotische Verhalten von (2.14) mithilfe geeigneter Näherungen studieren. Dieses Verfahren läßt sich mit vertretbarem Aufwand auch noch in Abschnitt 5.2 anwenden.

Satz 2.17 *Zu der Jacobi-Matrix A definieren wir die Hilfsgrößen e_n durch:*

$$a_n e_{n+1} = \bar{a}_{n-1} e_{n-1} \ , \ n \geq 1 \ ; \ e_0 := 1 \ , \ e_1 := \frac{1}{a_0}.$$

Es gelte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |e_n|^2 < \infty \ \textit{und} \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 |e_n|^4 < \infty. \tag{2.15}$$

Weiter gebe es Zahlen $\tau_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit:

$$\tau_n = \begin{cases} \tau^0 & \textit{für} \ \ n \ \textit{gerade} \\ \tau^1 & \textit{für} \ \ n \ \textit{ungerade} \end{cases} ,$$

so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} b_{n+1} |e_{n+1}|^2 - \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} b_n |e_n|^2 \right| < \infty \tag{2.16}$$

ist ($\tau_{-1} := \tau_1$). Dann ist die Lösung von (2.8) quadratsummierbar, der Operator A hat mithin auf D_0 den Defekt $(1,1)$.

Beweis: Sei abkürzend:

$$y_n := \begin{pmatrix} d_n \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \ , \ n = 2k+1 \ , \ k \geq 0.$$

Wir spalten die Matrix in (2.14) auf in einen Teil V_n, der die gefährlichen Terme enthält und gleichzeitig eine möglichst einfache Gestalt hat, so daß man die Eigenwerte fast ablesen kann, und in einen Teil W_n mit Termen höherer Ordnung:

$$y_{n+2} = V_n y_n + W_n y_n,$$

wobei V_n und W_n gegeben sind durch:

$$V_n = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} b_n |e_n|^2 \\ -\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} b_n |e_n|^2 & -1 \end{pmatrix}$$

und:

$$W_n = \begin{pmatrix} (\lambda - b_{n+1})(\lambda - b_n)|e_{n+1}|^2|e_n|^2 & \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} b_{n+1}|e_{n+1}|^2 - \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} b_n|e_n|^2 - \lambda\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}|e_{n+1}|^2 \\ \lambda\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}|e_n|^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bezeichne $\|.\|_2$ die euklidische Norm im $\mathbb{C}^2$. Wir schätzen ab:

$$\|y_{n+2}\|_2 \le \|V_n y_n\|_2 + \|W_n y_n\|_2.$$

Um die erste Norm auszurechnen, beachten wir, daß sich V_n schreiben läßt als $V_n = -\mathbb{1} + \tilde{V}_n$, worin $\tilde{V}_n$ eine schiefhermitesche Matrix ist. Wir können V_n also durch eine unitäre Matrix U_n diagonalisieren:

$$U_n V_n U_n^* = \begin{pmatrix} -1 + i\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} b_n|e_n|^2 & 0 \\ 0 & -1 - i\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} b_n|e_n|^2 \end{pmatrix} =: \Delta_n.$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Einträge von Δ_n in der Tat die Eigenwerte von V_n sind. Es folgt (beachte $b_n, \tau_n \in \mathbb{R}$):

$$\|V_n y_n\|_2 = \|U_n^* \Delta_n U_n y_n\|_2 = \left(1 + \frac{\tau_n^2}{\tau_{n-1}^2} b_n^2 |e_n|^4\right)^{1/2} \|y_n\|_2 \le \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\tau_n^2}{\tau_{n-1}^2} b_n^2|e_n|^4\right)\|y_n\|_2.$$

Im letzten Schritt haben wir die wohlbekannte Ungleichung $(1+y)^{1/2} \le 1 + y/2$ für $y \ge 0$ benutzt.

Bei der zweiten Norm können wir etwas großzügiger verfahren. Wir verwenden die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die elementare Abschätzung $(|a|^2 + |b|^2)^{1/2} \le |a| + |b|$. Man bekommt:

$$\begin{aligned}
\|W_n y_n\|_2 \quad \le \quad & \Bigg(|\lambda - b_{n+1}||\lambda - b_n||e_{n+1}|^2|e_n|^2 \\
& + \left| \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} b_{n+1}|e_{n+1}|^2 - \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} b_n|e_n|^2 - \lambda\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}|e_{n+1}|^2 \right| \\
& + |\lambda| \left|\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\right| |e_n|^2 \Bigg) \|y_n\|_2 \\
\le \quad & \Bigg(\frac{1}{2}|\lambda|(|\lambda|+1)\left(|e_n|^4 + |e_{n+1}|^4\right) + \frac{1}{2}|\lambda|\left(b_n^2|e_n|^4 + b_{n+1}^2|e_{n+1}|^4\right) \\
& + \left| \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} b_{n+1}|e_{n+1}|^2 - \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} b_n|e_n|^2 \right| \\
& + |\lambda| \left(\left|\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\right| |e_{n+1}|^2 + \left|\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\right| |e_n|^2 \right) \Bigg) \|y_n\|_2 \\
=: \quad & w_n \|y_n\|_2.
\end{aligned}$$

Für unsere y_n erhalten wir so die Abschätzung:

$$\|y_{n+2}\|_2 \le \left(1 + \frac{1}{2}\tau b_n^2 |e_n|^4 + w_n\right) \|y_n\|_2 \ , \ n \ge 1.$$

Dabei haben wir

$$\tau := \max\left\{ \frac{\tau_n^2}{\tau_{n-1}^2}, \frac{\tau_{n+1}^2}{\tau_n^2} \right\}$$

gesetzt. Mittels vollständiger Induktion führt das auf:

$$\|y_{2(k+1)+1}\|_2 \leq \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2}\tau b_{2k+1}^2 |e_{2k+1}|^4 + w_{2k+1}\right) \cdot \|y_1\|_2.$$

Das Produkt konvergiert für $n \to \infty$, da die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}^2 |e_{2k+1}|^4 \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k+1}$$

konvergieren. Dies folgt sofort aus den Voraussetzungen und der Tatsache, daß mit $\sum_{k=0}^{\infty} |e_k|^2 < \infty$ natürlich auch $\sum_{k=0}^{\infty} |e_k|^4 < \infty$ gilt.

Die y_n und damit auch die d_n haben sich also als beschränkt erwiesen, woraus wir wegen (2.11) die Behauptung erhalten. ■

Es ist bemerkenswert, daß im Gegensatz zum Satz von Carleman 2.16 im Beweis des vorangehenden Satzes die Voraussetzung $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ keine Rolle spielte; wir haben also gezeigt, daß das Spektrum des Operators A^* ganz $\mathbb{C}$ ist. Bei weiteren Verfeinerungen wird man möglicherweise auch $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ berücksichtigen müssen.

Die oben bereits angesprochenen Sätze sind nun einfache Folgerungen aus unserem Ergebnis. Als erstes bietet sich eine Vereinfachung der Voraussetzungen an (vgl. [8]).

Korollar 2.18 (Hinton/Lewis) *Die Bezeichnungen seien wie in Satz 2.17. Es gelte:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |e_n|^2 < \infty \textit{ und } \sum_{n=0}^{\infty} |b_n||e_n|^2 < \infty. \tag{2.17}$$

Dann ist die Lösung von (2.8) quadratsummierbar.

Beweis: Wir rechnen die Voraussetzungen von Satz 2.17 nach. Aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n||e_n|^2 < \infty$$

folgt natürlich:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 |e_n|^4 < \infty.$$

Das ist (2.15). Wir setzen $\tau_n = 1$ und schließen mithilfe der Dreiecksungleichung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| b_{n+1}|e_{n+1}|^2 - b_n|e_n|^2 \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1}||e_{n+1}|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n||e_n|^2 < \infty.$$

Das zeigt (2.16). ■

Falls die Nebendiagonalelemente a_n ein bestimmtes Wachstumsverhalten aufweisen, kann man auch die Größen $|e_n|^2$ bequem abschätzen und erhält so ein Kriterium, in dem die Matrixelemente unmittelbar vorkommen (vgl. [1],[2] und [8]).

Korollar 2.19 (Berezanski) *Für die Jacobi-Matrix A gelte:*

$$|b_n| \leq M < \infty \text{ und } |a_{n-1}||a_{n+1}| \leq |a_n|^2 \tag{2.18}$$

für alle (hinreichend großen) $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < \infty. \tag{2.19}$$

Dann ist die Lösung von (2.8) quadratsummierbar.

Beweis: Wir rechnen die Voraussetzungen von Korollar 2.18 nach. Aus (2.10) und (2.18) folgt:

$$\begin{aligned} |e_{n+1}|^2 &= \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|^2} \frac{|a_{n-1}||a_{n-3}|}{|a_{n-2}|^2} \cdots \frac{|a_{\iota(n+1)+2}||a_{\iota(n+1)}|}{|a_{\iota(n+1)+1}|^2} |a_{\iota(n+1)}||e_{\iota(n+1)}|^2 \\ &\leq \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|^2} |a_{\iota(n+1)}||e_{\iota(n+1)}|^2 \\ &\leq \frac{1}{|a_{n+1}|} |a_{\iota(n+1)}||e_{\iota(n+1)}|^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich sofort die Bedingungen (2.17). Die Überlegungen bleiben natürlich richtig, wenn die Voraussetzung (2.18) erst ab einem gewissen n_0 erfüllt ist. ■

Dieses Korollar werden wir in Abschnitt 5.1 anwenden. In Abschnitt 5.2 allerdings müssen wir auf die Beweisidee von Satz 2.17 zurückgreifen. Warum das so ist, können wir uns hier schon an einem Beispiel klarmachen.

Wir betrachten die Defektgleichung (2.8) für den Fall:

$$a_n = (n+1)^{3/2} \ , \ b_n = r(n+1)^{1/2} \ , \ r \in \mathbb{R},$$

also:

$$(n+1)^{3/2} c_{n+1} + r(n+1)^{1/2} c_n + n^{3/2} c_{n-1} = \lambda c_n. \tag{2.20}$$

Das entspricht qualitativ der Gleichung in Abschnitt 5.2. Die Hilfsgrößen e_n lauten (vgl. (2.9):

$$e_{2k} = \frac{(2k-1)^{3/2}(2k-3)^{3/2} \dots 1^{3/2}}{(2k)^{3/2}(2k-2)^{3/2} \dots 2^{3/2}} = \left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \right)^{3/2} \ , \ k \geq 1$$

sowie:

$$e_{2k+1} = \frac{(2k)^{3/2}(2k-2)^{3/2} \dots 2^{3/2}}{(2k+1)^{3/2}(2k-1)^{3/2} \dots 3^{3/2}} = \left(\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \right)^{3/2} \ , \ k \geq 0.$$

Mithilfe der Stirlingschen Formel für $n!$ (vgl. [6]):

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

kann man das asymptotische Verhalten der e_n ermitteln:

$$\begin{aligned} |e_{2k}|^2 &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{(2k)^{3/2}} + \text{ Terme höherer Ordnung,} \\ |e_{2k+1}|^2 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{1}{(2k+1)^{3/2}} + \text{ Terme höherer Ordnung.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß die zweite Reihe in (2.17) von Korollar 2.18 wie harmonische Reihe divergiert. In diesem Fall hinge es von der Größe von r ab, ob man die Quadratsummierbarkeit der c_n zeigen kann. Satz 2.17 dagegen läßt sich noch anwenden und zwar für alle $r \in \mathbb{R}$. Die Bedingungen (2.15) sind erfüllt, und in (2.16) wähle man τ^0 und τ^1 so, daß

$$\frac{\tau^0}{\tau^1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}$$

ist. Dann konvergiert auch (2.15). Die Lösung von (2.20) ist also quadratsummierbar.

Kapitel 3

Fockraumformalismus

3.1 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

In diesem Abschnitt beschreiben wir grob den allgemeinen Rahmen der Quantenfeldtheorie und untersuchen, inwieweit sich die in den folgenden Kapiteln behandelten Operatoren als Modellfall für allgemeinere Operatoren auffassen lassen.

Quantenfeldtheorie ist die Vereinigung der Prinzipien der Quantenmechanik mit denen der relativistischen Feldtheorie. Dementsprechend müssen die zu einem Feld gehörenden meßbaren Größen wie beispielsweise die Feldstärke durch Operatoren wiedergegeben werden. In einem ersten Versuch, und in der Tat war dies auch historisch der erste Zugang zur Quantenfeldtheorie, würde man also jedem Raum-Zeit-Punkt $(x,t) \in \mathbb{R}^4$ einen selbstadjungierten Operator $A(x,t)$ auf einem Hilbertraum H zuordnen. Aus physikalischen Gründen muß $A(x,t)$ noch gewisse zusätzliche Eigenschaften haben. Man kann jedoch zeigen, daß es solche Operatoren als wohldefinierte mathematische Objekte nicht gibt. Um die auftretenden singulären Terme in den Griff zu bekommen, muß man $A(x,t)$ (formal) mit einer geeigneten Testfunktion f mitteln oder „verschmieren“:

$$A(f) := \int_{\mathbb{R}^4} f(x,t)A(x,t)\,dx\,dt. \tag{3.1}$$

Es ist also nicht einem einzigen Punkt (x,t) ein Feldoperator zuzuordnen, sondern einer ganzen Funktion f. Dies kann man physikalisch dahingehend deuten, daß sich ein Feld nicht an einem Punkt lokalisieren läßt.

Obwohl im allgemeinen der rechten Seite von (3.1) zunächst nur eine rein formale Bedeutung zukommt, kann man sich daran überlegen, welche Eigenschaften die Abbildung $f \mapsto A(f)$ haben muß. Es ist klar, daß $A(f)$ linear von f abhängt. Berechnet man in (3.1) den adjungierten Operator $(A(f))^*$, so findet man:

$$(A(f))^* = A^*(\bar{f}).$$

Auf unserem Testfunktionenraum muß also eine Konjugation gegeben sein (vgl. Definition 2.11), die wir mit $^-$ bezeichnen:

$$^-\colon f \mapsto \bar{f}.$$

Das motiviert uns zu der folgenden

Definition 3.1 *Sei L ein Prä-Hilbertraum mit einer Konjugation $^{-}: L \to L, f \mapsto \bar{f}$. Seien weiter H ein Hilbertraum und $\mathcal{A}$ eine Menge linearer Operatoren in H. Eine Abbildung $A: L \to \mathcal{A}, f \mapsto A(f)$ heißt operatorwertiges Funktional auf L, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Es gibt einen dichten Unterraum $D \subset H$, so daß für alle $f \in L$ der Operator $A(f)$ auf D definiert ist. Wir nennen D etwas abweichend von der üblichen Terminologie den Definitionsbereich zu A.*

2. *Es gilt:*
$$A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\phi = \alpha_1 A(f_1)\phi + \alpha_2 A(f_2)\phi$$
für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in L$ und $\phi \in D$.

Ein operatorwertiges Funktional A^* mit Definitionsbereich D^* heißt adjungiert zu A, wenn für alle $\phi \in D$, $\psi \in D^*$ und $f \in L$
$$(A(f)\phi, \psi) = (\phi, A^*(\bar{f})\psi)$$
gilt.

Die Dimension $N := \dim L$ wird aus physikalischen Gründen auch als Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet. Zum Fall $N < \infty$ gehört die Theorie des harmonischen Oszillators. $N = \infty$ führt zur Quantenfeldtheorie. Die dort verwendeten Funktionale müssen allerdings noch zusätzlichen Forderungen wie z.B. den Gårding-Wightman-Axiomen genügen. Bei unseren Untersuchungen wird das keine Rolle spielen, so daß wir diesen Punkt übergehen dürfen. Genauere Beschreibungen der Gårding-Wightman-Axiome findet man in [12],[18].

Im weiteren bezeichnet $[\cdot,\cdot]$ den Kommutator zweier Operatoren:
$$[A, B] := AB - BA.$$

In Analogie zu den Poisson-Klammer-Relationen der Hamiltonschen Mechanik führen wir die kanonischen Vertauschungsrelationen ein.

Definition 3.2 *Seien L und H wie in Definition 3.1. L habe das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Ein Paar a, a^* operatorwertiger Distributionen auf L heißt Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen über L, wenn folgendes gilt:*

1. *a und a^* haben denselben Definitionsbereich D, und es ist:*
$$a(f)D \subset D\ ,\ a^*(f)D \subset D.$$

2. *a^* ist das adjungierte Funktional zu a.*

3. $[a(f), a(g)]\phi = 0 = [a^*(f), a^*(g)]\phi$

4. $[a(f), a^*(g)]\phi = (\bar{f}, g)\phi$

für alle $f, g \in L$ und $\phi \in D$. Wir sprechen von einer Fockdarstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen über L, wenn es zusätzlich ein $\Omega \in H$, $\|\Omega\| = 1$, den Vakuumvektor, gibt mit den Eigenschaften:

$$a(f)\Omega = 0 \tag{3.2}$$

für alle $f \in L$ und:

$$D = \mathrm{span}\{a^*(f_{j_n}) \dots a^*(f_{j_1})\Omega \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{3.3}$$

span *bezeichnet wie üblich die lineare Hülle. In diesem Fall nennt man H Fockraum. $a(f)$ heißt Vernichtungs- und $a^*(f)$ Erzeugungsoperator.*

Die Forderung 4. in der vorangehenden Definition 3.2 erscheint auf den ersten Blick etwas unüblich. Beachtet man aber die Definition des adjungierten Funktionals, so folgt:

$$[a(f), (a(g))^*]\phi = [a(f), a^*(\bar{g})]\phi = \overline{(f, g)}\phi.$$

Das ist die allgemein bekannte Form der Vertauschungsrelationen.

Wir gehen nun daran, die Struktur von Fockdarstellungen genauer zu untersuchen, wobei wir uns nur auf die Eigenschaften aus Definition 3.2 stützen. Als erstes notieren wir eine nützliche Formel, die sich sofort aus den kanonischen Vertauschungsrelationen ableiten läßt:

$$a(f)a^*(g_m) \dots a^*(g_1) = a^*(g_m) \dots a^*(g_1)a(f) + \sum_{j=1}^{m} (\bar{f}, g_j) a^*(g_m) \dots \widehat{a^*(g_j)} \dots a^*(g_1). \tag{3.4}$$

Darin meint das Symbol $\hat{}$, daß der entsprechende Operator auszulassen ist. Gleichung (3.3) legt es nahe, die Räume

$$h_n := \mathrm{span}\{a^*(f_n) \dots a^*(f_1)\Omega\} \ , \ n \geq 0 \tag{3.5}$$

einzuführen. Die h_n heißen aus physikalischen Gründen n-Teilchenräume. Es gilt:

Satz 3.3 *Für $m \neq n$ sind die Unterräume h_m und h_n orthogonal zueinander:*

$$h_m \perp h_n \ , \ m \neq n,$$

und es ist:

$$H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n,$$

wobei $H_n = \bar{h}_n$ die Vervollständigung von h_n ist. Wir bezeichnen auch die H_n als n-Teilchenräume.

Beweis: Wir zeigen induktiv die Richtigkeit der folgenden Aussage: Für $0 \leq m < n$ gilt:

$$(a^*(f_n) \dots a^*(f_1)\Omega, a^*(g_m) \dots a^*(g_1)\Omega) = 0.$$

Offensichtlich erhält man hieraus den ersten Teil des Satzes. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar:

$$(a^*(f_1)\Omega, \Omega) = (\Omega, a(\bar{f}_1)\Omega) = 0.$$

Sei die Behauptung bewiesen für ein $n \geq 1$ und alle $0 \leq m < n$. Dann liefert uns (3.4) für beliebiges m, $1 \leq m < n+1$:

$$\begin{aligned}
&(a^*(f_{n+1}) \dots a^*(f_1)\Omega, a^*(g_m) \dots a^*(g_1)\Omega) \\
&\quad = \quad (a^*(f_n) \dots a^*(f_1)\Omega, a(\bar{f}_{n+1})a^*(g_m) \dots a^*(g_1)\Omega) \\
&\quad = \quad (a^*(f_n) \dots a^*(f_1)\Omega, a^*(g_m) \dots a^*(g_1)a(f_{n+1})\Omega) \\
&\quad \qquad + \sum_{j=1}^{m} (f_{n+1}, g_j) \left(a^*(f_n) \dots a^*(f_1)\Omega, a^*(g_m) \dots \widehat{a^*(g_j)} \dots a^*(g_1)\Omega \right) \\
&\quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

Der erste Summand verschwindet wegen $a(\bar{f}_{n+1})\Omega = 0$, der zweite nach Induktionsvoraussetzung wegen $0 \leq m-1 < n$. Den Fall $m = 0$ behandelt man analog zum Induktionsanfang. Das zeigt $h_m \perp h_n$.

Nach Definition 3.2 der Fockdarstellung liegt

$$D = \text{span}\{h_0, h_1, \dots\}$$

dicht in H. Da die H_n natürlich auch paarweise orthogonal zueinander sind, folgt der zweite Teil des Satzes. ■

Aufgrund dieser Zerlegung werden wir im weiteren H auch als Folgenraum auffassen, bestehend aus den Folgen:

$$\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots) \ , \ \ \phi_n \in H_n$$

mit der Eigenschaft:

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\phi_n\|^2 < \infty.$$

Dabei ist das Skalarprodukt im Folgenraum in der üblichen Weise definiert.

Es lassen sich auch weitergehende Aussagen über die Räume h_n bzw. H_n machen. Für unsere Zwecke aber ist Satz 3.3 völlig ausreichend. Als nächstes zeigen wir, daß alle Fockdarstellungen über einem Raum L unitär äquivalent sind.

Satz 3.4 *Seien a_1, a_1^* und a_2, a_2^* zwei Fockdarstellungen über L mit Fockräumen $H^{(1)}, H^{(2)}$ und den Vakua Ω_1, Ω_2. Dann gibt es einen unitären Operator $U : H^{(1)} \to H^{(2)}$ derart, daß*

$$U a_1(f) U^* = a_2(f) \ , \ \ U a_1^*(f) U^* = a_2^*(f)$$

ist für alle $f \in L$.

Beweis: Wir skizzieren die Vorgehensweise. Wegen Satz 3.3 genügt es, die Abbildung U zwischen Vektoren

$$\phi_j := a_j^*(f_n)\dots a_j^*(f_1)\Omega \ , \ j = 1,2$$

gemäß

$$U\phi_1 = \phi_2$$

zu erklären und dann linear fortzusetzen. Der so definierte Operator $U : D_1 \to D_2$ ist bijektiv. Seien ψ_j, $j = 1,2$ analog zu den ϕ_j definiert. Mittels mehrfacher Anwendung der Formel (3.4) rechnet man

$$(U\phi_1, U\psi_1) = (\phi_2, \psi_2) = (\phi_1, \psi_1)$$

nach und sieht daran, daß U isometrisch und damit stetig ist. Wegen $\bar{D}_j = H^{(j)}$ läßt sich U dann zu einem unitären Operator $H^{(1)} \to H^{(2)}$ fortsetzen, der das Gewünschte leistet. ■

Diesen Satz setzt man mit Gewinn ein, wenn es darum geht, sich explizit unitäre Abbildungen des Fockraumes zu verschaffen. Auf diese Weise werden wir in Abschnitt 3.2 die Bogoljubov-Transformationen einführen.

Im weiteren wollen wir uns das Stetigkeits- oder besser Unstetigkeitsverhalten von $a(f)$ und $a^*(f)$ klar machen. Offensichtlich ist:

$$a(f) : h_n \to h_{n-1} \ , \ a^*(f) : h_n \to h_{n+1}.$$

Das erklärt übrigens auch die Namen Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren: $a(f)$ vernichtet ein Teilchen, $a^*(f)$ erzeugt eines. Wir definieren Operatoren

$$a_{n+1,n}(f) : h_{n+1} \to h_n \ , \ a^*_{n,n+1}(f) : h_n \to h_{n+1} \ , \ n \geq 0$$

gemäß:

$$a_{n+1,n}(f) := a(f) \mid_{h_{n+1}} \ , \ a^*_{n,n+1}(f) := a^*(f) \mid_{h_n}$$

sowie:

$$a_{0,-1}(f) : h_0 \to \{0\} \ , \ a^*_{-1,0}(f) := 0.$$

Es ist natürlich $a_{0,-1}(f) = a(f) \mid_{h_0}$. Man sieht leicht:

$$(a_{n,n-1}(f))^* = a^*_{n-1,n}(\bar{f}) \ , \ n \geq 0. \tag{3.6}$$

Die Vertauschungsrelation 4. aus Definition 3.2 schreibt sich:

$$a_{n+1,n}(f)a^*_{n,n+1}(g)\phi - a^*_{n-1,n}(g)a_{n,n-1}(f)\phi = (\bar{f}, g)\phi \tag{3.7}$$

für $\phi \in h_n$. Es zeigt sich, daß die eingeschränkten Operatoren stetig sind. Um das einzusehen, rechnen wir für $\phi \in D$:

$$\begin{aligned}
\|a^*(f)\phi\|^2 &= (a^*(f)\phi, a^*(f)\phi) \\
&= (\phi, a(\bar{f})a^*(f)\phi) \\
&= (\phi,\phi)(f,f) + (\phi, a^*(f)a(\bar{f})\phi) \\
&= \|\phi\|^2\|f\|^2 + \|a(\bar{f})\phi\|^2.
\end{aligned}$$

Also haben wir:

$$\|a^*(f)\phi\|^2 = \|f\|^2\|\phi\|^2 + \|a(\bar{f})\phi\|^2 \tag{3.8}$$

oder mit den eingeschränkten Operatoren formuliert:

$$\|a^*_{n,n+1}(f)\phi\|^2 = \|f\|^2\|\phi\|^2 + \|a_{n,n-1}(\bar{f})\phi\|^2, \tag{3.9}$$

falls $\phi \in h_n$. Nach (3.6) setzt diese Gleichung die Norm (so sie existiert) eines Operators mit der Norm der Adjungierten in Beziehung. Andererseits haben wir folgendes allgemeine Resultat:

Lemma 3.5 *Seien G, H Prä-Hilberträume, $A : G \to H$ ein beschränkter Operator. Dann gilt für den adjungierten Operator $A^* : H \to G$:*

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Beweis: Wir bezeichnen die Skalarprodukte in G und H mit demselben Symbol. Sei $\phi \in H$. Wir rechnen:

$$\|A^*\phi\|^2 = (A^*\phi, A^*\phi) = (\phi, AA^*\phi) \leq \|\phi\| \cdot \|A\| \cdot \|A^*\phi\|.$$

Lassen wir den trivialen Fall $A^*\phi = 0$ beiseite, so folgt:

$$\|A^*\phi\| \leq \|A\| \cdot \|\phi\|.$$

Daraus schließen wir:

$$\|A^*\| \leq \|A\|.$$

Vertauscht man die Rollen von A und A^*, dann erhält man die Behauptung. ■

Jetzt können wir die Stetigkeit von $a_{n,n-1}(f)$ und $a^*_{n-1,n}(f)$ beweisen.

Satz 3.6 *Die Operatoren $a_{n,n-1}(f)$, $a^*_{n-1,n}(f)$, $n \geq 0$ sind beschränkt, und es gilt:*

$$\|a_{n,n-1}(f)\| = \sqrt{n}\|f\| \ , \ \|a^*_{n-1,n}(f)\| = \sqrt{n}\|f\| \ , \ n \geq 0$$

für alle $f \in L$. Mithin lassen sie sich zu stetigen Operatoren auf H_n erweitern, wobei die kanonischen Vertauschungsrelationen erhalten bleiben.

Beweis: Wir schließen induktiv. Für $n = 0$ ist die Behauptung sicher richtig. Sie sei nun bewiesen für ein $n \geq 0$. Aus (3.9) folgt:

$$\|a^*_{n,n+1}(f)\phi\|^2 \leq \|f\|^2\|\phi\|^2 + n\|f\|^2\|\phi\|^2 = (n+1)\|f\|^2\|\phi\|^2,$$

also:

$$\|a^*_{n,n+1}(f)\| \leq \sqrt{n+1}\|f\|.$$

Um die Gleichheit zu zeigen, wählen wir:

$$\phi = (a^*(f))^n\,\Omega \in h_n$$

und erhalten mithilfe von (3.4):

$$\|a^*_{n,n+1}(f)\phi\|^2 = (n+1)\|f\|^2\|\phi\|^2.$$

Lemma 3.5 liefert nun:

$$\|a_{n+1,n}(f)\| = \sqrt{n+1}\|f\|.$$

Das ist die Stetigkeit. Die restlichen Aussagen erhält man sofort aus allgemeinen Sätzen. ■

Eine interessante Folgerung betrifft die Abhängigkeit der $a(f)$, $a^*(f)$ von der Testfunktion f.

Korollar 3.7 *Die Operatoren $a(f)$, $a^*(f)$ hängen stetig von f ab, genauer: Für festes, aber beliebiges $\phi \in D$ sind die (linearen) Abbildungen*

$$\begin{aligned} A_1: \quad & L \to H, \quad f \mapsto a(f)\phi \\ A_2: \quad & L \to H, \quad f \mapsto a^*(f)\phi \end{aligned}$$

stetig.

Beweis: Nach der Definition von D läßt sich ϕ schreiben als:

$$\phi = \sum_{n=0}^{N} \phi_n \ , \ \phi_n \in h_n$$

mit geeignetem $N \in \mathbb{N}_0$. Satz 3.6 liefert:

$$\|A_1 f\| \leq \sum_{n=0}^{N} \sqrt{n}\|f\| \cdot \|\phi_n\| = \left(\sum_{n=0}^{N} \sqrt{n}\|\phi_n\|\right) \|f\|.$$

Bei A_2 geht man entsprechend vor. ■

Satz 3.6 macht es ebenfalls möglich, den Definitionsbereich D von $a(f)$, $a^*(f)$ zu erweitern, indem man setzt:

$$D_0 := \{\phi = (\phi_0, \phi_1, \ldots) \in H \mid \exists N(\phi) : \phi_n = 0 \text{ für } n \geq N(\phi)\}. \tag{3.10}$$

In allen konkreten Fockdarstellungen ist das die kanonische Wahl des Definitionsbereiches. Auf D_0 lassen sich aus $a(f)$, $a^*(f)$ verschiedene symmetrische Operatoren aufbauen, an deren Selbstadjungiertheit man interessiert ist. Wir betrachten hier polynomiale Ausdrücke in den $a(f)$, $a^*(f)$. Die einfachste Klasse bilden die linearen Operatoren:

$$A_1(f) := a(f) + a^*(\bar{f}). \tag{3.11}$$

Linear meint hier: Linear in Erzeugern und Vernichtern. $A_1(f)$ ist der sogenannte Segalsche Feldoperator für das freie Skalarfeld. Man beachte, daß $A_1(f)$ nicht mehr linear von f abhängt. In [12] wird aus A_1 ein operatorwertiges Funktional aufgebaut, das den Gårding-Wightman-Axiomen genügt. Man kann zeigen, daß $A_1(f)$ auf D_0 wegen Satz 3.6 wesentlich selbstadjungiert ist, indem man so ähnlich vorgeht, wie beim Beweis des Satzes 2.16 von Carleman (vgl. [3] und Abschnitt 6.2).

Um Operatoren höherer Ordnung zu erklären, setzen wir ab jetzt voraus, daß L separabel ist und somit ein abzählbares, vollständiges Orthonormalsystem $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ besitzt. Sei:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j.$$

Nach Korollar 3.7 können wir $A_1(f)$ umschreiben zu ($\phi \in D_0$):

$$\begin{aligned} A_1(f)\phi &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j a(e_j)\phi + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\alpha}_j a^*(\bar{e}_j)\phi \\ &=: A_1(\alpha)\phi. \end{aligned}$$

Das motiviert uns für quadratische Operatoren zur

Definition 3.8 *Seien* $\alpha^{(0)} := \left(\alpha^{(0)}_{jk}\right)_{j,k\in\mathbb{N}}$ *und* $\alpha^{(2)} := \left(\alpha^{(2)}_{jk}\right)_{j,k\in\mathbb{N}}$ *Folgen komplexer Zahlen, und es gelte:*

$$\alpha^{(0)}_{jk} = \bar{\alpha}^{(0)}_{kj} \ , \ j,k \in \mathbb{N}.$$

Dann heißt

$$A_2\left(\alpha^{(2)}, \alpha^{(0)}\right) := \sum_{j,k=1}^{\infty} \left(\alpha^{(2)}_{jk} a(e_j)a(e_k) + 2\alpha^{(0)}_{jk} a^*(\bar{e}_j)a(e_k) + \bar{\alpha}^{(2)}_{jk} a^*(\bar{e}_j)a^*(\bar{e}_k)\right)$$

allgemeiner quadratischer Operator.

$A_2(a^{(2)}, \alpha^{(0)})$ ist formal ein symmetrischer Operator. Damit er auf D_0 wohldefiniert ist, sind an $\alpha^{(0)}$ und $\alpha^{(2)}$ gewisse Forderungen zu stellen, die die Konvergenz der unendlichen Reihen garantieren. Falls Konvergenz vorliegt, erweist sich auch $A_2(\alpha^{(2)}, \alpha^{(0)})$ auf D_0 als wesentlich selbstadjungiert (vgl. [3] und 6.2).

Daß in Definition 3.8 keine Terme der Form $a(e_j)a^*(\bar{e}_k)$ vorkommen, hat zweierlei Gründe. Zum einen möchte man, daß die Anwendung dieser Operatoren auf das Vakuum stets 0 ergibt. Zum anderen kann man versuchen, der rechten Seite von (3.1) eine strenge mathematische Bedeutung als quadratische Form zu geben. Dafür müssen aber alle Erzeuger links von allen Vernichtern stehen (vgl. [12]). Das macht auch die folgende Definition kubischer Operatoren einsichtig.

Definition 3.9 *Seien* $\alpha^{(1)} := \left(\alpha^{(1)}_{jkl}\right)_{j,k,l\in\mathbb{N}}$ *und* $\alpha^{(3)} := \left(\alpha^{(3)}_{jkl}\right)_{j,k,l\in\mathbb{N}}$ *Folgen komplexer Zahlen. Dann heißt*

$$\begin{aligned} A_3\left(\alpha^{(3)}, \alpha^{(1)}\right) := \sum_{j,k,l=1}^{\infty} & \left(\alpha^{(3)}_{jkl} a(e_j)a(e_k)a(e_l) + 3\alpha^{(1)}_{jkl} a^*(\bar{e}_j)a(e_k)a(e_l)\right. \\ & \left. +3\bar{\alpha}^{(1)}_{jkl} a^*(\bar{e}_l)a^*(\bar{e}_k)a(e_j) + \bar{\alpha}^{(3)}_{jkl} a^*(\bar{e}_l)a^*(\bar{e}_k)a^*(\bar{e}_j)\right) \end{aligned}$$

allgemeiner kubischer Operator.

Stellt man an $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(3)}$ geeignete Bedingungen, so erhält man wieder einen wohldefinierten, symmetrischen Operator auf D_0. Allerdings versagt hier die bei $A_1(\alpha)$ und $A_2(\alpha^{(2)}, \alpha^{(0)})$ angewandte Methode zum Nachweis der wesentlichen Selbstadjungiertheit. Die Frage, wann der allgemeine kubische Operator wesentlich selbstadjungiert ist und wann nicht, dürfte allerdings nur schwierig zu beantworten sein.

In den vorangehenden Abschnitten wurden schon mehrfach die Wickpotenzen des freien Skalarfeldes angesprochen. Wir wollen kurz anhand der zweiten Wickpotenz darlegen, daß sich diese Operatoren in die Form der Definitionen 3.8 und 3.9 bringen lassen. Dazu sind einige Vorbereitungen nötig. Als erstes müssen wir die n-Teilchenräume angeben. Wir setzen $H_0 = \mathbb{C}$. Sei $m \in \mathbb{R}, m > 0$. In der physikalischen Interpretation ist m die Masse eines bestimmten Elementarteilchens. Dementsprechend wird die Menge

$$V_m^+ := \left\{\xi = (x_0, \ldots, x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = m^2 \ , \ x_0 \geq 0\right\}$$

als Massenhyperboloid bezeichnet. Den Einteilchenraum definieren wir nun durch:

$$H_1 := L^2(V_m^+, d\mu).$$

Dabei ist $d\mu$ das lorentzinvariante Maß auf V_m^+:

$$d\mu(\xi) = \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3}{\sqrt{m^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Die übrigen H_n sind als das n-fache symmetrische Tensorprodukt von H_1 mit sich erklärt. Bekanntlich ist das gleichbedeutend mit:

$$H_n := L_s^2(\underbrace{V_m^+ \times \ldots \times V_m^+}_{n\text{-mal}}, d^n\mu).$$

$d^n\mu$ ist das übliche Produktmaß. Das s erinnert daran, daß $\phi \in H_n$ symmetrisch in den Vektorvariablen ist:

$$\phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \phi(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(n)}) \ , \ \xi_j \in V_m^+$$

für jede Permutation σ von $\{1, \ldots, n\}$.

Wir kommen zu den Operatoren im Fockraum, wobei wir uns auf den Vernichtungsoperator $a(f)$ beschränken. Mit $\mathcal{S}$ bezeichnen wir den Schwartzraum. Seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ und $\phi = (\phi_0, \phi_1, \ldots) \in D_0$. Dann ist $a(f)$ gegeben durch:

$$\left(a(f)\phi\right)_n (\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sqrt{n+1} \int_{V_m^+} \tilde{f}(\eta)\phi_{n+1}(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\mu(\eta). \tag{3.12}$$

$\tilde{f}$ ist die übliche Fouriertransformierte von f in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Aus Bequemlichkeitsgründen weichen wir hier insofern etwas von unserer bisherigen Schreibweise ab, als man eigentlich $a(\tilde{f})$ schreiben müßte. Die zweite Wickpotenz setzt sich aus drei Operatoren zusammen, von denen wir nur den ersten untersuchen:

$$\begin{aligned}
&\left(a_{-2}(f)\phi\right)_n (\xi_1, \ldots, \xi_n) \\
&= \sqrt{(n+2)(n+1)} \int_{V_m^+} \int_{V_m^+} \tilde{f}(\eta_1 + \eta_2)\phi_{n+2}(\eta_1, \eta_2, \xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\mu(\eta_1) d\mu(\eta_2).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Da mit $f \in \mathcal{S}(\mathrm{IR}^4)$ auch $\tilde{f} \in \mathcal{S}(\mathrm{IR}^4)$ ist, überlegt man sich, daß die Funktion $F(\eta_1, \eta_2) := \tilde{f}(\eta_1 + \eta_2)$ quadratintegrierbar in beiden Variablen ist:

$$F \in L_s^2(V_m^+ \times V_m^+, d^2\mu).$$

Man beachte dabei, daß $\eta_1, \eta_2 \in V_m^+$ sind. Sei $\{e_n\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_s^2(V_m^2, d\mu)$. Nach allgemeinen Sätzen (vgl. [11]) können wir F nach den e_n entwickeln:

$$F(\eta_1, \eta_2) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \alpha_{jk} e_j(\eta_1) e_k(\eta_2).$$

Diese Entwicklung setzen wir in (3.13) ein und vertauschen Summation und Integration. Ob das erlaubt ist, soll uns hier nicht weiter beschäftigen:

$$\begin{aligned}
&(a_{-2}(f)\phi)_n\,(\xi_1, \ldots, \xi_n) \\
&\quad = \sum_{j,k=1}^{\infty} \alpha_{jk} \sqrt{n+1} \int_{V_m^+} e_k(\eta_2) \sqrt{n+2} \int_{V_m^+} e_j(\eta_1) \phi_{n+2}(\eta_1, \eta_2, \xi_1, \ldots, \xi_n) d\mu(\eta_1) d\mu(\eta_2).
\end{aligned}$$

Vergleicht man dies mit (3.12), so sieht man, daß sich a_{-2} als quadratische Form in den $a(e_j)$ schreiben läßt und sich damit Definition 3.8 unterordnet. Bei allgemeineren Wickpotenzen geht man entsprechend vor, wobei allenfalls formale Unterschiede auftreten können.

Mit Blick auf unsere weiteren Untersuchungen verlassen wir jetzt den bisherigen allgemeinen Rahmen und geben explizit die Fockdarstellung bei endlich vielen Freiheitsgraden N an. Sei $\{e_j\}_{j=1,\ldots,N}$ wie üblich ein Orthonormalsystem in L. Dann gilt, wie schon mehrfach ausgenutzt:

$$a(f) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j a(e_j) \ , \ a^*(\bar{f}) = \sum_{j=1}^{N} \bar{\alpha}_j a^*(\bar{e}_j).$$

Wir definieren daher:

$$a_j := a(e_j) \ , \ a_j^* := a^*(\bar{e}_j) \ , \ j = 1, \ldots, N \tag{3.14}$$

und notieren noch einmal die kanonischen Vertauschungsrelationen:

$$[a_j, a_k] = 0 = [a_j^*, a_k^*] \ , \ [a_j, a_k^*] = \delta_{jk} \mathbb{1} \tag{3.15}$$

für $j, k = 1, \ldots, N$. δ_{jk} ist das Kroneckersymbol. Die a_j, a_j^* lassen sich als Differentialoperatoren im $L^2(\mathrm{IR}^N)$ realisieren. Es ist:

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \ , \ a_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \ , \ j = 1, \ldots, N, \tag{3.16}$$

wobei $x_1, \ldots, x_N$ die Koordinaten des IR^N sind. Die Vertauschungsrelationen (3.15) rechnet man leicht nach. Der Vakuumvektor Ω ist gegeben durch:

$$\Omega(x) = \frac{1}{\pi^{N/4}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_N^2)}, \tag{3.17}$$

wovon man sich ebenfalls leicht überzeugt. Um den Definitionsbereich D_0 angeben zu können, müssen wir gemäß (3.3) Ausdrücke der Form

$$\left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

berechnen. Das sind gerade bis auf einen Normierungsfaktor die Hermitefunktionen ϕ_k:

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\pi^{N/4}\sqrt{k!}} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^k e^{-\frac{1}{2}x^2} \ , \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.18}$$

Die Polynome

$$p_k(x) = \pi^{1/4} e^{\frac{1}{2}x^2} \phi_k(x) \ , \ k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.19}$$

werden entsprechend als Hermitepolynome bezeichnet. Die ϕ_k bilden bekanntlich ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$. Die Orthogonalität folgt aus Satz 3.3. Für D_0 erhalten wir:

$$D_0 = \mathrm{span}\{p_{j_1}(x_1) \dots p_{j_N}(x_N)\Omega(x) \mid j_1, \dots, j_N \in \mathbb{N}_0\}. \tag{3.20}$$

Wegen $\dim L < \infty$ wird die Unterscheidung von h_n und H_n hinfällig. Da D_0 dicht in $L^2(\mathbb{R}^N)$ liegt, haben wir in der Tat eine Fockdarstellung. Den Fall $N = 1$ werden wir in Abschnitt 3.3 eingehender untersuchen. Eine konkrete Realisierung der Fockdarstellung bei unendlich vielen Freiheitsgraden findet man in [12].

3.2 Bogoljubov-Transformationen

In diesem Abschnitt führen wir unitäre Transformationen von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ein. Wir beschränken uns dabei von vornherein auf den Fall endlich vieler Freiheitsgrade N, da bei unendlich vielen Freiheitsgraden erwartungsgemäß zusätzliche Schwierigkeiten auftreten. Für diesbezügliche Untersuchungen verweisen wir auf [3] und [13].

Sei also gemäß (3.14)

$$a_j \ , \ a_j^* \ , \ j = 1, \dots, N$$

ein Satz von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren im Hilbertraum H. Satz 3.4 legt es nahe, daß man unitäre Transformationen erhält, indem man aus a_j, a_j^* neue Operatoren konstruiert, die wieder die kanonischen Vertauschungsrelationen (3.15) erfüllen. Der einfachste Ansatz besteht in einer Linearkombination:

$$b_j := \sum_{k=1}^{N} s_{jk} a_k + \sum_{k=1}^{N} t_{jk} a_k^* \ , \ b_j^* := \sum_{k=1}^{N} \bar{t}_{jk} a_k + \sum_{k=1}^{N} \bar{s}_{jk} a_k^* \tag{3.21}$$

für $j = 1, \dots, N$ oder in Matrixschreibweise:

$$b = Sa + Ta^* \ , \ b^* = \bar{T}a + \bar{S}a^*$$

mit $S = (s_{jk})$, $T = (t_{jk})$, $b = (b_j)$, $b^* = (b_j^*)$ und a, a^* analog. Die Konjugation von Matrizen ist komponentenweise auszuführen: $\bar{T} = (\bar{t}_{jk})$. Auf die Definitionsbereiche der Operatoren nehmen wir vorerst keine Rücksicht und rechnen rein formal. Zunächst sieht man, daß b_j^* tatsächlich der adjungierte Operator zu b_j ist. S und T müssen nun so gewählt werden, daß b_j, b_j^* die Beziehungen (3.15) erfüllen:

$$\delta_{jl} \overset{!}{=} [b_j, b_l^*]$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\sum_{k=1}^N s_{jk}a_k + \sum_{k=1}^N t_{jk}a_k^*, \sum_{k=1}^N \bar{t}_{lk}a_k + \sum_{k=1}^N \bar{s}_{lk}a_k^*\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^N s_{jk}a_k, \sum_{k=1}^N \bar{s}_{lk}a_k^*\right] - \left[\sum_{k=1}^N \bar{t}_{lk}a_k, \sum_{k=1}^N t_{jk}a_k^*\right] \\
&= \sum_{k=1}^N s_{jk}\bar{s}_{lk} - \sum_{k=1}^N \bar{t}_{lk}t_{jk}
\end{aligned}
$$

sowie:

$$
\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} [b_j, b_l] \\
&= \left[\sum_{k=1}^N s_{jk}a_k + \sum_{k=1}^N t_{jk}a_k^*, \sum_{k=1}^N s_{lk}a_k + \sum_{k=1}^N t_{lk}a_k^*\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^N s_{jk}a_k, \sum_{k=1}^N t_{lk}a_k^*\right] - \left[\sum_{k=1}^N s_{lk}a_k, \sum_{k=1}^N t_{jk}a_k^*\right] \\
&= \sum_{k=1}^N s_{jk}t_{lk} - \sum_{k=1}^N s_{lk}t_{jk}.
\end{aligned}
$$

Der Kommutator $[b_j^*, b_l^*] = 0$ liefert keine neue Forderung an S und T. Es ergibt sich also:

$$SS^* - TT^* = \mathbb{1}\ ,\ ST^T - TS^T = 0. \tag{3.22}$$

Dabei bedeuten * Adjungieren und ^{T} Transponieren von Matrizen. Wir fassen unsere Überlegungen in einer Definition zusammen.

Definition 3.10 *Seien $S = (s_{jk})$, $T = (t_{jk})$ $N \times N$-Matrizen. Gilt*

$$SS^* - TT^* = \mathbb{1} \text{ und } ST^T - TS^T = 0,$$

so heißt die durch

$$a_j \mapsto \sum_{k=1}^N s_{jk}a_k + \sum_{k=1}^N t_{jk}a_k^*\ ,\ a_j^* \mapsto \sum_{k=1}^N \bar{t}_{jk}a_k + \sum_{k=1}^N \bar{s}_{jk}a_k^*\ ,\ j = 1, \ldots, N$$

vermittelte Abbildung die von S und T erzeugte Bogoljubov-Transformation.

In Anlehnung an die klassische Hamiltonsche Mechanik werden Bogoljubov-Transformationen manchmal auch als lineare kanonische Transformationen bezeichnet. Die Bedingung (3.22) läßt sich prägnanter formulieren, wenn man die $2N \times 2N$-Blockmatrizen

$$M := \begin{pmatrix} S & T \\ \bar{T} & \bar{S} \end{pmatrix},\ J := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix},\ K := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

einführt. Dann ist nämlich (3.22) sowohl äquivalent zu:

$$MJM^T = J$$

als auch zu:

$$MKM^* = K.$$

Wegen $J^2 = \mathbb{1}$ und $K^2 = \mathbb{1}$ läßt sich das in die üblichere Gestalt

$$M^T J M = J \tag{3.24}$$

und

$$M^* K M = K \tag{3.25}$$

bringen. Die Matrizen M, die die Bedingungen (3.24) und (3.25) erfüllen, bilden eine Gruppe, die sogenannte reell symplektische Gruppe $Sp(2N, \mathbb{R})$. Äquivalent dazu ist die Forderung, M habe die Gestalt (3.23) und genüge (3.25). Wir sagen, $Sp(2N, \mathbb{R})$ erzeuge die Bogoljubov-Transformation aus Definition 3.10. Im Spezialfall $N = 1$ ist die Bezeichnung $SU(1,1)$ gebräuchlicher als $Sp(2, \mathbb{R})$. M ist dann eine 2×2-Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} s & t \\ \bar{t} & \bar{s} \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

und (3.22) geht in

$$|s|^2 - |t|^2 = 1 \tag{3.27}$$

über.

Bis jetzt sind wir rein formal vorgegangen. Um aus Definition 3.10 eine wohldefinierte unitäre Transformation im Fockraum H zu erhalten, müssen wir etwas zu den Definitionsbereichen von a_j, a_j^* sagen. Man sieht leicht, daß man in der Ortsraumdarstellung (3.16) den Definitionsbereich D_0 erweitern kann zu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. In $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ kann man nun einen Vektor Ω' finden, so daß

$$b_j \Omega' = 0 \ , \ j = 1, \dots, N$$

gilt für die b_j aus (3.21), was in D_0 im allgemeinen nicht möglich ist. Da die b_j, b_j^* nach Konstruktion die kanonischen Vertauschungsrelationen erfüllen, läßt sich Satz 3.4 anwenden, und wir erhalten die unitäre Äquivalenz von a_j, a_j^* und b_j, b_j^*. Dieses Ergebnis, dessen Beweis wir kurz angedeutet haben, ist im wesentlichen der von Neumannsche Eindeutigkeitssatz (vgl. [9]). Wir halten fest:

Satz 3.11 *Seien S und T wie in Definition 3.10. Dann gibt es einen unitären Operator $U(S,T) : H \to H$, so daß*

$$a \mapsto U(S,T) a U(S,T)^* \ , \ a^* \mapsto U(S,T) a^* U(S,T)^*$$

die durch S und T erzeugte Bogoljubov-Transformation ist.

■

3.3 Die Fockdarstellung bei einem Freiheitsgrad

Im weiteren werden wir uns intensiv mit der Fockdarstellung bei einem Freiheitsgrad beschäftigen; d.h. wir haben nur einen Vernichter und einen Erzeuger a, a^*. Wir geben hier die benötigten Formeln für die l^2- und die Ortsraumdarstellung an.

Wir beginnen mit der l^2-Darstellung (vgl. Abschnitt 2.2). Da trivialerweise stets $[a,a] = [a^*,a^*] = 0$ ist, reduzieren sich die Vertauschungsrelationen (3.15) auf:

$$[a,a^*] = \mathbb{1}\,. \tag{3.28}$$

Ebenso vereinfacht sich der Definitionsbereich D_0 (vgl. (3.3)):

$$D_0 = \operatorname{span}\left\{\phi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^*)^n\Omega \mid n \in \mathbb{N}_0\right\}. \tag{3.29}$$

Satz 3.3 entnehmen wir, daß die ϕ_n paarweise orthogonal zueinander sind. Auf ähnliche Weise wie dort sieht man auch $\|\phi_n\| = 1$. Die ϕ_n bilden also ein Orthonormalsystem. Man erhält eine Darstellung im l^2 dadurch, daß man die Wirkung von a, a^* auf die ϕ_n berechnet. Es ist (beachte (3.4) und $a\Omega = 0$):

$$a\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}a(a^*)^n\Omega = \frac{1}{\sqrt{n!}}\Big((a^*)^n a\Omega + n(a^*)^{n-1}\Omega\Big) = \sqrt{n}\phi_{n-1}$$

und:

$$a^*\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}a^*(a^*)^n\Omega = \sqrt{n+1}\phi_{n+1}.$$

Zur Verdeutlichung rechnen wir das ganze für eine Linearkombination $\phi = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k\phi_k \in D_0$:

$$a\phi = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}c_k\phi_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k+1}c_{k+1}\phi_k$$

sowie:

$$a^*\phi = \sum_{k=0}^{n}\sqrt{k+1}c_k\phi_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k}c_{k-1}\phi_k.$$

Im l^2 wirken a, a^* also als Differenzenoperatoren, und D_0 entspricht l_0^2. Sei:

$$\phi = (c_0,\ldots,c_n,0,\ldots) \in l_0^2.$$

Wir finden:

$$\left.\begin{array}{rcll} (a\phi)_k & = & \sqrt{k+1}c_{k+1} & \text{für}\quad k = 0,\ldots,n-1 \\ (a^*\phi)_k & = & \sqrt{k}c_{k-1} & \text{für}\quad k = 1,\ldots,n+1 \end{array}\right\} \tag{3.30}$$

Bei allen anderen Indices erhält man 0. Dieses Ergebnis paßt übrigens zu dem, was wir aus Satz 3.6 über die Normen von a, a^* wissen. Es ist kein Problem, die entsprechenden Formeln für a^2, $(a^*)^2$ u.s.w. anzugeben. Wir verzichten darauf und gehen gleich zu den für uns interessanten linearen, quadratischen und kubischen Operatoren über. Der Bequemlichkeit halber vereinbaren wir für das folgende, daß bei $n < 0$ stets $c_n = 0$ zu setzen ist. Der allgemeine lineare Operator lautet:

$$A_1(\alpha) = \alpha a + \bar{\alpha} a^* \ , \ \alpha \in \mathbb{C}. \tag{3.31}$$

Im l^2 haben wir:

$$(A_1(\alpha)\phi)_n = \alpha\sqrt{n+1}c_{n+1} + \bar{\alpha}\sqrt{n}c_{n-1} \ , \ n \geq 0. \tag{3.32}$$

Für den allgemeinen quadratischen Operator

$$A_2(\alpha_2, \alpha_0) = \alpha_2 a^2 + 2\alpha_0 a^* a + \bar{\alpha}_2 (a^*)^2 \ , \ \alpha_2 \in \mathbb{C}, \alpha_0 \in \mathbb{R} \tag{3.33}$$

ergibt sich:

$$(A_2(\alpha_2, \alpha_0)\phi)_n = \alpha_2\sqrt{(n+1)(n+2)}c_{n+2} + 2\alpha_0 n c_n + \bar{\alpha}_2\sqrt{n(n-1)}c_{n-2} \ , \ n \geq 0. \tag{3.34}$$

Bleibt noch der kubische Fall:

$$A_3(\alpha_3, \alpha_1) = \alpha_3 a^3 + 3\alpha_1 a^* a^2 + 3\bar{\alpha}_1 (a^*)^2 a + \bar{\alpha}_3 (a^*)^3. \tag{3.35}$$

Man erhält:

$$\begin{aligned}(A_3(\alpha_3, \alpha_1)\phi)_n \quad = \quad & \alpha_3\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}c_{n+3} + 3\alpha_1\sqrt{n+1}n c_{n+1} \\ & +3\bar{\alpha}_1\sqrt{n}(n-1)c_{n-1} + \bar{\alpha}_3\sqrt{n(n-1)(n-2)}c_{n-3} \ , \ n \geq 0.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Aus (3.32),(3.34) und (3.36) lassen sich alle später vorkommenden Operatoren gewinnen. Für die Definitionsbereiche der adjungierten Operatoren gelten die Analoga zu Satz 2.14. Etwas lax formuliert, kann man sagen:

$$\phi \in D(A_2(\alpha_2, \alpha_0)^*) \iff A_2(\alpha_2, \alpha_0)^*\phi \in l^2 \tag{3.37}$$

und für $A_3(\alpha_3, \alpha_1)$ entsprechend.

Wir kommen zur Ortsraumdarstellung. Gemäß (3.16) ist:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right) \ , \ a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right). \tag{3.38}$$

Der Definitionsbereich D_0 läßt sich mithilfe der Hermitefunktionen ϕ_n angeben (vgl. (3.18) und (3.20)):

$$D_0 = \operatorname{span}\{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}. \tag{3.39}$$

Wie oben berechnen wir die linearen, quadratischen und kubischen Operatoren. Auf die Definitionsbereiche der adjungierten Operatoren in der Ortsraumdarstellung gehen wir in den Abschnitten ein, in denen sie jeweils benötigt werden.

Für den allgemeinen linearen Operator $A_1(\alpha)$ erhalten wir ohne Schwierigkeiten:

$$A_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\alpha + \bar{\alpha})x + (\alpha - \bar{\alpha})\frac{d}{dx}\right). \tag{3.40}$$

Beim quadratischen Operator $A_2(\alpha_2, \alpha_0)$ rechnen wir zunächst die einzelnen Summanden aus:

$$\left.\begin{aligned}
a^2 &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\left(x + \frac{d}{dx}\right) &&= \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} + \mathbb{1}\right) \\
a^* a &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\left(x + \frac{d}{dx}\right) &&= \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2} - \mathbb{1}\right) \\
(a^*)^2 &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\left(x - \frac{d}{dx}\right) &&= \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} - \mathbb{1}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
&A_2(\alpha_2, \alpha_0) = \\
&\frac{1}{2}\left((\alpha_2 + 2\alpha_0 + \bar{\alpha}_2)x^2 + 2(\alpha_2 - \bar{\alpha}_2)x\frac{d}{dx} + (\alpha_2 - 2\alpha_0 + \bar{\alpha}_2)\frac{d^2}{dx^2} + \alpha_2 - 2\alpha_0 - \bar{\alpha}_2\right).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Für den kubischen Operator $A_3(\alpha_3, \alpha_1)$ rechnen wir in (3.41) weiter:

$$\begin{aligned}
a^3 &= \frac{1}{2^{3/2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\left(x^2 + 2x\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} + \mathbb{1}\right) \\
&= \frac{1}{2^{3/2}}\left(x^3 + 3x^2\frac{d}{dx} + 3x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^3}{dx^3} + 3x + 3\frac{d}{dx}\right) \\
a^* a^2 &= \frac{1}{2^{3/2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\left(x^2 + 2x\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} + \mathbb{1}\right) \\
&= \frac{1}{2^{3/2}}\left(x^3 + x^2\frac{d}{dx} - x\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^3}{dx^3} - x - 3\frac{d}{dx}\right) \\
(a^*)^2 a &= \frac{1}{2^{3/2}}\left(x^2 - 2x\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} - \mathbb{1}\right)\left(x + \frac{d}{dx}\right) \\
&= \frac{1}{2^{3/2}}\left(x^3 - x^2\frac{d}{dx} - x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^3}{dx^3} - 3x + \frac{d}{dx}\right) \\
(a^*)^3 &= \frac{1}{2^{3/2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\left(x^2 - 2x\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} - \mathbb{1}\right) \\
&= \frac{1}{2^{3/2}}\left(x^3 - 3x^2\frac{d}{dx} + 3x\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^3}{dx^3} - 3x + 3\frac{d}{dx}\right).
\end{aligned}$$

Zusammensetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
A_3(\alpha_3, \alpha_1) = \frac{1}{2^{3/2}} &\Big((\alpha_3 + 3\alpha_1 + 3\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3)x^3 + 3(\alpha_3 + \alpha_1 - \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_3)x^2\frac{d}{dx} \\
&+3(\alpha_3 - \alpha_1 - \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3)x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha_3 - 3\alpha_1 + 3\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_3)\frac{d^3}{dx^3} \\
&+3(\alpha_3 - \alpha_1 - 3\bar{\alpha}_1 - \alpha_3)x + 3(\alpha_3 - 3\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3)\frac{d}{dx}\Big).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Durch (3.43) werden alle später auftretenden Fälle abgedeckt. Es ist aber lehrreich, die Spezialfälle $\alpha = -3$ und $\alpha = 1$ (vgl. die Abschnitte 5.3, 5.4) für sich zu untersuchen.

Zunächst zu $\alpha = -3$:

$$A_3(-3,1) = 3(-a^3 + a^*a^2 + (a^*)^2a - (a^*)^3).$$

Wären a,a^* Zahlen, so könnte man hier ausklammern. Das motiviert uns, den folgenden Ausdruck zu betrachten:

$$(a-a^*)(a+a^*)(a-a^*) = a^3 - a^*a^2 - (a^*)^2a + (a^*)^3 - (a+a^*).$$

Also folgt:

$$A_3(-3,1) = -3\left((a-a^*)(a+a^*)(a-a^*) + a + a^*\right) \tag{3.44}$$

und für die Ortsraumdarstellung:

$$A_3(-3,1) = -3\sqrt{2}\left(2x\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + x\right). \tag{3.45}$$

Man sieht aber an der Faktorisierung (3.44), daß es wohl günstiger ist, mit dem fouriertransformierten Operator zu arbeiten; d.h. wir wenden die Bogoljubov-Transformation $U(i,0)$ an:

$$\begin{aligned} U(i,0)A_3(-3,1)U(i,0)^* &= -3\left(i^3(a+a^*)(a-a^*)(a+a^*) + i(a-a^*)\right) \\ &= -3i\left(-(a+a^*)(a-a^*)(a+a^*) + a - a^*\right). \end{aligned}$$

Dann heben sich nämlich mehr Ableitungen weg als vorher. Wir erhalten also im Ortsraum:

$$U(i,0)A_3(-3,1)U(i,0)^* = -3\sqrt{2}i\left(-2x - 2x^2\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}\right). \tag{3.46}$$

Wir kommen zum Fall $\alpha = 1$. Hier rechnet man sofort die Faktorisierung

$$A_3(1,1) = \left((a+a^*)^2 - 3\right)(a+a^*) \tag{3.47}$$

nach. Im Ortsraum fallen somit sämtliche Ableitungen weg, und wir haben einen reinen Multiplikationsoperator vor uns:

$$A_3(1,1) = \sqrt{2}(2x^2 - 3)x. \tag{3.48}$$

Das Polynom ist bis auf eine Konstante das dritte Hermitepolynom p_3.

Kapitel 4

Normalformen für kubische Operatoren

4.1 Grundidee

Ziel dieses Kapitels ist es, den Operator

$$A_3(\alpha_3,\alpha_1) = \alpha_3 a^3 + 3\alpha_1 a^* a^2 + 3\bar{\alpha}_1 (a^*)^2 a + \bar{\alpha}_3 (a^*)^3 \tag{4.1}$$

unitär auf gewisse Normalformen zu transformieren, die einfacher zu untersuchen sind als (4.1) selbst. Im weiteren unterdrücken wir den Index 3 bei A_3 und schreiben einfach $A(\alpha_3,\alpha_1)$. Auf welche Normalform (4.1) reduzierbar ist, wird natürlich von der Wahl der Koeffizienten α_1, α_3 abhängen. Da die Normalformen (fast alle) unterschiedliche Defektindices haben, ergibt sich so auf natürliche Weise, inwieweit der Defekt von $A(\alpha_3,\alpha_1)$ durch α_1,α_3 bestimmt wird. Als erstes sehen wir, daß man nicht zwischen positivem und negativem Defektindex zu unterscheiden braucht, so daß wir fortan von **dem** Defektindex sprechen werden.

Lemma 4.1 *Für den Operator (4.1) stimmen positiver und negativer Defektindex überein; d.h. die Gleichung*

$$A(\alpha_3,\alpha_1)^*\phi = \lambda\phi\ ,\ \operatorname{Im}\lambda \neq 0 \tag{4.2}$$

hat für alle λ mit $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ dieselbe Anzahl linear unabhängiger Lösungen.

Beweis: Wir benutzen die Bogoljubov-Transformation $U(-1,0)$ (vgl. Abschnitt 3.2):

$$U(-1,0)A(\alpha_3,\alpha_1)^*U(-1,0)^* = A(-\alpha_3,-\alpha_1)^* = -A(\alpha_3,\alpha_1)^*.$$

Damit folgt aus (4.2):

$$A(\alpha_3,\alpha_1)^*U(-1,0)\phi = -\lambda U(-1,0)\phi$$

und daraus die Behauptung. ■

Es zeigt sich weiter, daß die Selbstadjungiertheit von (4.1) nicht von α_1 und α_3 getrennt abhängt, sondern gewissermaßen vom Verhältnis der beiden; genauer:

Lemma 4.2 *Sei $\alpha_1 \neq 0$. Dann hat der Operator*

$$A(\alpha,1) = \alpha a^3 + 3a^*a^2 + 3(a^*)^2 a + \bar{\alpha}(a^*)^3$$

mit $\alpha := \dfrac{\alpha_3\bar{\alpha}_1}{\alpha_1^2}$ *denselben Defektindex wie (4.1)*

Beweis: Wir wenden eine geeignete Bogoljubov-Transformation an (vgl. Abschnitt 3.2).

$$\begin{aligned} U\left(\frac{\bar{\alpha}_1}{|\alpha_1|},0\right) A(\alpha_3,\alpha_1) U\left(\frac{\bar{\alpha}_1}{|\alpha_1|},0\right)^* &= A\left(\frac{\alpha_3\bar{\alpha}_1^3}{|\alpha_1|^3},|\alpha_1|\right) \\ &= |\alpha_1| A\left(\frac{\alpha_3\bar{\alpha}_1}{\alpha_1^2},1\right) \end{aligned}$$

Da der Defektindex in der oberen bzw. unteren Halbebene konstant ist (vgl. 2.10), können wir die Gleichung

$$|\alpha_1| A\left(\frac{\alpha_3\bar{\alpha}_1}{\alpha_1^2},1\right)\phi = \lambda\phi \ , \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0$$

durch $|\alpha_1|$ teilen, ohne am Defekt etwas zu verändern. Das war zu zeigen. ■

Gemäß dem vorangehenden Lemma 4.2 werden wir unsere weiteren Untersuchungen auf den Operator $A(\alpha,1)$ beschränken. Operatoren mit $\alpha_1 = 0$ werden in Abschnitt 5.2 behandelt. Um $A(\alpha,1)$ auf Normalform zu bringen, ziehen wir allgemeine Bogoljubov-Transformationen $U(s,t)$ heran. Zur Erinnerung: Die $U(s,t)$ werden im vorliegenden Fall eines Freiheitsgrades durch die Gruppe $SU(1,1)$ erzeugt mit:

$$\begin{aligned} U(s,t)aU(s,t)^* &= sa + ta^* \\ U(s,t)a^*U(s,t)^* &= \bar{t}a + \bar{s}a^* \end{aligned}$$

und $|s|^2 - |t|^2 = 1$. Wegen der Vertauschungsrelation $[a,a^*] = \mathbb{1}$ (vgl. 3.28) verhält sich der kubische Teil von $A(\alpha,1)$ wie eine kubische Form aus (komplexen) Zahlen, die man einer linearen Transformation unterwirft. Die Nichtkommutativität schlägt sich in linearen Zusatztermen nieder:

$$U(s,t)A(\alpha,1)U(s,t)^* = A(\tilde{\alpha}_3,\tilde{\alpha}_1) + ra + \bar{r}a^* \ , \ r \in \mathbb{C}. \tag{4.3}$$

Wir ersetzen formal:

$$a \to x \ , \ a^* \to y$$

und sehen, daß das Normalformenproblem beim Operator (4.1) äquivalent ist zu der folgenden Aufgabe:

Transformiere die kubische Form

$$\alpha x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + \bar{\alpha}y^3 \tag{4.4}$$

mittels einer $SU(1,1)$ Abbildung

$$B = \begin{pmatrix} s & t \\ \bar{t} & \bar{s} \end{pmatrix} \ , \ \det B = 1$$

auf eine möglichst einfache Gestalt.

Um das durchführen zu können, müssen wir noch einen Schritt weitergehen. Für $y \neq 0$ folgt aus (4.4):

$$\begin{aligned} \alpha x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + \bar{\alpha} y^3 &= y^3 \left(\alpha \left(\frac{x}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) + \bar{\alpha} \right) \\ &= y^3\, p_\alpha(z), \end{aligned} \tag{4.5}$$

wobei wir $z := \frac{x}{y}$ und

$$p_\alpha(z) := \alpha z^3 + 3z^2 + 3z + \bar{\alpha} \tag{4.6}$$

gesetzt haben. Die neue Variable z transformiert sich wie folgt:

$$z \mapsto \frac{sx+ty}{\bar{t}x+\bar{s}y} = \frac{s\frac{x}{y}+t}{\bar{t}\frac{x}{y}+\bar{s}} = \frac{sz+t}{\bar{t}z+\bar{s}}. \tag{4.7}$$

Wir haben somit eine Darstellung von $SU(1,1)$ durch gebrochen lineare Transformationen erhalten. Wir schreiben:

$$h_B z = \frac{sz+t}{\bar{t}z+\bar{s}} \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} s & t \\ \bar{t} & \bar{s} \end{pmatrix}.$$

Die $h_B, B \in SU(1,1)$ sind bekanntlich Elemente der Automorphismengruppe $Aut(X_+)$ des Einheitskreises $X_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (vgl.[6]; die unkonventionelle Bezeichnung wird gleich verständlich werden). Darüberhinaus lassen sie die Mengen

$$X_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}\ ,\ X_- := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$$

invariant. Dies folgt aus:

$$1 - |z|^2 \mapsto 1 - \frac{|sz+t|^2}{|\bar{t}z+\bar{s}|^2} = \frac{(|t|^2-|s|^2)|z|^2 + |s|^2 - |t|^2}{|\bar{t}z+\bar{s}|^2} = \frac{1-|z|^2}{|\bar{t}z+\bar{s}|^2}.$$

Unter h_B geht (4.6) in eine rationale Funktion über:

$$p_\alpha(z) \mapsto \frac{q(z)}{(\bar{t}z+\bar{s})^3} = R(z)$$

mit einem Polynom q. Wir gelangen von R zurück zur kubischen Form (4.4), indem wir $z = \frac{x}{y}$ beachten und (4.7) und (4.5) rückwärts rechnen. Die Koeffizienten von (4.4) sind also genau die entsprechenden Koeffizienten von q. Da, wie man aus der Funktionentheorie weiß, durch h_B eine biholomorphe Abbildung der Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ auf sich selbst gegeben wird, macht auch der Fall $y = 0$ keine Schwierigkeiten mehr, er entspricht $z = \infty$. Die Transformation von p_α in eine rationale Funktion R mit vorgegebenem Zählerpolynom q ist jetzt (im Prinzip) kein Problem mehr. Die Polynome p_α und q sind bis auf einen Faktor $c \neq 0$ eindeutig bestimmt durch ihre Nullstellen z_1, z_2, z_3 bzw. w_1, w_2, w_3. Aufgrund der besonderen Form der Koeffizienten, die von der Transformation h_B respektiert wird, muß $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sein. Wenn es nun gelingt, die z_j durch ein geeignetes $h_B \in Aut(X_+)$ auf die w_j abzubilden, haben wir p_α und letztlich auch unseren Operator $A(\alpha, 1)$ auf eine vorgeschriebene Normalform gebracht. Diese Idee wird in 4.2 und 4.3 ausgeführt werden.

Man könnte gegen die oben beschriebene Methode einwenden, daß es auch möglich sein sollte, direkt mit (4.4) zu arbeiten. In der Tat wird dies in der allgemeinen Theorie kubischer Formen auch getan (vgl. [7]). Man bedient sich dort einer geometrischen Sprechweise im $\mathbb{C}^2$. Allerdings sind beliebige Koeffizienten zugelassen und dementsprechend auch beliebige Transformationen aus $GL(2, \mathbb{C})$. Die Wirkung von $SU(1,1)$ im $\mathbb{C}^2$ ist nicht so übersichtlich wie die von $Aut(X_+)$ in $\mathbb{C}$, und es ist nicht ohne weiteres klar, was die spezielle Form (4.4) (geometrisch) von einer allgemeinen kubischen Form unterscheidet. Aus diesen Gründen scheint die übliche Methode für unsere Zwecke nicht besonders geeignet zu sein. Wir bemerken aber, daß die Diskriminante von p_α, die im folgenden eine entscheidende Rolle spielen wird, eine Invariante der kubischen Form (4.4) bzgl. $SL(2, \mathbb{C})$-Transformationen ist. Bei der Untersuchung allgemeiner kubischer Operatoren (vgl. Definition 3.9) kann dies durchaus von Bedeutung sein.

4.2 Die Nullstellen von $\alpha z^3 + 3z^2 + 3z + \bar{\alpha}$

Aus den Überlegungen in 4.1 folgt, daß es wichtig ist, die Nullstellenverteilung des Polynoms (4.6)

$$p_\alpha(z) = \alpha z^3 + 3z^2 + 3z + \bar{\alpha}\ ,\ \ \alpha \in \mathbb{C}$$

zu kennen. Wir können $\alpha \neq 0$ und damit $p_\alpha(0) \neq 0$ voraussetzen. Da im allgemeinen $\alpha \notin \mathbb{R}$ ist, können wir nicht unmittelbar die Diskriminante zur Untersuchung der Nullstellen heranziehen. Es wäre möglich, mittels einer Cayley-Transformation

$$z \mapsto Cz = \frac{-iz + i}{z + 1}$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten zu erhalten. Dabei hat man allerdings die Fälle $\operatorname{Im} \alpha = 0$ bzw. $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$ getrennt zu behandeln, was mit der eigentlichen Problemstellung nichts zu tun hat; wir ziehen deshalb direkte Rechnungen mit der Diskriminante vor.

Zunächst bemerkt man, daß mit z auch $1/\bar{z}$ eine Nullstelle von p_α ist:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{1}{\bar{z}^3} + 3\frac{1}{\bar{z}^2} + 3\frac{1}{\bar{z}} + \bar{\alpha} &= \frac{1}{\bar{z}^3}(\alpha + 3\bar{z} + 3\bar{z}^2 + \bar{\alpha}\bar{z}^3) \\ &= \frac{1}{\bar{z}^3}\overline{(\bar{\alpha} + 3z + 3z^2 + \alpha z^3)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Weiter gilt nach dem Satz von Vieta für die Nullstellen z_1, z_2, z_3 von p_α:

$$z_1 z_2 z_3 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \tag{4.8}$$

und damit:

$$|z_1||z_2||z_3| = 1.$$

Wir können so das folgende Lemma beweisen.

Lemma 4.3 *Für die Lösungen z_1, z_2, z_3 von*

$$\alpha z^3 + 3z^2 + 3z + \bar{\alpha} = 0 \ , \ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

gilt genau einer der folgenden Fälle:

1. $|z_j| = 1 \ , \ j = 1, 2, 3$
2. $|z_1| = 1, |z_2| \neq 1, z_3 = 1/\bar{z}_2$ *(bis auf Permutation der z_j)*

Beweis: Falls 1. nicht zutrifft, ist o.B.d.A. $|z_2| \neq 1$ und somit $z_2 \neq 1/\bar{z}_2$. Es folgt:

$$1 = |z_1|\,|z_2|\,\frac{1}{|\bar{z}_2|} = |z_1|,$$

was zu zeigen war. ■

Um zu unterscheiden, welcher der Fälle aus dem Lemma 4.3 bei gegebenem α vorliegt, betrachten wir die Diskriminante von p_α (vgl. [16]):

$$D(\alpha) := \alpha^4 W(\alpha)^2 \ , \ W(\alpha) := (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3).$$

$D(\alpha)$ läßt sich allein durch die Koeffizienten von p_α ausdrücken. Man findet:

$$D(\alpha) = 27(-|\alpha|^4 + 6|\alpha|^2 - 4(\alpha + \bar{\alpha}) + 3).$$

Es ist also stets $D(\alpha) \in \mathbb{R}$. Das legt die Vermutung nahe, daß sich die Fälle 1. und 2. in Lemma 4.3 durch das Vorzeichen von $D(\alpha)$ unterscheiden lassen. Das bestätigt man, indem man $W(\alpha)$ berechnet:

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= z_1^2 z_2 - z_1^2 z_3 - z_1 z_2 z_3 + z_1 z_3^2 - z_1 z_2^2 + z_1 z_2 z_3 + z_2^2 z_3 - z_2 z_3^2 \\ &= z_1 z_2 z_3 \left(z_1 \frac{1}{z_3} - z_1 \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_2} z_3 - z_2 \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1} z_2 - \frac{1}{z_1} z_3 \right). \end{aligned}$$

Im Fall 1. ergibt sich hieraus ($1/z_j = \bar{z}_j$):

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\left((z_1\bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_3) + (\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2) + (\bar{z}_2 z_3 - z_2 \bar{z}_3)\right) \\ &= -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} 2i \,\mathrm{Im}\,(z_1 \bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3), \end{aligned} \tag{4.9}$$

also:

$$D(\alpha) = -4|\alpha|^4 \left(\mathrm{Im}\,(z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3)\right)^2 \le 0.$$

Bei 2. dagegen hat man ($1/z_1 = \bar{z}_1, z_3 = 1/\bar{z}_2$):

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\left((z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) - (z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3) + |z_3|^2 - |z_2|^2\right) \\ &= -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\left(2\mathrm{Re}\, z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) + |z_3|^2 - |z_2|^2\right) \end{aligned}$$

und damit:

$$D(\alpha) = |\alpha|^4 \left(2\mathrm{Re}\, z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) + |z_3|^2 - |z_2|^2\right)^2 > 0.$$

Wir halten fest:

Satz 4.4 *Für die Lösungen z_1, z_2, z_3 der Gleichung*

$$\alpha z^3 + 3z^2 + 3z + \bar{\alpha} = 0 \ , \ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

sind je nach dem Vorzeichen der Diskriminante

$$D(\alpha) = 27(-|\alpha|^4 + 6|\alpha|^2 - 4(\alpha + \bar{\alpha}) + 3)$$

genau zwei Fälle möglich:

1. *Falls $D(\alpha) \leq 0$: Alle Lösungen liegen auf dem Einheitskreis X_0. Falls $D(\alpha) = 0$ ist, gibt es mehrfache Nullstellen.*

2. *Falls $D(\alpha) > 0$: Es ist $|z_1| = 1$ und $|z_2| < 1$, $z_3 = 1/\bar{z}_2$ (bis auf Permutationen).*

∎

4.3 Transformation von $\alpha z^3 + 3z^2 + 3z + \bar{\alpha}$ auf Normalform

Wir beginnen mit dem Fall dreier einfacher Nullstellen z_1, z_2, z_3 auf dem Einheitskreis. Als einfache Normalform für p_α ist

$$\frac{z^3 + 1}{(\bar{t}z + \bar{s})^3}.$$

möglich. Die Nullstellen von $z^3 + 1$ sind bekanntlich $-1, \theta, \bar{\theta}$ mit $\theta = e^{i\pi/3} = (1 + i\sqrt{3})/2$. Wir müssen also eine gebrochen lineare Transformation h

$$z \mapsto w = hz = \frac{sz + t}{\bar{t}z + \bar{s}} \ , \ |s|^2 - |t|^2 = 1 \tag{4.10}$$

finden derart, daß die Nullstellen von p_α auf die von $z^3 + 1$ abgebildet werden:

$$z_1 \mapsto -1, z_2 \mapsto \theta, z_3 \mapsto \bar{\theta}.$$

Wir zerlegen das Problem in zwei Teilschritte. Zunächst geben wir eine Transformation h_1 an mit:

$$z_1 \mapsto 0, z_2 \mapsto 1, z_3 \mapsto \infty.$$

Das ist in kanonischer Weise möglich. Danach bilden wir analog h_2 mit:

$$\theta \mapsto 0, -1 \mapsto 1, \bar{\theta} \mapsto \infty.$$

Die Abbildung $h_2^{-1}h_1$ leistet dann das Gewünschte. Da nach allgemeinen Sätzen (vgl. [6]) eine gebrochen lineare Transformation durch die Vorgabe dreier Bildpunkte eindeutig festgelegt ist, ist $h_2^{-1}h_1$ der einzig mögliche Kandidat und sollte daher von der Form (4.10) sein, was zum Schluß gezeigt wird.

h_1 ist gegeben durch:

$$h_1 z = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

mit der zugehörigen Matrix:

$$h_1 \sim \begin{pmatrix} z_2 - z_3 & z_1(z_3 - z_2) \\ z_2 - z_1 & z_3(z_1 - z_2) \end{pmatrix}.$$

Durch das $\sim$ deuten wir an, daß h_1 durch die entsprechende Matrix erzeugt wird. Man beachte, daß diese Zuordnung nur bis auf die Multiplikation mit einer Diagonalmatrix eindeutig ist. Entsprechend ist für h_2:

$$h_2 z = \frac{z-\theta}{z-\bar{\theta}} \frac{1+\bar{\theta}}{1+\theta} = \frac{(1+\bar{\theta})z - (1+\theta)}{(1+\theta)-(1+\bar{\theta})} = \frac{-\theta z - \bar{\theta}}{\bar{\theta} z + \theta}$$

mit der Matrix:

$$h_2 \sim \begin{pmatrix} -\theta & -\bar{\theta} \\ \bar{\theta} & \theta \end{pmatrix}.$$

h_2^{-1} wird erzeugt von der inversen Matrix (bis auf einen Faktor):

$$h_2^{-1} \sim \begin{pmatrix} \theta & \bar{\theta} \\ -\bar{\theta} & -\theta \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} h_2^{-1} h_1 &\sim \begin{pmatrix} \theta & \bar{\theta} \\ -\bar{\theta} & -\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 - z_3 & -z_1(z_2 - z_3) \\ z_2 - z_1 & -z_3(z_2 - z_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\bar{\theta} z_1 + (\theta+\bar{\theta}) z_2 - \theta z_3 & -\theta z_1 z_2 + (\theta+\bar{\theta}) z_1 z_3 - \bar{\theta} z_2 z_3 \\ \theta z_1 - (\theta+\bar{\theta}) z_2 + \bar{\theta} z_3 & \bar{\theta} z_1 z_2 - (\theta+\bar{\theta}) z_1 z_3 + \theta z_2 z_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Die Produkte $z_1 z_2, z_1 z_3, z_2 z_3$ können wir mithilfe von (4.8) umformen:

$$z_1 z_2 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \frac{1}{z_3} = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \bar{z}_3.$$

Der letzte Schritt ist richtig wegen $|z_3| = 1$. Für die anderen Produkte erhält man Entsprechendes. Unsere Transformation schreibt sich nun:

$$\begin{aligned} h_2^{-1} h_1 &\sim \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} \alpha(-\bar{\theta} z_1 + (\theta+\bar{\theta}) z_2 - \theta z_3) & \bar{\alpha}(\theta \bar{z}_3 - (\theta+\bar{\theta}) \bar{z}_2 + \bar{\theta} \bar{z}_1) \\ \alpha(\theta z_1 - (\theta+\bar{\theta}) z_2 + \bar{\theta} z_3) & \bar{\alpha}(-\bar{\theta} \bar{z}_3 + (\theta+\bar{\theta}) \bar{z}_2 - \theta \bar{z}_1) \end{pmatrix} \\ &=: \frac{1}{\alpha^2} M. \end{aligned}$$

Die Matrix M ist also schon von der Form (4.10). Die Determinante berechnet man am bequemsten über (4.11):

$$\det M = \alpha^2 \det \begin{pmatrix} \theta & \bar{\theta} \\ -\bar{\theta} & -\theta \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} z_2 - z_3 & -z_1(z_2 - z_3) \\ z_2 - z_1 & -z_3(z_2 - z_1) \end{pmatrix}.$$

Wegen $\theta^3 = -1$ ist:

$$\begin{vmatrix} \theta & \bar\theta \\ -\bar\theta & -\theta \end{vmatrix} = -\theta^2 + \bar\theta^2 = \bar\theta - \theta = -2i\,\mathrm{Im}\,\theta = -i\sqrt{3}.$$

Die zweite Determinante ist fast ebenso einfach:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} z_2 - z_3 & -z_1(z_2 - z_3) \\ z_2 - z_1 & -z_3(z_2 - z_1) \end{vmatrix} &= (z_2 - z_3)(z_2 - z_1)(z_1 - z_3) \\ &= 2i\frac{\bar\alpha}{\alpha}\,\mathrm{Im}\,(z_1\bar z_3 + \bar z_1 z_2 + \bar z_2 z_3), \end{aligned}$$

wobei wir (4.9) benutzt haben. Insgesamt haben wir:

$$\det M = 2\sqrt{3}|\alpha|\mathrm{Im}\,(z_1\bar z_2 + \bar z_1 z_2 + \bar z_2 z_3).$$

Durch eine geeignete Umbenennung der z_j kann man stets $\mathrm{Im}\,(z_1\bar z_3 + \bar z_1 z_2 + \bar z_2 z_3) > 0$ erreichen, so daß $\sqrt{\det M} \in \mathbb{R}$ ist. Die gebrochen lineare Transformation, die von der normierten Matrix

$$\tilde M := \frac{1}{\sqrt{\det M}} M$$

erzeugt wird, erfüllt dann (4.10). Wir halten fest:

Satz 4.5 *Die drei paarweise verschiedenen Punkte $z_1, z_2, z_3 \in X_0$ lassen sich (nach einer geeigneten Umnummerierung) durch die Transformation $h_{\tilde M} \in Aut(X_+)$ auf $-1, \theta, \bar\theta$ abbilden. Die Einträge von $\tilde M$ sind gegeben durch:*

$$s = -\frac{\alpha}{\sqrt{\det M}}(\bar\theta z_1 - z_2 + \theta z_3)\ ,\ t = \frac{\bar\alpha}{\sqrt{\det M}}(\bar\theta \bar z_1 - \bar z_2 + \theta \bar z_3).$$

■

Die Koeffizienten s und t lassen sich durch α allein ausdrücken. Für $\det M$ ist das klar. Die Klammerausdrücke sind im wesentlichen die sogenannten Lagrangeschen Resolventen (vgl. [16]), die sich auch mittels der Diskriminante und α berechnen lassen. Da für uns die Existenz von s und t genügt, gehen wir darauf nicht näher ein. Für unser Polynom p_α folgt aus dem vorigen Satz:

Korollar 4.6 *Für $D(\alpha) < 0$ läßt sich das Polynom p_α durch einen Automorphismus des Einheitskreises auf die Form $c \cdot \dfrac{z^3 + 1}{(\bar t z + \bar s)^3}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bringen.*

■

Auch die Fälle mit verschwindender Diskriminante sind eine einfache Folgerung aus Satz 4.5.

Korollar 4.7 *Für das Polynom p_α sei $D(\alpha) = 0$. Dann gilt:*

1. *Bei einer doppelten und einer einfachen Nullstelle in X_0 läßt sich p_α auf die Form* $c \cdot \dfrac{z^3 - z^2 - z + 1}{(\bar{t}z + \bar{s})^3}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *transformieren.*

2. *Bei einer dreifachen Nullstelle ist die Normalform* $c \cdot \dfrac{z^3 + 3z^2 + 3z + 1}{(\bar{t}z + \bar{s})^3}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *erreichbar.*

Beweis: Zu 1.: p_α habe die Nullstellen z_1, z_2. Nach Satz 4.5 können sie auf $-1, \theta$ abgebildet werden. Dasselbe gilt für unsere vorgeschriebenen Bildpunkte $-1, 1$. Die Behauptung ergibt sich nun aus der Gruppenstruktur von $Aut(X_+)$.
Zu 2.: Dieser Fall ordnet sich 1. unter. Ein Polynom mit einer dreifachen Nullstelle auf X_0 hat aber schon die vorgeschriebene Form, was aus dem Verschwinden der quadratischen Diskriminante folgt (vgl. [16]):

$$4(1 - \alpha) = 0.$$

Also $\alpha = 1$. ■

Für das Polynom p_α gelte nun Fall 2. aus Satz 4.4. Als einfachste Form bietet sich

$$\frac{z^2 + z}{(\bar{t}z + \bar{s})^3}$$

an. Dazu müssen wir die Punkte $z_1, z_2, 1/\bar{z}_2$ nach $-1, 0, \infty$ transformieren. Aufgrund der besonderen Wahl der Bildpunkte fallen die beiden Teilschritte aus dem vorangehenden Fall praktisch zusammen. Wir können die Transformation sofort angeben:

$$\begin{aligned} h : z \mapsto w &= -\frac{z - z_2}{z - 1/\bar{z}_2} \frac{z_1 - 1/\bar{z}_2}{z_1 - z_2} \\ &= \frac{z - z_2}{-\bar{z}_2 z + 1} \frac{z_1 \bar{z}_2 - 1}{z_1 - z_2}. \end{aligned}$$

Für den rechten Faktor finden wir wegen $|z_1| = 1$:

$$\left| \frac{z_1 \bar{z}_2 - 1}{z_1 - z_2} \right| = \frac{|z_1 \bar{z}_2 - z_1 \bar{z}_1|}{|z_1 - z_2|} = 1.$$

Er läßt sich also schreiben als:

$$\frac{z_1 \bar{z}_2 - 1}{z_1 - z_2} = e^{i\tau} \ , \ \tau \in [0, 2\pi[.$$

Damit folgt:

$$w = \frac{z - z_2}{-\bar{z}_2 z + 1} e^{i\tau} = \frac{e^{i\tau/2} z - e^{i\tau/2} z_2}{-e^{-i\tau/2} \bar{z}_2 z + e^{-i\tau/2}}.$$

Die Transformation h hat mithin die Form (4.10). Um die richtige Normierung zu erreichen, berechnen wir die Determinante der zugehörigen Matrix:

$$\begin{vmatrix} e^{i\tau/2} & -e^{i\tau/2} z_2 \\ -e^{-i\tau/2} \bar{z}_2 & e^{-i\tau/2} \end{vmatrix} = 1 - |z_2|^2 > 0,$$

da $|z_2| < 1$ ist. Der Normierungsfaktor ist $(1 - |z_2|^2)^{1/2} \in \mathbb{R}$. Es folgt:

Satz 4.8 *Es gelte* $|z_1| = 1$ *und* $0 < |z_2| < 1$*. Dann lassen sich die Punkte* $z_1, z_2, 1/\bar{z}_2$ *durch einen Automorphismus des Einheitskreises auf* $-1, 0, \infty$ *abbilden. Die Einträge der zugehörigen Matrix lauten:*

$$s = \frac{1}{(1-|z_2|^2)^{1/2}} \left(\frac{z_1 \bar{z}_2 - 1}{z_1 - z_2} \right)^{1/2} \quad , \; t = -\frac{z_2}{(1-|z_2|^2)^{1/2}} \left(\frac{z_1 \bar{z}_2 - 1}{z_1 - z_2} \right)^{1/2} .$$

■

Korollar 4.9 *Für das Polynom* p_α *gelte* $D(\alpha) > 0$*. Dann läßt es sich durch einen Automorphismus des Einheitskreises auf die Gestalt* $c \cdot \dfrac{z^2 + z}{(\bar{t}z + \bar{s})^3}$ *,* $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *bringen.*

■

Zur besseren Übersicht formulieren wir unsere Ergebnisse abschließend für die Form (4.4):

Satz 4.10 *Seien*

$$D(\alpha) = 27 \left(-|\alpha|^4 + 6|\alpha|^2 - 4(\alpha + \bar{\alpha}) + 3 \right)$$

die kubische Diskriminante und

$$Q(\alpha) = 4(1 - \alpha)$$

die quadratische Diskriminante der kubischen Form (4.4). Dann läßt sich (4.4) durch lineare Transformationen aus $SU(1,1)$ *auf eine der folgenden Normalformen bringen:*

1. $D(\alpha) < 0 : x^3 + y^3$
2. $D(\alpha) = 0, Q(\alpha) \neq 0 : x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$
3. $D(\alpha) = 0, Q(\alpha) = 0$*(d.h.* $\alpha = 1$*)* $: x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
4. $D(\alpha) > 0 : x^2y + xy^2$

■

Dieses Ergebnis läßt sich leicht auf den Operator $A(\alpha, 1)$ aus (4.1) übertragen. Dazu wählt man in der Bogoljubov-Transformation $U(s,t)$ die Koeffizienten s und t genau wie in der $SU(1,1)$-Transformation aus dem obigen Satz. Dadurch wird $A(\alpha, 1)$ auf die entsprechende Normalform transformiert, wobei allerdings die linearen Zusatzterme zu beachten sind (vgl. (4.3)). Um uns im weiteren bequem ausdrücken zu können, geben wir den verschiedenen Fällen aus Satz 4.10 Namen. Die Gründe für die Namenswahl sind offensichtlich.

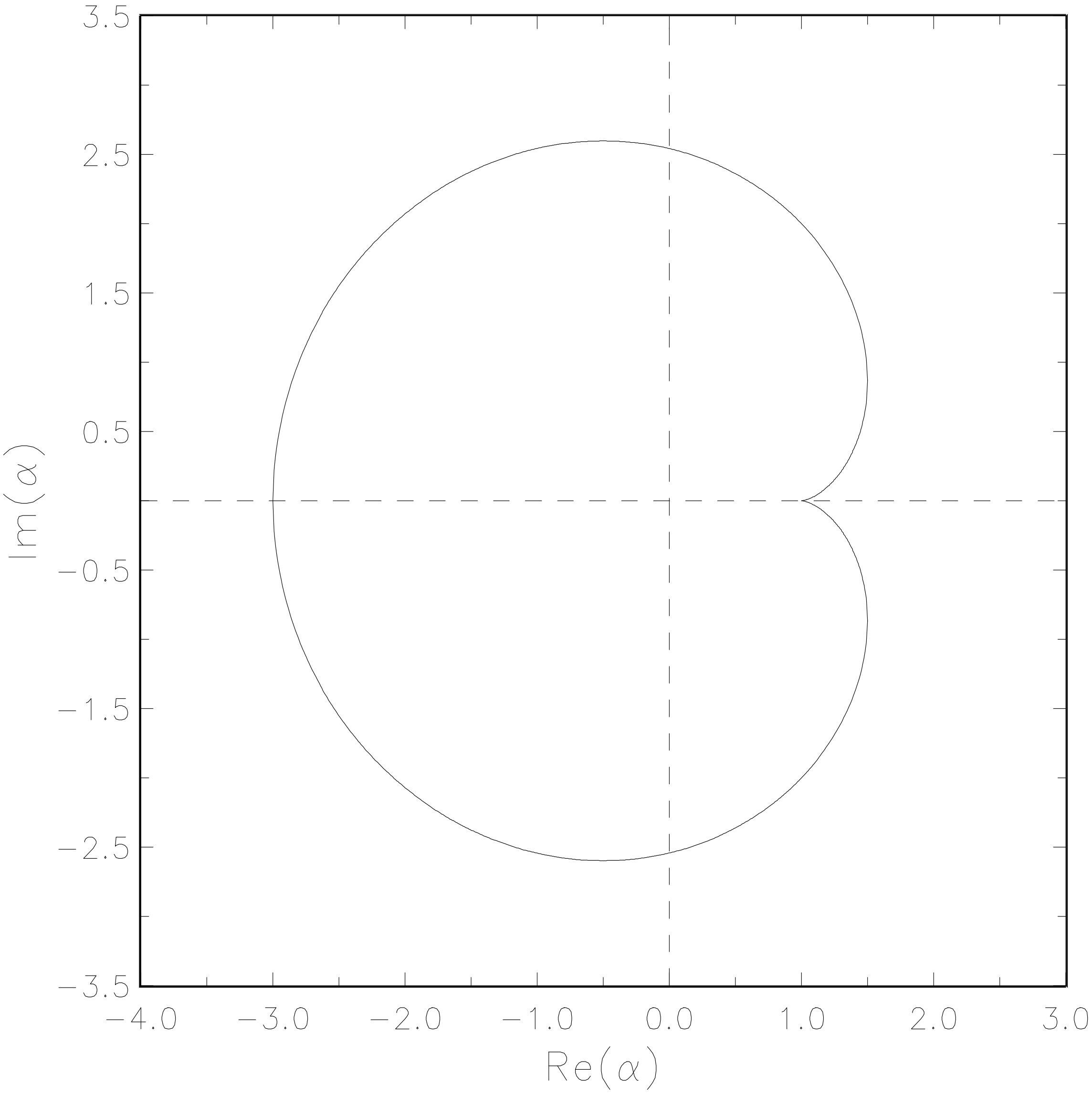
Definition 4.11 *Wir bezeichnen die Fälle in Satz 4.10 in derselben Reihenfolge wie dort als:*

1. *Der Fall* $\alpha = \infty$.
2. *Der Fall* $\alpha = -3$.

3. *Der Fall* $\alpha = 1$.

4. *Der Fall* $\alpha = 0$.

Die folgende Zeichnung gibt den Verlauf der Kurve $D(\alpha) = 0$ in der komplexen Zahlenebene an. Der Fall $\alpha = \infty$ entspricht dem Äußeren, $\alpha = 0$ dem Inneren. $\alpha = 1$ ist der rechte Schnitt der Kurve mit der reellen Achse und $\alpha = -3$ der Rest der Kurve.



Die Kurve $D(\alpha) = 0$ in der komplexen Zahlenebene.

Kapitel 5

Defektindices der Normalformen

Wir berechnen die Defektindices der Normalformen. Je nach Art der Normalform kommen dabei unterschiedliche Verfahren zur Anwendung. Die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha = \infty$ behandeln wir in der l^2-Darstellung. Damit sollte eine Übertragung auf die feldtheoretischen Operatoren zumindest teilweise möglich sein. Den Defektindex der Fälle $\alpha = -3$ und $\alpha = 1$ bestimmen wir in der Ortsraumdarstellung.

5.1 Der Fall $\alpha = 0$

Die zu untersuchende Gleichung lautet:

$$\left(a^* a^2 + (a^*)^2 a + ra + \bar{r} a^*\right) \phi = \lambda \phi \ , \ \mathrm{Im}\, \lambda \neq 0. \tag{5.1}$$

Nach (3.32) und (3.36) schreibt sich (5.1) in der l^2-Darstellung:

$$\sqrt{n+1}(n+r)c_{n+1} + \sqrt{n}(n-1+\bar{r})c_{n-1} = \lambda c_n \ , \ n \geq 0. \tag{5.2}$$

O.B.d.A. können wir $c_0 := 1$ setzen. Wir wollen zeigen, daß (5.1) bzw. (5.2) durch Hilbertraumvektoren lösbar sind.

Satz 5.1 *Die durch (5.2) definierte Rekursionsfolge ist quadratsummierbar; d.h.:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Beweis: Wir rechnen die Voraussetzungen von Korollar 2.19 nach.

a) Wir können $n_0 \in \mathbb{N}$ so wählen, daß für $n \geq n_0$ gilt $n > 2|r|$. Die Beschränkung auf diese n wirkt sich nicht auf den Defekt aus (vgl. Abschnitt 2.2). Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|\sqrt{n+1}(n+r)|} &\leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}n\,(1-|r/n|)} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}n} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Damit ist die erste Voraussetzung erfüllt.

b) Wir zeigen $|a_{n-1}|\,|a_{n+1}| \le |a_n|^2$ für hinreichend große n:

$$\begin{aligned} |\sqrt{n+2}(n+1+r)|\,|\sqrt{n}(n-1+\bar{r})| &\le (n+1)|(n+r+1)(n+r-1)| \\ &= (n+1)|(n+r)^2-1|. \end{aligned}$$

Den rechten Faktor rechnen wir genau aus:

$$\begin{aligned} |(n+r)^2-1|^2 &= |n+r|^4+1-2\mathrm{Re}\,(n+r)^2 \\ &= |n+r|^4+1+2(\mathrm{Im}\,r)^2-2(n+\mathrm{Re}\,r)^2 \\ &\le |n+r|^4. \end{aligned}$$

Letzteres gilt für:

$$1+2(\mathrm{Im}\,r)^2-2(n+\mathrm{Re}\,r)^2 \le 0.$$

Denken wir uns n_0 von vornherein so groß gewählt, daß dies für $n \ge n_0$ erfüllt ist, dann ergibt sich:

$$|\sqrt{n+2}(n+1+r)|\,|\sqrt{n}(n-1+\bar{r})| \le |\sqrt{n+1}(n+r)|^2.$$

Das ist die zweite Voraussetzung. ■

Für den Operator in (5.2) heißt das:

Korollar 5.2 *Der Operator*

$$a^*a^2+(a^*)^2a+ra+\bar{r}a^*$$

hat auf D_0 für alle $r \in \mathbb{C}$ den Defektindex $(1,1)$.

■

Es ist bemerkenswert, daß sich die obigen Aussagen ohne Schwierigkeiten für beliebige $r \in \mathbb{C}$ beweisen ließen. Das liegt daran, daß sowohl der Operator $a^*a^2+(a^*)^2a$ als auch der Störoperator $ra+\bar{r}a^*$ im l^2 durch eine Jacobi-Matrix dargestellt werden. Das ist im nächsten Abschnitt 5.2 anders, und der rechnerische Aufwand wird dementsprechend größer.

5.2 Der Fall $\alpha = \infty$

Gesucht sind Hilbertraumlösungen der Gleichung:

$$\left(a^3+(a^*)^3+ra+\bar{r}a^*\right)\phi = \lambda\phi\ ,\ \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0. \tag{5.3}$$

Nach (3.32) und (3.36) ist das gleichbedeutend mit der Frage, ob die Rekursionsformel

$$\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}c_{n+3}+r\sqrt{n+1}c_{n+1}+\bar{r}\sqrt{n}c_{n-1}+\sqrt{n(n-1)(n-2)}c_{n-3} = \lambda c_n, \tag{5.4}$$

$n \geq 0$, für $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ quadratsummierbare Lösungen besitzt. Da c_0, c_1, c_2 frei wählbar sind, gibt es in jedem Fall drei linear unabhängige formale Lösungen. Um die Schreibarbeit etwas zu verringern, sei:

$$a_n := \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\ ,\ b_n = r\sqrt{n+1}\ ,\ n \geq 0.$$

Für negativen Index sei wie gewöhnlich $a_{-n}, b_{-n} := 0, n > 0$. Wir gehen völlig analog zu Satz 2.17 vor. Zunächst führen wir die Hilfsgrößen e_n ein:

$$a_n e_{n+3} = a_{n-3} e_{n-3}\ ,\ n \geq 3\ ;\ e_0 = \ldots = e_5 = 1 \tag{5.5}$$

und spalten dann die vermutete Asymptotik ab, indem wir

$$c_n = \tau_n e_n d_n \tag{5.6}$$

ansetzen, wobei

$$\tau_{6k+\iota} = \tau^\iota\ ,\ \iota \in \{0, \ldots, 5\}$$

ist. Einsetzen in (5.4) ergibt:

$$d_{n+3} + \frac{b_n}{a_{n+3}} \frac{\tau_{n+1} e_{n+1}}{\tau_{n+3} e_{n+3}} d_{n+1} + \frac{\bar{b}_{n-1}}{a_{n-3}} \frac{\tau_{n-1} e_{n-1}}{\tau_{n-3} e_{n-3}} d_{n-1} + d_{n-3} = \frac{\lambda}{a_{n-3}} \frac{\tau_n e_n}{\tau_{n-3} e_{n-3}} d_n. \tag{5.7}$$

Um wie in Satz 2.17 vorgehen zu können, müssen wir zeigen, daß die Quotienten $\dfrac{e_{n+1}}{e_{n+3}}$ und $\dfrac{e_{n-1}}{e_{n-3}}$ für $n \to \infty$ konvergieren. Dafür genügt es, die Asymptotik der e_n zu kennen.

Lemma 5.3 *Es gibt Konstanten $K_\iota > 0$, $\iota = 0, \ldots, 5$ derart, daß gilt:*

$$e_{6k+\iota} = \frac{K_\iota}{(k+1)^{3/4}} + O\left(\frac{1}{(k+1)^{7/4}}\right)\ ,\ k \geq 0.$$

Beweis: Sei abkürzend $n := 6k+\iota$. Aus (5.5) folgt induktiv und nach Umordnen der Faktoren:

$$e_n = \frac{\sqrt{(n-3)(n-9)\ldots(\iota+3)}}{\sqrt{n(n-6)\ldots(\iota+6)}} \cdot \frac{\sqrt{(n-4)(n-10)\ldots(\iota+2)}}{\sqrt{(n-1)(n-7)\ldots(\iota+5)}} \cdot \frac{\sqrt{(n-5)(n-11)\ldots(\iota+1)}}{\sqrt{(n-2)(n-8)\ldots(\iota+4)}}.$$

Die Asymptotik dieses Produktes kann man mithilfe der Γ-Funktion bestimmen. Wir führen dies beispielhaft für den ersten Faktor durch. Es ist:

$$\begin{aligned} q_n &:= \frac{\sqrt{(n-3)(n-9)\ldots(\iota+3)}}{\sqrt{n(n-6)\ldots(\iota+6)}} \\ &= \left(\frac{\left(k-\frac{1}{2}+\frac{\iota}{6}\right)\left(k-1-\frac{1}{2}+\frac{\iota}{6}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+\frac{\iota}{6}\right)}{\left(k+\frac{\iota}{6}\right)\left(k-1+\frac{\iota}{6}\right)\ldots\left(1+\frac{\iota}{6}\right)}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\iota}{6}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\iota}{6}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(1+\frac{\iota}{6}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\iota}{6}+k\right)}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mittels der Stirlingschen Formel (vgl. [6])

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) \ , \ \mathrm{Re}\, z > 0$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\iota}{6} + k\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\iota}{6} + k\right)} &= \frac{\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\iota}{6} + k\right)^{\frac{\iota}{6}+k} e^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{\iota}{6}+k\right)} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)}{\sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{\iota}{6} + k\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\iota}{6}+k} e^{-\left(1+\frac{\iota}{6}+k\right)} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)} \\
&= \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\iota}{6} + k}{1 + \frac{\iota}{6} + k}\right)^{\frac{\iota}{6}+k} \frac{1}{\left(1 + \frac{\iota}{6} + k\right)^{1/2}} e^{1/2} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \frac{\iota}{6} + k}\right)^{\frac{\iota}{6}+k} e^{1/2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\iota}{6} + k\right)^{1/2}} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \\
&= \frac{1}{(k+1)^{1/2}} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$q_n = \left(\frac{\Gamma\left(1 + \frac{\iota}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\iota}{6}\right)}\right)^{1/2} \frac{1}{(k+1)^{1/4}} + O\left(\frac{1}{k^{5/4}}\right).$$

Bei den verbleibenden zwei Faktoren geht man entsprechend vor und erhält so die Behauptung. ∎

Aus dem vorangehenden Lemma 5.3 ziehen wir den Schluß, daß

$$\left|\frac{\tau_n e_n}{\tau_{n-3} e_{n-3}}\right| \le M < \infty \tag{5.8}$$

gilt für $n \ge 3$, sowie bei geeigneter Wahl der τ_n:

$$\frac{\tau_{n+1} e_{n+1}}{\tau_{n+3} e_{n+3}} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \ , \ \frac{\tau_{n-1} e_{n-1}}{\tau_{n-3} e_{n-3}} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{5.9}$$

für $n \to \infty$. Wir gehen nun daran, (5.7) in eine Vektorrekursion zu verwandeln. Vorab führen wir noch folgende Abkürzungen ein:

$$\beta_n := \frac{b_n \tau_{n+1} e_{n+1}}{a_{n+3} \tau_{n+3} e_{n+3}} \ , \ \gamma_n := \frac{\lambda \tau_n e_n}{a_{n-3} \tau_{n-3} e_{n-3}} \ , \ \delta_n := \frac{\bar{b}_{n-1} \tau_{n-1} e_{n-1}}{a_{n-3} \tau_{n-3} e_{n-3}}.$$

Damit schreibt sich (5.7) für sechs aufeinanderfolgende Indices:

$$d_{n+3+j} + \beta_{n+j} d_{n+1+j} - \gamma_{n+j} d_{n+j} + \delta_{n+j} d_{n-1+j} + d_{n-3+j} = 0 \ , \ j = 0, \ldots, 5.$$

Wir fassen dies als Gleichungssystem für $d_{n+3}, \ldots, d_{n+8}$ auf, worin $d_{n-3}, \ldots, d_{n+2}$ gegeben sind. In Matrixform erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_{n+5} & -\gamma_{n+5} & \delta_{n+5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_{n+4} & -\gamma_{n+4} & \delta_{n+4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta_{n+3} & -\gamma_{n+3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta_{n+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{n+8} \\ d_{n+7} \\ d_{n+6} \\ d_{n+5} \\ d_{n+4} \\ d_{n+3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_{n+3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{n+2} & -\delta_{n+2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\beta_{n+1} & \gamma_{n+1} & -\delta_{n+1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\beta_n & \gamma_n & -\delta_n & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{n+2} \\ d_{n+1} \\ d_n \\ d_{n-1} \\ d_{n-2} \\ d_{n-3} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix auf der linken Seite ist leicht zu invertieren. Da sie ein Produkt von einfachen Scherungen ist, braucht man nur sukzessive mit den jeweiligen Inversen zu multiplizieren. Wir führen dies nicht vollständig aus; denn aus (5.8) und (5.9) wissen wir, daß

$$\beta_n, \delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \ , \ \gamma_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

gilt. Wir interessieren uns nur für Terme bis zur Ordnung $\frac{1}{n}$; deshalb können wir die γ_n ganz weglassen und die Produkte der $\beta_n, \gamma_n, \delta_n$ untereinander ebenfalls vernachlässigen. Es folgt mit $y_n := (d_{n+2}, \ldots, d_{n-3})^T$:

$$y_{n+6} = V_n' y_n + W_n' y_n.$$

Darin ist:

$$V_n' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \beta_{n+5} & 0 & \delta_{n+5} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \beta_{n+4} & 0 & \delta_{n+4} \\ -\delta_{n+3} & 0 & -1 & 0 & \beta_{n+3} & 0 \\ 0 & -\delta_{n+2} & 0 & -1 & 0 & \beta_{n+2} \\ -\beta_{n+1} & 0 & -\delta_{n+1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\beta_n & 0 & -\delta_n & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

W_n' enthält die restlichen Produkte. V_n' läßt sich weiter vereinfachen, wenn man in erster Ordnung $\beta_n, \ldots, \beta_{n+5}$ durch $\frac{r}{n}$ und $\delta_n, \ldots, \delta_{n+5}$ durch $\frac{\bar{r}}{n}$ ersetzt:

$$y_{n+6} = V_n y_n + W_n y_n \tag{5.10}$$

mit:

$$V_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{r}{n} & 0 & \frac{\bar{r}}{n} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{r}{n} & 0 & \frac{\bar{r}}{n} \\ -\frac{\bar{r}}{n} & 0 & -1 & 0 & \frac{r}{n} & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{r}}{n} & 0 & -1 & 0 & \frac{r}{n} \\ -\frac{r}{n} & 0 & -\frac{\bar{r}}{n} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{r}{n} & 0 & -\frac{\bar{r}}{n} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In $W_n = (W_n^{jk})_{j,k=1,\ldots,6}$ finden sich die Korrekturen wieder. Man hat:

$$W_n^{jk} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \ , \ j,k = 1, \ldots, 6.$$

Wir sind nun in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 5.4 *Für alle $r \in \mathbb{C}$ sind alle Lösungen von (5.4) zu beliebigen Anfangswerten c_0, c_1, c_2 quadratsummierbar.*

Beweis: Wegen des Ansatzes (5.6) für c_n und Lemma 5.3 brauchen wir nur noch zu zeigen, daß die d_n beschränkt bleiben. Es genügt, die Beschränktheit der y_n in der euklidischen Norm $\|.\|_2$ auf dem $\mathbb{C}^6$ nachzuweisen. Wir wenden auf (5.10) die Dreiecksungleichung an:

$$\|y_{n+6}\|_2 \leq \|V_n y_n\|_2 + \|W_n y_n\|_2.$$

Um die erste Norm abzuschätzen, berechnen wir die Eigenwerte von V_n. Es ist:

$$V_n = -\mathbb{1} + \frac{1}{n}\tilde{V}_n.$$

$\tilde{V}_n$ ist eine schiefhermitesche Matrix. Daher sind ihre Eigenwerte rein imaginär, und sie ist durch eine unitäre Matrix auf Diagonalgestalt transformierbar. Obwohl das für unsere Zwecke ausreichend ist, geben wir die Eigenwerte explizit an, da dies auf einfache Weise möglich ist. $\tilde{V}_n$ besitzt nämlich zwei invariante Unterräume bestehend aus Vektoren der Form:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ \xi_2 \\ 0 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1 \\ 0 \\ \xi_2 \\ 0 \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Erfreulicherweise sind die Einschränkungen von $\tilde{V}_n$ auf diese Unterräume durch dieselbe Matrix R gegeben:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & r & \bar{r} \\ -\bar{r} & 0 & r \\ -r & -\bar{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Bleiben die Eigenwerte von R zu berechnen. Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\mu^3 + 3|r|^2\mu + r^3 - \bar{r}^3 = 0.$$

Das Auflösen gelingt mithilfe der Cardanischen Formeln (vgl. [16]). Man findet:

$$\mu_1 = \bar{r} - r \ , \ \mu_{2,3} = \frac{r - \bar{r}}{2} \pm i\frac{r + \bar{r}}{2}\sqrt{3}.$$

Die (zweifach entarteten) Eigenwerte $\kappa_j^{(n)}$ von V_n sind nun gegeben durch:

$$\kappa_j^{(n)} = -1 + \frac{1}{n}\mu_j \ , \ j = 1,2,3.$$

Wichtig ist der Betrag der Eigenwerte:

$$|\kappa_j^{(n)}| = \left(1 + \frac{|\mu_j|^2}{n^2}\right)^{1/2} \leq 1 + \frac{1}{2}\frac{|\mu_j|^2}{n^2}.$$

Dabei haben wir die wohlbekannte Ungleichung $(1+y)^{1/2} \leq 1 + y/2$ für $y \geq 0$ benutzt. V_n läßt sich durch eine unitäre Matrix U_n diagonalisieren:

$$U_n V_n U_n^* = \operatorname{diag}\left(\kappa_1^{(n)}, \kappa_1^{(n)}, \kappa_2^{(n)}, \kappa_2^{(n)}, \kappa_3^{(n)}, \kappa_3^{(n)}\right) =: \Delta_n.$$

Jetzt können wir $\|V_n y_n\|_2$ abschätzen:

$$\|V_n y_n\|_2 = \|U_n^* \Delta_n U_n y_n\|_2 \leq \left(1 + \frac{\rho}{2}\frac{1}{n^2}\right) \|y_n\|_2.$$

Darin ist $\rho := \max_{j=1,2,3} |\mu_j|^2$.

Bei der zweiten Norm dürfen wir etwas sorgloser vorgehen. Die Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der elementaren Ungleichung $\left(|a|^2 + |b|^2\right)^{1/2} \leq |a| + |b|$ liefert:

$$\|W_n y_n\|_2 \leq \frac{K}{n^{3/2}} \|y_n\|_2$$

mit einer geeigneten Konstanten $K > 0$. Wir finden so insgesamt:

$$\|y_{n+6}\|_2 \leq \left(1 + \frac{\rho}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{K}{n^{3/2}}\right) \|y_n\|_2,$$

woraus wir durch vollständige Induktion die Beziehung

$$\|y_{6(k+1)+3}\|_2 \leq \prod_{l=0}^{k} \left(1 + \frac{\rho}{2}\frac{1}{(6l+3)^2} + \frac{K}{(6l+3)^{3/2}}\right) \cdot \|y_3\|_2$$

gewinnen. Das Produkt konvergiert für $k \to \infty$, da die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(6k+3)^2} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(6k+3)^{3/2}}$$

konvergieren. Das beweist die Beschränktheit der y_n und damit auch der d_n. ■

Für den Operator, dessen Defektgleichung (5.3) wir untersucht haben, ergibt sich:

Korollar 5.5 *Der Operator $a^3 + (a^*)^3 + ra + \bar{r}a^*$ hat für alle $r \in \mathbb{C}$ auf D_0 den Defektindex $(3, 3)$.*

Beweis: Wie oben erwähnt, besitzt (5.4) drei linear unabhängige Lösungen. Satz 5.4 liefert die Behauptung. ■

In Korollar 5.5 ist auch der Fall $r = 0$ mit enthalten, also der Operator $a^3 + (a^*)^3$, den wir von unseren Betrachtungen in Kapitel 4 ausgeschlossen hatten. Damit ist auch diese Lücke geschlossen. Allerdings hätte man für diesen Spezialfall nicht Satz 5.4 zu bemühen brauchen, da die Defektgleichung von $a^3 + (a^*)^3$ in drei entkoppelte Gleichungen zerfällt, auf die man Korollar 2.19 problemlos anwenden kann.

5.3 Der Fall $\alpha = -3$

Zu untersuchen ist die Gleichung:

$$(-3a^3 + 3a^*a^2 + 3(a^*)^2a - 3(a^*)^3 + ra + \bar{r}a^*)\phi = \lambda\phi \text{ , } \operatorname{Im}\lambda \neq 0. \tag{5.11}$$

Wie wir schon in Abschnitt 3.3 bemerkten, ist es günstiger, mit der fouriertransformierten Gleichung zu arbeiten, also die Bogoljubov-Transformation $U(i,0)$ anzuwenden (vgl. (3.26)). Wir erhalten, wenn wir noch $\lambda = i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$ setzen:

$$\left(a^3 + a^*a^2 - (a^*)^2 a - (a^*)^3 + \frac{r}{3}a - \frac{\bar{r}}{3}a^*\right)\phi = \frac{\mu}{3}\phi.$$

In der Ortsraumdarstellung wird daraus ($\phi \to u$, vgl. (3.46)):

$$\left(-\sqrt{2}\left(-2x^2\frac{d}{dx} - 2x + \frac{d}{dx}\right) + \frac{1}{3\sqrt{2}}\left((r-\bar{r})x + (r+\bar{r})\frac{d}{dx}\right)\right)u = \frac{\mu}{3}u,$$

also:

$$-x^2\frac{d}{dx}u + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r+\bar{r}}{6}\right)\frac{d}{dx}u - \left(1 + \frac{r-\bar{r}}{12}\right)xu = -\frac{\mu}{3\sqrt{2}}u.$$

Wir wählen $\mu = -3\sqrt{2}$ und setzen:

$$F := \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{Re} r}{3}\right) \;,\; G := \frac{\operatorname{Im} r}{6}.$$

Damit folgt:

$$(F - x^2)u' - (iG+1)xu = u. \tag{5.12}$$

Die Wahl des Vorzeichens bei μ erspart uns später einige Betragsstriche. Es sollte möglich sein, (5.12) im Rahmen allgemeiner Theorien zu untersuchen. Da sich aber hier die Gleichung vollständig mittels elementarer Funktionen lösen läßt, verzichten wir darauf und schlagen den direkten, möglicherweise weniger eleganten Weg ein. Der Struktur von (5.11) würde ohnehin eine l^2-Behandlung gerechter werden, wobei aber noch größere Schwierigkeiten als in Abschnitt 5.2 auftreten.

In (5.11) steht der adjungierte Operator; deshalb suchen wir gemäß Definition 2.2 schwache Lösungen von (5.12). Die zugelassenen Testfunktionen liegen zunächst in D_0. Es ist aber zweckmäßig, den Testfunktionenraum zu erweitern. Geht man den Beweis von Satz 2.14 durch, so sieht man, daß dort D_0 durch

$$D_1 := \{c = (c_0, c_1, \ldots) \in l^2 \mid \forall \kappa \in \mathbb{N} : \sup_{n \in \mathbb{N}_0} n^\kappa |c_n| < \infty\}$$

ersetzt werden kann, ohne etwas am Definitionsbereich des adjungierten Operators zu verändern, wenn die Einträge der Jacobi-Matrix nicht stärker als eine Potenz von n anwachsen. Dieses Ergebnis überträgt sich leicht auf unseren Fall. Nach [11] gilt im $L^2(\mathbb{R})$:

$$D_1 = \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Insbesondere enthält D_1 die Funktionen mit kompaktem Träger. Nur diese lassen wir im weiteren als Testfunktionen zu. Wir bringen nun (5.12) in die explizite Form:

$$u' = \frac{1 + (iG+1)x}{F - x^2}u. \tag{5.13}$$

Falls die rechte Seite von (5.13) Singularitäten hat, wählen wir nur solche Testfunktionen, die in einer vorgegebenen (aber beliebig kleinen) Umgebung dieser Singularitäten verschwinden.

Aus allgemeinen Sätzen über die Regularität schwacher Ableitungen (vgl. z.B. [5]) ergibt sich dann, daß jede schwache L^2-Lösung auf jedem Intervall, das keine Singularitäten enthält, auch eine starke Lösung von (5.13) ist. Da diese nach dem Satz von Picard-Lindelöf eindeutig bestimmt ist, reicht es zur Berechnung der Defektindices aus, die Quadratintegrierbarkeit der starken Lösungen (auf den verschiedenen Intervallen) zu untersuchen.

Im weiteren unterscheiden wir die Fälle $F < 0, F > 0$ und $F = 0$.

Satz 5.6 *Für $F < 0$ besitzt die Gleichung (5.12) genau eine quadratintegrierbare (schwache) Lösung.*

Beweis: Wir berechnen die Lösung u von (5.13), indem wir zunächst rein formal vorgehen. Wegen $|F| = -F$ gilt:

$$-\frac{1+(iG+1)x}{|F|+x^2} = \frac{u'}{u} = (\ln u)'.$$

Die Stammfunktion der linken Seite ist:

$$\begin{aligned} -\int \frac{1+(iG+1)x)}{|F|+x^2}\,dx &= -\int \frac{1}{|F|+x^2}\,dx - (iG+1)\int \frac{x}{|F|+x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|F|}}\arctan\frac{x}{\sqrt{|F|}} - \frac{1}{2}(iG+1)\ln(|F|+x^2) \end{aligned}$$

(auf Integrationskonstanten können wir an dieser Stelle verzichten). Man erhält somit:

$$u(x) = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{|F|}}\arctan\frac{x}{\sqrt{|F|}}\right)\exp\left(\frac{-iG}{2}\ln(|F|+x^2)\right)\frac{1}{(|F|+x^2)^{1/2}}.$$

Nach Konstruktion ist u die auf ganz $\mathbb{R}$ erklärte Lösung von (5.13). Da $\arctan\frac{x}{\sqrt{|F|}}$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt bleibt, der zweite Faktor den Betrag 1 hat und der dritte Faktor offensichtlich quadratintegrierbar ist, ist die Behauptung bewiesen. ■

Wir kommen zum Fall $F > 0$. Die Differentialgleichung (5.12) wird singulär, weil die Funktion vor u' zwei verschiedene Nullstellen besitzt; trotzdem ändert sich nichts an der Anzahl der L^2-Lösungen.

Satz 5.7 *Für $F > 0$ besitzt (5.12) genau eine quadratintegrierbare schwache Lösung.*

Beweis: Nach den obigen Überlegungen können wir außerhalb der singulären Punkte $\sqrt{F}, -\sqrt{F}$ wie in Satz 5.6 vorgehen:

$$\frac{1+(1+iG)x)}{F-x^2} = (\ln u)'.$$

Diesmal ergeben sich allerdings andere Stammfunktionen. Zunächst für $|x| < \sqrt{F}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{F-x^2}\,dx &= \frac{1}{2\sqrt{F}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{F}+x}+\frac{1}{\sqrt{F}-x}\right)dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{F}}\left(\ln(\sqrt{F}+x)-\ln(\sqrt{F}-x)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{F}}\ln\frac{\sqrt{F}+x}{\sqrt{F}-x} \end{aligned}$$

und:

$$\int \frac{x}{F-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(F-x^2).$$

Die Lösung ist also:

$$u(x) = \left(\frac{\sqrt{F}+x}{\sqrt{F}-x}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{F}}} \exp\left(\frac{-iG}{2}\ln(F-x^2)\right)\frac{1}{(F-x^2)^{1/2}}.$$

Wegen $F-x^2>0$ hat der zweite Faktor den Betrag 1. Wir schließen:

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \frac{(\sqrt{F}+x)^{1/\sqrt{F}}}{(\sqrt{F}-x)^{1/\sqrt{F}}}\frac{1}{(\sqrt{F}-x)(\sqrt{F}+x)} \\ &= \frac{(\sqrt{F}+x)^{(1/\sqrt{F})-1}}{(\sqrt{F}-x)^{(1/\sqrt{F})+1}}. \end{aligned}$$

Man sieht, daß u bei $x \nearrow \sqrt{F}$ nicht quadratintegrierbar ist. Dieser Lösungsanteil muß also gleich Null gesetzt werden:

$$u(x) = 0 \text{ für } -\sqrt{F} < x < \sqrt{F}.$$

Wir lösen die Gleichung (5.12) für $x>\sqrt{F}$. Es ist zweckmäßig, (5.12) mit -1 zu multiplizieren. Zu bestimmen ist dann:

$$-\int \frac{(iG+1)x+1}{x^2-F}\,dx \text{ mit } x^2-F>0.$$

Es ist:

$$\int \frac{x}{x^2-F}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-F)$$

und:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-F}\,dx &= \frac{1}{2\sqrt{F}}\int\left(\frac{1}{x-\sqrt{F}}-\frac{1}{x+\sqrt{F}}\right)dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{F}}\ln\frac{x-\sqrt{F}}{x+\sqrt{F}}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$u(x) = \left(\frac{x+\sqrt{F}}{x-\sqrt{F}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{F}}} \exp\left(\frac{-iG}{2}\ln(x^2-F)\right)\frac{1}{(x^2-F)^{1/2}} \tag{5.14}$$

und für den Betrag:

$$|u(x)|^2 = \frac{(x+\sqrt{F})^{(1/\sqrt{F})-1}}{(x-\sqrt{F})^{(1/\sqrt{F})+1}}.$$

Also ist u bei $x \searrow \sqrt{F}$ nicht quadratintegrierbar, und der entsprechende Abschnitt muß verschwinden:

$$u(x) = 0 \text{ für } x > \sqrt{F}.$$

Wir kommen zum quadratintegrierbaren Teil: $x < -\sqrt{F}$. Die Lösung ist auch hier durch (5.14) gegeben. Allerdings verhält sich der erste Faktor anders. Um das einzusehen, schreiben wir $x = -y, y > 0$. Es ist dann $y > \sqrt{F}$:

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left(\frac{-y+\sqrt{F}}{-y-\sqrt{F}}\right)^{1/\sqrt{F}} \frac{1}{(y-\sqrt{F})(y+\sqrt{F})} \\ &= \frac{(y-\sqrt{F})^{(1/\sqrt{F})-1}}{(y+\sqrt{F})^{(1/\sqrt{F})+1}}. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist für $y > \sqrt{F}$ wegen $1/\sqrt{F} - 1 > -1$ integrierbar. Die einzige, quadratintegrierbare (schwache) Lösung von (5.12) ist also durch

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \geq -\sqrt{F} \\ (5.14) & \text{für} \quad x < -\sqrt{F} \end{cases}$$

gegeben. Das war zu zeigen. ∎

Zum Schluß bleibt noch $F = 0$. Hier fallen die beiden Nullstellen im singulären Teil von (5.12) zusammen. Es kann also höchstens zwei linear unabhängige schwache Lösungen geben, was aber nicht der Fall ist.

Satz 5.8 *Sei $F = 0$. Dann hat (5.12) genau eine quadratintegrierbare schwache Lösung.*

Beweis: (5.12) vereinfacht sich zu:

$$-x^2 u' - ((iG+1)x + 1)\, u = 0.$$

Die Lösung bestimmen wir nach derselben Methode wie in Satz 5.7:

$$\frac{u'}{u} = -\frac{iG+1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Die Stammfunktion der rechten Seite kann man sofort angeben. Sie lautet:

$$-(iG+1)\ln|x| + \frac{1}{x}.$$

Wir erhalten als Lösung:

$$u(x) = \exp(-iG\ln|x|)\frac{1}{|x|}\exp\left(\frac{1}{x}\right) \ , \ x \neq 0 \tag{5.15}$$

und weiter:

$$|u(x)|^2 = \frac{1}{x^2}e^{2/x}.$$

Man erkennt sofort, daß $|u|^2$ nur für $x \nearrow 0$ integrierbar ist. Die schwache Lösung von (5.12) in $L^2(\mathbb{R})$ ist also gegeben durch:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ (5.15) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Das war zu beweisen. ∎

Für den Operator in (5.11) ziehen wir den Schluß:

Satz 5.9 *Der Operator*

$$3\left(-a^3 + a^*a^2 + (a^*)^2a - (a^*)^3\right) + ra + \bar{r}a^*$$

hat für alle $r \in \mathbb{C}$ *auf* D_1 *(und nach den Vorbemerkungen dann auch auf* D_0*) den Defektindex* $(1,1)$.

Beweis: Sätze 5.6-5.8. ∎

Wir bemerken, daß im Gegensatz zu den Erfahrungen aus Abschnitt 5.2 sich die Größe von r nicht wesentlich auf die Rechnungen auswirkte. In die Asymptotik der Defektlösungen ging sogar nur der Realteil von r (d.h. F) ein.

5.4 Der Fall $\alpha = 1$

Die Untersuchung wird am einfachsten in der Ortsraumdarstellung, da $A(1,1)$ dort ein reiner Multiplikationsoperator ist (vgl. (3.48)). Lineare Störterme brauchen wir nicht zu beachten, da nach Korollar 4.7 der Operator $A(1,1)$ der einzige Vertreter des Falles $\alpha = 1$ ist. Für $u \in D_0$ gilt:

$$(A(1,1)u)\,(x) = \sqrt{2}x(2x^2 - 3)u(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

Das Polynom ist (bis auf einen Normierungsfaktor) gerade das dritte Hermite-Polynom (vgl. (3.19)):

$$p_3(x) := \sqrt{2}x(2x^2 - 3).$$

Damit erhält man sofort die Selbstadjungiertheit.

Satz 5.10 *Der Operator* $A(1,1)$ *ist auf* D_0 *wesentlich selbstadjungiert.*

Beweis: Wir bestimmen zunächst $A(1,1)^*$ und $D(A(1,1)^*)$. Seien dazu $u \in D_0$ und $v \in L^2(\mathbb{R})$. Es ist :

$$(A(1,1)u, v) = \int_{\mathbb{R}} \overline{p_3(x)u(x)}v(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{u(x)}p_3(x)v(x)\,dx.$$

Wir müssen somit nur $p_3v \in L^2(\mathbb{R})$ verlangen, also:

$$(A(1,1)^*v)\,(x) = p_3(x)v(x).$$

Es ist klar, daß die Defektgleichung

$$p_3v = \lambda v\ ,\ \operatorname{Im}\lambda \neq 0$$

nur durch die Nullfunktion (im L^2-Sinn) gelöst werden kann. Daraus ergibt sich die Behauptung. ∎

Obwohl die Frage nach der Selbstadjungiertheit durch den vorigen Satz beantwortet ist, ist es interessant, sich die Defektgleichung im l^2 anzusehen. Sie lautet (vgl. 3.36):

$$\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}c_{n+3} + 3\sqrt{n+1}nc_{n+1} + 3\sqrt{n}(n-1)c_{n-1} \\ + \sqrt{n(n-1)(n-2)}c_{n-3} = \lambda c_n \ , \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0 \ , \ n \geq 0. \quad (5.16)$$

Darin können c_0, c_1, c_2 frei vorgegeben werden. Um diese Gleichung zu lösen, beachten wir, daß sich $A(1,1)$ faktorisieren läßt (vgl. (3.47)):

$$A(1,1) = (a+a^*)\left((a+a^*)^2 - 3\right).$$

Es genügt also, ein ϕ, das wegen Satz 5.10 nicht mehr in H liegen kann, so zu bestimmen, daß

$$(a+a^*)\phi = \kappa\phi$$

und

$$\kappa(\kappa^2 - 3) = \lambda \quad (5.17)$$

gilt. Man erhält die Rekursionsformel:

$$\sqrt{n+1}c_{n+1} + \sqrt{n}c_{n-1} = \kappa c_n \ , \ n \geq 0 \ , \ c_{-1} := 0. \quad (5.18)$$

Die Wurzeln stören die weitere Untersuchung; wir machen deshalb den Ansatz:

$$c_n = \sqrt{n!}\, d_n \ , \ n \geq 0.$$

Einsetzen in (5.18) ergibt:

$$(n+1)d_{n+1} + d_{n-1} = \kappa d_n \ , \ n \geq 0 \ , \ d_{-1} = 0. \quad (5.19)$$

Wir versuchen, für die d_n eine erzeugende Funktion g zu finden, indem wir die d_n als Taylorkoeffizienten zu g auffassen:

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n.$$

Aus (5.19) folgt, daß g der Differentialgleichung

$$g' + xg = \kappa g \quad (5.20)$$

genügt. Eine einfache Rechnung zeigt, daß (5.20) durch

$$g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2 + \kappa x}$$

gelöst wird. Da g offensichtlich analytisch ist, erweisen sich unsere formalen Überlegungen im Nachhinein als gerechtfertigt. Dem Übergang von (5.18) zu (5.20) liegt übrigens ein allgemeineres Konzept zugrunde, die sogenannte Bargmann-Segal-Darstellung. Dabei handelt es sich um eine alternative Realisierung des Hilbertraumes H als Raum gewisser holomorpher Funktionen. Die Operatoren a, a^* wirken dort als Multiplikations- und Differentiationsoperator:

$$(af)(z) = zf(z) \ , \ (a^*f)(z) = \frac{d}{dz}f(z).$$

Anstatt Bargmann-Segal-Darstellung sagt man manchmal auch Darstellung durch kohärente Zustände.

Mithilfe von g können wir nun die d_n explizit angeben:

$$d_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} g(x)\bigg|_{x=0} .$$

Wir rechnen, wobei wir die Leibniz-Regel beachten:

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^{\kappa x}\bigg|_{x=0} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \kappa^{n-k} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\bigg|_{x=0} . \end{aligned}$$

Zur Auswertung der verbliebenen Ableitungen ziehen wir die Potenzreihe von $\exp(-x^2/2)$ hinzu:

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{1}{2}\right)^m x^{2m}.$$

Daraus schließen wir:

$$\frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{1}{2}x^2}\bigg|_{x=0} = \begin{cases} \frac{(2m)!}{m!} \left(-\frac{1}{2}\right)^m & \text{für} \quad k = 2m \ , \ m \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Für d_n folgt:

$$d_n = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{[n/2]} \kappa^{n-2m} \binom{n}{2m} \frac{(2m)!}{m!} \left(-\frac{1}{2}\right)^m ,$$

$[n/2]$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $n/2$. Insgesamt erhalten wir für die c_n, wenn wir noch die verschiedenen Fakultäten zusammenfassen:

$$c_n = \sqrt{n!} \sum_{m=0}^{[n/2]} \kappa^{n-2m} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \frac{1}{(n-2m)!\, m!}. \tag{5.21}$$

Diese c_n liefern eine Lösung von (5.18) und damit auch eine Lösung von (5.16), falls κ die Gleichung (5.17) erfüllt. Man überlegt sich leicht, daß (5.17) für $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ stets drei einfache Wurzeln besitzt. Da die d_n die Taylorkoeffizienten von $\exp(-x^2/2 + \kappa x)$ sind, folgt, daß verschiedene κ linear unabhängige Lösungen liefern. Damit ist der Lösungsraum von (5.16) bestimmt.

Aus Satz 5.10 wissen wir, daß die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ divergiert. Der direkte Nachweis mithilfe der Formel (5.21) dürfte dagegen mühsam sein.

Kapitel 6

Verschiedenes

6.1 Störungsrechnung bei $\alpha = \infty$

Es ist eine naheliegende Idee, bei der Untersuchung des Operators

$$a^3 + (a^*)^3 + ra + \bar{r}a^*$$

störungstheoretische Methoden anzuwenden, indem man

$$B(r) := ra + \bar{r}a^*$$

als Störung zu

$$A := a^3 + (a^*)^3$$

auffaßt. Grundlage dafür ist der folgende Satz, der eine Verallgemeinerung des wohlbekannten Satzes von Kato und Rellich über selbstadjungierte Operatoren darstellt (vgl. [12], [17]).

Satz 6.1 *Seien A und B dicht definierte, symmetrische Operatoren in einem Hilbertraum H mit Definitionsbereichen $D(A), D(B)$, $D(A) \subset D(B)$. Für alle $\phi \in D(A)$ bestehe die Ungleichung:*

$$\|B\phi\| \leq \gamma\|A\phi\| + \delta\|\phi\| \tag{6.1}$$

mit $\delta \geq 0$ und $0 \leq \gamma < 1$. Dann hat der Operator $A + B$ auf $D(A)$ denselben Defekt wie A.

■

Die Voraussetzung $\gamma < 1$ im vorangehenden Satz ist wesentlich. Wir werden für A und $B(r)$ eine Ungleichung vom Typ (6.1) beweisen und zeigen, daß es für große r nicht möglich ist, $\gamma < 1$ zu erreichen, wodurch der Satz unbrauchbar wird. Das ist kein Widerspruch zu Abschnitt 5.2, da es sich nur um ein hinreichendes Kriterium handelt.

Wir kommen zur Ungleichung. Die Rechnungen führt man am besten in der l^2-Darstellung der Operatoren durch (vgl. (3.36) und (3.32)):

$$(A\phi)_n = \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}c_{n+3} + \sqrt{(n-2)(n-1)n}c_{n-3}$$

und:

$$(B(r)\phi)_n = r\sqrt{n+1}c_{n+1} + \bar{r}\sqrt{n}c_{n-1}.$$

Für die etwas länglichen Wurzeln bei A schreiben wir im weiteren abkürzend:

$$\omega_n := \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Da es schwierig ist, A auf direktem Wege nach unten abzuschätzen, gehen wir in eine Basis, in der das sofort möglich ist. Dadurch wird zwar die Untersuchung von $B(r)$ komplizierter, aber für Abschätzungen nach oben hat man mehr Hilfsmittel zur Hand.

Als erstes bemerken wir, daß A die Räume

$$H_l := \{\phi = (c_0, c_1, \ldots) \in l^2 \mid c_n = 0 \text{ für } n \neq 6k + l \ , \ k \in \mathbb{N}\} \ , \ l = 0, \ldots, 5$$

nicht miteinander vermischt. Präziser:

$$A(H_k) \subset H_l \ , \ l \equiv k + 3 \bmod 6.$$

O.B.d.A. können wir uns also auf Vektoren aus H_0 beschränken. Wir bestimmen $\eta \in H_0$ so, daß gilt:

$$A\eta = 0.$$

(A meint hier nur die Wirkung des Operators ohne Angabe eines Definitionsbereiches). Das führt für die Komponenten $\{e_{6k}\}$ von η auf die Rekursionsformel:

$$e_{6k} = -\frac{\omega_{6k-6}}{\omega_{6k-3}} e_{6(k-1)} \ , \ k \geq 1 \ , \ e_0 := 1. \tag{6.2}$$

Diese e_n unterscheiden sich von denen aus Abschnitt 5.2 nur durch das Vorzeichen. Induktiv erhält man:

$$e_{6k} = (-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{\omega_{6(k-j)}}{\omega_{6(k-j)+3}}. \tag{6.3}$$

Wir benötigen die Größenordnung der e_k. Obwohl wir dazu Lemma 5.3 heranziehen könnten, geben wir hier eine einfachere Abschätzung an, deren Beweis dafür nur die Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel benutzt und nicht die Stirlingsche Formel wie in Lemma 5.3.

Lemma 6.2 *Es gelten die Ungleichungen:*

$$\frac{3}{\sqrt{30}} \frac{1}{\sqrt{6k(6k-1)(6k-2)}} \leq |e_{6k}|^2 \leq \sqrt{6} \frac{1}{\sqrt{6k(6k-1)(6k-2)}} \ , \ k \geq 1.$$

Insbesondere gibt es Konstanten $K_1, K_2 > 0$ mit:

$$\frac{K_1}{(k+1)^{3/2}} \leq |e_{6k}|^2 \leq \frac{K_2}{(k+1)^{3/2}} \ , \ k \geq 0.$$

Beweis: Als erstes sehen wir für $k \geq 3$:

$$\begin{aligned}
\omega_{k-3}\omega_{k+3} &= \sqrt{(k-2)(k-1)k}\sqrt{(k+4)(k+5)(k+6)} \\
&= \sqrt{k(k+6)}\sqrt{(k-1)(k+5)}\sqrt{(k-2)(k+4)} \\
&\leq (k+3)(k+2)(k+1) \\
&= \omega_k^2,
\end{aligned}$$

wobei wir die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel benutzt haben. Die behaupteten Ungleichungen leitet man aus (6.3) her ähnlich wie das Korollar 2.19:

$$\begin{aligned}
|e_{6k}|^2 &= \frac{\omega_{6k-6}}{\omega_{6k-3}^2}\frac{\omega_{6k-6}\omega_{6k-12}}{\omega_{6k-9}^2}\cdots\frac{\omega_6\omega_0}{\omega_3^2}\omega_0 \\
&\leq \frac{\omega_{6k-6}}{\omega_{6k-3}^2}\omega_0 \\
&\leq \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6k(6k-1)(6k-2)}}
\end{aligned}$$

und die andere Richtung:

$$\begin{aligned}
|e_{6k}|^2 &= \frac{1}{\omega_{6k-3}}\frac{\omega_{6k-6}^2}{\omega_{6k-3}\omega_{6k-9}}\cdots\frac{\omega_6^2}{\omega_9\omega_3}\frac{\omega_0^2}{\omega_3} \\
&\geq \frac{1}{\omega_{6k-3}}\frac{\omega_0^2}{\omega_3} \\
&= \frac{3}{\sqrt{30}}\frac{1}{\sqrt{6k(6k-1)(6k-2)}}.
\end{aligned}$$

Die Folgerung ist klar, da ω_k offensichtlich genau die Ordnung $1/(k+1)^{3/2}$ hat. ■

Mithilfe von η führen wir jetzt eine neue, nicht orthogonale Basis in H_0 ein:

$$\eta_n := P_{6n}\eta \ , \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Darin bezeichnet P_{6n} den Projektionsoperator auf den Unterraum aller $\phi = (c_0, c_1, \dots)$ mit $c_k = 0$ für $k \geq 6n+1$. Es gilt nach Wahl der e_k (vgl. (6.2)):

$$(A\eta_n)_k = \begin{cases} \omega_{6n}e_{6n} & \text{für} \quad k = 6n+3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir berechnen die Wirkung von A auf eine beliebige Linearkombination

$$\phi = \sum_{n=0}^{N} c_n\eta_n.$$

Es ist:

$$(A\phi)_n = \left(\sum_{n=0}^{N} c_n A\eta_n\right)_k = \begin{cases} c_l\omega_{6l}e_{6l} & \text{für} \quad k = 6l+3 \ , \ l = 0, \dots, N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

In der neuen Basis wirkt der Operator A auf die Koeffizienten c_n von ϕ also wie eine Diagonalmatrix. Das war der Grund für die Wahl dieser Basis. Die zum Beweis von (6.1) nötige Norm läßt sich sehr einfach berechnen, nämlich:

$$\|A\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{N} |c_n \omega_{6n} e_{6n}|^2. \tag{6.4}$$

Wir wenden uns dem Operator $B(r)$ zu. Aufgrund der vielen „Nullen" in den Basisvektoren ist auch die Wirkung dieses Operators sehr übersichtlich:

$$(B(r)\phi)_k = \begin{cases} r(c_n + \ldots + c_N)\sqrt{6n}e_{6n} & \text{für} \quad k = 6n-1, \;,\; n = 1, \ldots, N \\ \bar{r}(c_n + \ldots + c_N)\sqrt{6n+1}e_{6n} & \text{für} \quad k = 6n+1 \;,\; n = 0, \ldots, N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Als Norm erhalten wir:

$$\|B(r)\phi\|^2 = |r|^2 \sum_{n=0}^{N} \left| \sum_{k=n}^{N} c_k \right|^2 (12n+1)|e_{6n}|^2. \tag{6.5}$$

Damit läßt sich der folgende Satz beweisen:

Satz 6.3 *Es gibt eine Konstante $K > 0$, so daß für alle $\phi \in H_0 \cap D_0$ die Ungleichung*

$$\|B(r)\phi\| \leq K\,|r| \cdot \|A\phi\|$$

gilt.

Beweis: Nach Lemma 6.2 gibt es ein $K_3 > 0$ mit:

$$(12n+1)|e_{6n}|^2 \leq K_3 \frac{1}{\sqrt{n+1}};$$

also:

$$\begin{aligned} \|B(r)\phi\|^2 &\leq |r|^2 K_3 \sum_{n=0}^{N} \left| \sum_{k=n}^{N} c_k \right|^2 \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &\leq |r|^2 K_3 \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=n}^{N} |c_k| \right)^2 \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &=: |r|^2 K_3 \sigma_N. \end{aligned}$$

Zur weiteren Auswertung der Summe benötigen wir eine Formel zur partiellen Summation, die wir kurz herleiten:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} p_n q_n &= \sum_{n=0}^{N} p_n \left(\sum_{j=n+1}^{N} (q_{j-1} - q_j) + q_N \right) \\ &= \sum_{j=1}^{N} (q_{j-1} - q_j) \sum_{n=0}^{j-1} p_n + q_N \sum_{n=0}^{N} p_n. \end{aligned}$$

Es folgt, wenn wir

$$g_j := \sum_{n=0}^{j} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

setzen:

$$\begin{aligned}
\sigma_N &= \sum_{j=1}^{N} \left(\left(\sum_{k=j-1}^{N} |c_k| \right)^2 - \left(\sum_{k=j}^{N} |c_k| \right)^2 \right) g_{j-1} + |c_N|^2 g_N \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(|c_{j-1}|^2 + 2|c_{j-1}| \sum_{k=j}^{N} |c_k| \right) g_{j-1} + |c_N|^2 g_N \\
&\leq 2 \sum_{j=0}^{N} |c_j| \sum_{k=j}^{N} |c_k| g_j \\
&=: 2\tilde{\sigma}_N.
\end{aligned}$$

Wir schätzen $\tilde{\sigma}_N$ mithilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ab:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_N &= \sum_{j=0}^{N} \left(|c_j|(j+1)^{1/4} g_j \right) \left(\frac{1}{(j+1)^{1/4}} \sum_{k=j}^{N} |c_k| \right) \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{N} \sqrt{j+1} |c_j|^2 g_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \left(\sum_{k=j}^{N} |c_k| \right)^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{N} \sqrt{j+1} |c_j|^2 g_j^2 \right)^{1/2} \sigma_N^{1/2}.
\end{aligned}$$

Dies setzen wir in die vorangehende Ungleichung ein. Da die Behauptung für $\sigma_N = 0$ sicherlich auch richtig ist, können wir $\sigma_N \neq 0$ voraussetzen und dividieren:

$$\sigma_N \leq 4 \sum_{j=0}^{N} \sqrt{j+1} |c_j|^2 g_j^2.$$

Bleiben noch die g_j zu behandeln. Man erhält das asymptotische Verhalten durch Vergleich mit einem Integral:

$$g_j \leq 1 + \int_0^j \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx = 1 + 2 \left[(1+x)^{1/2} \right]_0^j < 2\sqrt{j+1}.$$

Es ergibt sich somit:

$$\sigma_N \leq 16 \sum_{j=0}^{N} (j+1)^{3/2} |c_j|^2$$

und schließlich:

$$\|B(r)\phi\|^2 \leq 16 |r|^2 K_3 \sum_{j=0}^{N} (j+1)^{3/2} |c_j|^2.$$

Dies vergleichen wir mit (6.4). Nach Lemma 6.2 haben wir:

$$\|A\phi\|^2 \geq K_4 \sum_{n=0}^{N} (n+1)^{3/2} |c_n|^2 \ , \ K_4 > 0.$$

Die neue Konstante K_4 rührt daher, daß wir ω_n durch $(n+1)^{3/2}$ abgeschätzt haben. Insgesamt schließen wir:

$$\|B(r)\phi\|^2 \leq 16|r|^2 \frac{K_3}{K_4} \|A\phi\|^2.$$

Das ist die Behauptung. ■

Aus dem vorangehenden Satz 6.3 folgern wir, daß sich Satz 6.1 nur für kleine r anwenden läßt; man könnte deshalb meinen, daß wir bei den Abschätzungen etwas zu großzügig verfahren sind, zumal wir die Möglichkeiten in (6.1) gar nicht voll ausgeschöpft haben. Dies ist nicht der Fall, wie wir mithilfe von Vektoren zeigen werden, für die in (6.1) zumindest der Größenordnung nach Gleichheit steht. Diese Vektoren sind nicht schwierig zu finden. Der einfachste Ansatz führt auch gleich zum Ziel:

$$\psi_N := \sum_{n=0}^{N} \eta_n,$$

d.h. wir haben alle Entwicklungskoeffizienten $c_n = 1$ gesetzt. Wir schätzen die Normen (6.4) und (6.5) ab. Zuerst (6.4):

$$\|A\psi\|^2 = \sum_{n=0}^{N} |\omega_{6n} e_{6n}|^2 \leq K_5 \sum_{n=0}^{N} (n+1)^{3/2},$$

wobei sich $K_5 > 0$ aus Lemma 6.2 ergibt. Die Summe vergleichen wir wieder mit einem Integral:

$$\sum_{n=0}^{N} (n+1)^{3/2} \leq \int_0^{N+1} (x+1)^{3/2}\, dx = \frac{2}{5} \left[(x+1)^{5/2} \right]_0^{N+1} < \frac{2}{5} (N+2)^{5/2}$$

und erhalten:

$$\|A\psi_N\|^2 < \frac{2}{5} K_5 (N+2)^{5/2}.$$

Entsprechend geht man bei (6.5) vor:

$$\begin{aligned} \|B(r)\psi_N\|^2 &= |r|^2 \sum_{n=0}^{N} (N-n+1)^2 (12n+1) |e_{6n}|^2 \\ &\geq |r|^2 K_6 \sum_{n=0}^{N} (N-n+1)^2 \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Die Konstante $K_6 > 0$ ist wiederum eine Konsequenz aus Lemma 6.2. Die Summe behandeln wir auf bewährte Art:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}(N-n+1)^2\frac{1}{\sqrt{n+1}} &\geq \int_0^N (N-x+1)^2\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx\\
&= (N+1)^2\int_0^N \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx - 2(N+1)\int_0^N \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx\\
&\quad +\int_0^N \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx\\
&= 2(N+1)^2\left[\sqrt{x+1}\right]_0^N - 2(N+1)\left[\frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2)\right]_0^N\\
&\quad +\frac{2}{15}\left[\sqrt{x+1}(3x^2-4x+8)\right]_0^N\\
&= 2(N+1)^{5/2} - \frac{4}{3}(N+1)^{3/2}(N-2) + \frac{2}{5}\sqrt{N+1}N^2\\
&\quad +\text{Terme niedrigerer Ordnung}\\
&\geq K_7(N+1)^{5/2}
\end{aligned}
$$

mit einem geeignetem $K_7 > 0$. Wenn wir Satz 6.3 hinzuziehen, sehen wir, daß $\|A\psi_N\|$ und $\|B(r)\psi_N\|$ mit genau derselben Ordnung unendlich werden, falls $N \to \infty$ strebt. Auch der Term $\|\psi_N\|$ verbessert (6.1) nicht, da

$$\|\psi_N\|^2 \sim (N+1)^{3/2}$$

gilt, wie man analog zu $\|B(r)\psi_N\|$ nachrechnet. Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz 6.4 *Der Operator $B(r) = ra + \bar{r}a^*$ erfüllt für hinreichend kleine r und nur für solche r die Voraussetzungen von Satz 6.1, wobei $A = a^3 + (a^*)^3$ und $D(A) = D(B) = D_0$ sind.*

Beweis: Da sich D_0 als direkte Summe von $D_0 \cap H_l$, $l = 0, \dots 5$ schreiben läßt, liefern Satz 6.3 und eine einfache Anwendung der Dreiecksungleichung die in Satz 6.1 vorausgesetzte Ungleichung. ∎

Mit mehr Aufwand ließe sich eine (möglichst kleine) obere Schranke für r angeben. Man könnte so das hinreichend klein aus dem letzten Satz präzisieren. Uns kommt es aber nur darauf an, die Grenzen von Satz 6.1 für unser Problem aufzuzeigen.

6.2 Lineare und quadratische Operatoren

In den vorangehenden Abschnitten haben wir uns eingehend mit der Selbstadjungiertheit kubischer Operatoren auseinandergesetzt. Daß wir uns erst jetzt mit linearen und quadratischen Operatoren beschäftigen, liegt daran, daß die Selbstadjungiertheit dieser Operatoren seit langem bekannt ist. Unsere Methode eignet sich aber auch für diese Fälle.

Der allgemeine, in Erzeugern und Vernichtern lineare Operator ist gegeben durch:

$$A_1(\alpha) = \alpha_1 a + \bar{\alpha}_1 a^* \ , \ \alpha \in \mathbb{C} \tag{6.6}$$

und der quadratische durch:

$$A_2(\alpha_2, \alpha_0) = \alpha_2 a^2 + 2\alpha_0 a^* a + \bar{\alpha}_2 (a^*)^2 \ , \ \alpha_2 \in \mathbb{C} \ , \ \alpha_0 \in \mathbb{R}. \tag{6.7}$$

Für $\alpha_2 = 0$ und $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ haben wir übrigens im wesentlichen den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators vor uns. Der Definitionsbereich ist wie üblich D_0. In der l^2-Darstellung haben wir (vgl. (3.32) und (3.34)):

$$(A_1(\alpha)\phi)_n = \alpha_1 \sqrt{n+1} c_{n+1} + \bar{\alpha}_1 \sqrt{n} c_{n-1} \ \ n \geq 0 \tag{6.8}$$

und:

$$(A_2(\alpha_2, \alpha_0)\phi)_n = \alpha_2 \sqrt{(n+1)(n+2)} c_{n+2} + 2\alpha_0 n c_n + \bar{\alpha}_2 \sqrt{n(n-1)} c_{n-2} \ , \ n \geq 0. \tag{6.9}$$

Der formalen Einfachheit halber haben wir bei $n = 0$ begonnen. Die c_n mit negativem Index werden wie üblich gleich Null gesetzt. Es gilt:

Satz 6.5 *Der Operator $A_1(\alpha_1)$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ auf D_0 wesentlich selbstadjungiert.*

Beweis: Wir zeigen, daß $A_1(\alpha_1)$ den Defekt $(0, 0)$ hat. (6.8) führt auf die Defektgleichung:

$$\alpha_1 \sqrt{n+1} c_{n+1} + \bar{\alpha}_1 \sqrt{n} c_{n-1} = i c_n \ \ n \geq 0.$$

Den trivialen Fall $\alpha_1 = 0$ können wir vernachlässigen. Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

liefert der Satz von Carleman 2.16 die Behauptung. ∎

Eine interessante Folgerung ist:

Korollar 6.6 *Seien x und $i\frac{d}{dx}$ der gewöhnliche Multiplikations- bzw. Differentiationsoperator in $L^2(\mathbb{R})$. x und $i\frac{d}{dx}$ sind auf D_0 wesentlich selbstadjungiert.*

Beweis: Setze $\alpha_1 = 1$ bzw. $\alpha_1 = i$ in Satz 6.5. ∎

Die quadratischen Operatoren verhalten sich genauso einfach.

Satz 6.7 *Der Operator $A_2(\alpha_2, \alpha_0)$ ist für alle $\alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ auf D_0 wesentlich selbstadjungiert.*

Beweis: Wir rechnen den Defektindex aus. (6.9) führt auf:

$$\alpha_2 \sqrt{(n+1)(n+2)} c_{n+2} + 2\alpha_0 n c_n + \bar{\alpha}_2 \sqrt{n(n-1)} c_{n-2} = i c_n \ , \ n \geq 0. \tag{6.10}$$

Für $\alpha_2 = \alpha_0 = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $\alpha_2 = 0$, $\alpha_0 \neq 0$ folgt sofort $c_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Seien $\alpha_2,\ \alpha_0 \neq 0$. Da die Rekursion (6.10) in Zweierschritten fortschreitet, haben wir zwei entkoppelte Probleme für Jacobi-Matrizen. Wegen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} = \infty$$

schließen wir aus dem Satz von Carleman 2.16 auf die wesentliche Selbstadjungiertheit von $A_2(\alpha_2, \alpha_0)$. ■

Da unsere beiden Operatoren somit wesentlich selbstadjungiert sind, ist die Frage nach einfachen Normalformen vom analytischen Standpunkt aus überflüssig, aus algebraischer Sicht ist sie jedoch für sich interessant. Da alle wesentlichen Überlegungen in Kapitel 4 ausführlich dargelegt wurden, können wir uns hier etwas knapper fassen. Analog zu Lemma 4.2 sehen wir zunächst:

Lemma 6.8 *Sei $\alpha_1 \neq 0$. Dann läßt sich $A_1(\alpha_1)$ mittels einer unitären Transformation und durch eine Normierung mit einem reellen Faktor in die Form*

$$A_1(1) = a + a^*$$

bringen. Seien α_2 , $\alpha_0 \neq 0$. Dann läßt sich $A_2(\alpha_2, \alpha_0)$ ebenso in die Form

$$A_2(\alpha, 1) = \alpha a^2 + 2a^*a + \alpha(a^*)^2 \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

bringen mit $\alpha = \dfrac{|\alpha_2|}{\alpha_0}$.

Beweis: Wir verwenden die Bogoljubov-Transformation $U\left(\frac{\bar{\alpha}_1}{|\alpha_1|}, 0\right)$:

$$U\left(\frac{\bar{\alpha}_1}{|\alpha_1|}, 0\right) A_1(\alpha_1) U\left(\frac{\bar{\alpha}_1}{|\alpha_1|}, 0\right)^* = A_1(|\alpha_1|) = |\alpha_1| A_1(1).$$

Bei $A_2(\alpha_2, \alpha_0)$ können wir wegen $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ schon vorab eine Normierung durchführen:

$$A_2(\alpha_2, \alpha_0) = \alpha_0 A_2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}, 1\right).$$

Jetzt folgt wie eben:

$$\alpha_0 U\left(\frac{\bar{\alpha}_2}{|\alpha_2|}, 0\right) A_2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}, 1\right) U\left(\frac{\bar{\alpha}_2}{|\alpha_2|}, 0\right)^* = \alpha_0 A_2\left(\frac{|\alpha_2|}{\alpha_0}, 1\right).$$

Das war zu zeigen. ■

$A_1(1)$ läßt sich offensichtlich nicht weiter vereinfachen. Wir bringen $A_2(\alpha, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ oder, was gleichbedeutend ist, die quadratische Form

$$\alpha x^2 + 2xy + \alpha y^2 \ , \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{6.11}$$

in eine einfache Gestalt. Gemäß den Ausführungen in Kapitel 4 kommt es dabei auf die Nullstellen z_1, z_2 von

$$p_\alpha(z) = \alpha z^2 + 2z + \alpha$$

an. Da $\alpha \in \mathbb{R}$ ist, können wir direkt die Diskriminante $D(\alpha)$ anwenden. Man kann natürlich auch auf $\alpha \in \mathbb{R}$ verzichten und völlig wie in Abschnitt 4.2 vorgehen. Es ist (vgl. [16]):

$$D(\alpha) = 4(1 - \alpha^2) = \alpha^2(z_1 - z_2).$$

Wenn wir den trivialen Fall $\alpha = 0$ ausschließen, folgt:

Satz 6.9 *Für die Lösungen z_1, z_2 der Gleichung*

$$\alpha z^2 + 2z + \alpha = 0 \ , \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{6.12}$$

sind je nach dem Vorzeichen der Diskrimante

$$D(\alpha) = 4(1 - \alpha^2)$$

genau zwei Fälle möglich:

1. *Falls $D(\alpha) \leq 0$: Es gilt $|z_1| = |z_2| = 1$. Falls $D(\alpha) = 0$ ist, gibt es eine zweifache Nullstelle.*

2. *Falls $D(\alpha) > 0$: z_1, z_2 sind reell, und es gilt $z_2 = 1/z_1$.*

Beweis: Zunächst bemerken wir, daß mit z auch $\bar{z}$ und $1/z$ Lösungen von (6.12) sind. Sei $D(\alpha) < 0$. Es ist dann $z_1 = \bar{z}_2$, woraus mit dem Satz von Vieta folgt:

$$|z_2|^2 = z_2 \bar{z}_2 = z_2 z_1 = 1.$$

Bei $D(\alpha) = 0$ sind $z = 1$ bzw. $z = -1$ die einzigen Nullstellen.

Sei $D(\alpha) > 0$. Das bedeutet $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, $z_1 \neq z_2$. Nach der eingangs gemachten Bemerkung muß dann $z_2 = 1/z_1$ sein. ■

Um p_α in eine einfachere Gestalt zu bringen, transformieren wir die Nullstellen mit einem Automorphismus des Einheitskreises. Als einfache Normalformen bieten sich an:

- $\alpha = \infty$: $z^2 + 1$.
- $\alpha = 1$: $(z + 1)^2$.
- $\alpha = 0$: $2z$.

Da wir es hier nur mit zwei Nullstellen zu tun haben, können wir alle Sätze aus Abschnitt 4.3 übernehmen. Zusammen mit Satz 6.9 folgt, wobei wir die Ergebnisse gleich für die quadratische Form (6.11) formulieren:

Satz 6.10 *Die quadratische Form (6.11) läßt sich je nach dem Vorzeichen der zugehörigen Diskriminante durch lineare Transformationen aus $SU(1,1)$ in eine der folgenden Normalformen bringen:*

1. $D(\alpha) < 0$: $x^2 + y^2$.
2. $D(\alpha) = 0$: $(x + y)^2$.
3. $D(\alpha) > 0$: $2xy$.

∎

Die entsprechende Aussage für den Operator $A(\alpha, 1)$ ist klar. Da $D(\alpha) = 4(1 - \alpha^2)$ ist, läßt sich sofort angeben, für welche α welcher Fall vorliegt, nämlich:

1. $D(\alpha) < 0$: $|\alpha| > 1$.
2. $D(\alpha) = 0$: $\alpha = \pm 1$.
3. $D(\alpha) > 0$: $-1 < \alpha < 1$.

Geht man von $A_2(\alpha, 1)$ zurück zum nicht vollständig normierten Operator $A_2(\tilde{\alpha}, 1)$ mit $\tilde{\alpha} := \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \in \mathbb{C}$, so erhält man wie im kubischen Fall ein Gebiet in $\mathbb{C}$, durch das das Verhalten von $A(\tilde{\alpha}, 1)$ bestimmt wird, und zwar ist das hier einfach der Einheitskreis, was man sofort an der Form von $D(\alpha)$ abliest.

Zu Satz 6.10 gibt es eine Entsprechung in der Quantenfeldtheorie, also im Fall unendlich vieler Freiheitsgrade (vgl. [3]). Die dort verwandte Methode ist aber speziell auf quadratische Operatoren zugeschnitten, so daß sie sich wohl nicht ohne weiteres auf die uns interessierenden kubischen Operatoren übertragen läßt.

Literaturverzeichnis

[1] N.I. Akhiezer; *The Classical Moment Problem*, Oliver & Boyd, Edinburgh 1965

[2] Ju.M. Berezanskiĭ; *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators*, Transl. Math. Monogr. **17** (1968), Am. Math. Soc., Providence 1968

[3] F.A. Berezin; *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York 1966

[4] H.J. Borchers und W. Zimmermann; „On the Self-Adjointness of Field Operators“, Nuovo Cimento **31**, 1047 (1963)

[5] N. Dunford und J.T. Schwartz; *Linear Operators, Part II: Spectral Theory*, Interscience Publishers, New York 1963

[6] W.Fischer und I.Lieb; *Funktionentheorie*, Vieweg, Braunschweig 1985 (4. Aufl.)

[7] G.B. Gurevich; *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*, P.Noordhoff, Groningen 1964

[8] D.B. Hinton und R.T. Lewis; „Spectral Analysis of Second Order Difference Equations“, J. Math. Anal. Appl. **63**, 421 (1978)

[9] C.R. Putnam; *Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics*, Springer-Verlag, Berlin 1967

[10] S. Rabsztyn; „Deficiency Indices for Wickpowers in One Dimension“, Rep. Math. Phys. **27**, 161 (1989)

[11] M. Reed und B. Simon; *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, New York 1972

[12] M. Reed und B. Simon; *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York 1975

[13] S.N.M. Ruijsenaars; „On Bogoliubov Transformations. II. The General Case“, Ann. Phys. (NY) **116**, 105 (1978)

[14] B. Simon und R. Hoegh-Krohn; „Hypercontractive Semigroups and Two Dimensional Self-Coupled Bose Fields“, J. Funct. Anal. **9**, 121 (1972)

[15] M.H. Stone; *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis*, Colloquium Publications **XV**, Am. Math. Soc., Providence 1932

[16] B.L. v.d.Waerden; *Algebra I*, Springer-Verlag, Berlin 1971 (8. Aufl.)

[17] J. Weidmann; *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1258, Springer-Verlag, Berlin 1987

[18] A.S. Wightman und L. Gårding; „Fields as operatorvalued distributions in relativistic quantum theory", Arkiv för Fysik **28**, 129 (1964)

Ich danke Herrn Prof. Borchers für die Stellung des Themas und manchen nützlichen Hinweis sowie Herrn Prof. Kreß für die Vertretung meiner Arbeit vor dem Fachbereich Mathematik.