Integralformeln für Abschnittsdeterminanten linearer Operatoren

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Peter Otte
aus Bad Lauterberg

Göttingen 1997

D 7

Referent: Prof. Kreß

Korreferent: Prof. Schönhammer

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Juni 1997

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die klassischen Adiabatischen Theoreme verknüpfen die Spektralschar selbstadjungierter Operatoren mit den Lösungen zeitabhängiger Schrödinger-Gleichungen. In dieser Arbeit stellen wir ein neues Adiabatisches Theorem vor, das die Abschnittsdeterminanten der Spektralprojektoren durch die Lösung einer Wiener-Hopf-Gleichung ausdrückt.

Seien A_0 ein selbstadjungierter und B ein beschränkter symmetrischer Operator auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Wir suchen eine Beziehung zwischen den Spektralprojektoren von A_0 und denen von $A_0 + B$. Dazu führen wir einen Parameter α ein, mit dessen Hilfe wir die beiden Operatoren ineinander überführen können:

$$A(\alpha) := A_0 + \alpha B,\ \ \alpha \in [0, 1]. \tag{1.1}$$

Seien $P(\alpha)$ die Riesz-Projektoren zu einem bestimmten Teil des Spektrums von $A(\alpha)$. Wir werden in Satz 4.1 die folgende Integralformel beweisen, die sich als Variante des Adiabatischen Theorems auffassen läßt:

$$\det P(0)P(1)P(0) = \lim_{\eta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\exp\left[-2\,\mathrm{Re}\int_0^1\int_{-\infty}^0 e^{\eta t}\,\mathrm{tr}\,BG_\varepsilon(t, t+0;\alpha)\,dt\,d\alpha\right]. \tag{1.2}$$

Wie die Determinante zu verstehen ist, werden wir in Abschnitt 2.2 erläutern. Der Operator $G_\varepsilon(t, t'; \alpha)$ wird als zeitgeordneter Greenscher Operator bezeichnet. Er erfüllt die Wiener-Hopf-Gleichung ($\varphi \in \mathcal{H}$):

$$G_\varepsilon(t, t'; \alpha)\varphi = e^{-\varepsilon|t-t'|}G_0(t - t')\varphi + \alpha\int_{-\infty}^0 e^{-\varepsilon|t-\tau|}G_0(t - \tau)BG_\varepsilon(\tau, t'; \alpha)\varphi\ d\tau. \tag{1.3}$$

Der Operator G_0 ist durch A_0 bestimmt. Gleichungen dieses Typs sind von Bart, Gohberg und Kaashoek [4] studiert worden. Wir entwickeln in Abschnitt 4.3 unabhängig davon eine Lösungstheorie, wobei wir uns ganz auf die spezielle rechte Seite $e^{-\varepsilon|t-t'|}G_0(t - t')$ konzentrieren. Dadurch werden unsere Rechnungen einfacher.

Um die Bedeutung der Formel (1.2) besser erfassen zu können und die Bezeichnung Adiabatisches Theorem zu rechtfertigen, zitieren wir das klassische Adiabatische Theorem (vgl. [2]). Dieses befaßt sich mit Scharen selbstadjungierter Operatoren $H(s)$. Wir verwenden nicht die Bezeichnung $A(\alpha)$, da der Parameter s eine andere Bedeutung hat als das α in (1.1). Außerdem bleiben wir dadurch im Einklang mit der physikalischen Literatur. Wir nennen $H(s)$ auch Hamilton-Operator (vgl. die physikalische Motivation weiter unten). Sei $P(s)$ der Spektralprojektor zu einem bestimmten Teil des Spektrums von $H(s)$. Dann läßt sich $P(s)$ asymptotisch aus $P(0)$ transformieren; d.h. es gilt:

$$P(s) = U_\eta(s)P(0)U_\eta^*(s) + O(\eta),\ \ \eta \to 0, \tag{1.4}$$

wobei die Transformationsoperatoren U_η eine Schrödinger-Gleichung erfüllen:

$$i\eta\frac{d}{ds}U_\eta(s) = H(s)U_\eta(s),\ \ U_\eta(0) = \mathbb{1}. \tag{1.5}$$

Die Variable s hat die Bedeutung einer skalierten Zeit. Der Zusammenhang mit der physikalischen Zeit t ist durch $s = \eta t$ gegeben. Die Schrödinger-Gleichung (1.5) läßt sich darauf umrechnen:

$$i \frac{d}{dt} \tilde{U}_\eta(t) = H(\eta t) \tilde{U}_\eta(t), \; \tilde{U}_\eta(0) = \mathbb{1}. \tag{1.6}$$

Physikalisch bedeutet der Limes $\eta \to 0$, daß sich der Hamilton-Operator $H(\eta t)$ nur langsam mit der Zeit ändert. Die intuitive Idee hinter der Aussage des Adiabatischen läßt sich auch folgendermaßen beschreiben: Die Störung wird so behutsam eingeschaltet, daß man am Ende glaubt, sie sei schon immer eingeschaltet gewesen.

Die beiden Theoreme weisen einige Ähnlichkeiten auf. Die Spektralprojektoren lassen sich nicht direkt bestimmen, sondern hängen von den Lösungen bestimmter Gleichungen ab. Die Formeln gelten nur asymptotisch; d.h. zur exakten Berechnung sind noch Grenzprozesse auszuführen, die in beiden Fällen einen singulären Charakter haben; denn weder die Wiener-Hopf-Gleichung noch die Schrödinger-Gleichung besitzt eine wohldefinierte Grenzgleichung.

Neben diesen augenscheinlichen Gemeinsamkeiten besteht noch eine tiefere Verwandtschaft zwischen den beiden Theoremen; denn die Formel (1.2) läßt sich zumindest formal aus (1.4) herleiten. Dazu benötigen wir eine Formel für die Abschnittsdeterminanten von Lösungen von Schrödinger-Gleichungen. Diese stellt das zweite Hauptresultat dieser Arbeit dar. Wir werden sie in Abschnitt 4 beweisen. Sei $U(t, \alpha)$ die Lösung von:

$$i \frac{d}{dt} U(t, \alpha) = A(\alpha) U(t, \alpha), \; U(0, \alpha) = \mathbb{1}. \tag{1.7}$$

Dann gilt für die Abschnittsdeterminanten:

$$\det PU(T, 1)P = \det PU(T, 0)P \exp \left[- \int_0^1 \int_0^T \operatorname{tr} BG(t, t+0; \alpha) \, dt \, d\alpha \right]. \tag{1.8}$$

Dabei erfüllt G die Integral-Gleichung ($\varphi \in \mathcal{H}$):

$$G(t, t'; \alpha)\varphi = G_0(t - t')\varphi + \alpha \int_0^T G_0(t - \tau) BG(\tau, t'; \alpha) \, d\tau. \tag{1.9}$$

Solche Faltungsgleichungen auf endlichen Intervallen sind von Bart, Gohberg und Kaashoek studiert worden [3]. Wir werden ihre Resultate nicht verwenden, sondern in Abschnitt 4.3 eine Lösungstheorie angeben, die sich ganz auf die spezielle rechte Seite $G_0(t - t')$ konzentriert, wodurch wir rechnerische Umwege vermeiden können.

Abschnittsdeterminanten wie in (1.8) sind Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Als erster studierte Szegö [16] die Abschnittsdeterminanten von Toeplitz-Matrizen; deshalb werden Aussagen dieser Art allgemein als Szegö-Sätze bezeichnet. Das erste abstrakte Resultat stammt von Widom [17], der Operatoren der Form $Pe^C P$ untersucht, wobei C ein Spurklasseoperator ist. Er wendet seine Resultate auf Integraloperatoren an, wobei P der Projektor auf ein Gebiet ist. Indem er dieses Gebiet immer grösser werden läßt, erhält er differentialgeometrische Aussagen über das Integrationsgebiet, was einen Zusammenhang zur Spektralgeometrie herstellt. Dym und Ta'assan [7] konnten beschränkte Operatoren C zulassen. Das Haupthilfsmittel in beiden Arbeiten ist ein Faktorisierungsverfahren, das auf einem verallgemeinerten Additionstheorem für die operatorwertige Exponentialfunktion, der sogenannten Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, beruht. Die Frage von Widom, ob man die Determinante ohne diese Formel studieren kann, läßt sich mit (1.8) beantworten, indem man die Integralgleichung (1.9) untersucht (vgl. Abschnitt 4.3). Im Gegensatz zu diesen Arbeiten erlaubt unsere Beweismethode auch unbeschränkte Operatoren, was für Anwendungen in der Quantenmechanik wichtig ist.

Für die Anwendung auf das Adiabatische Theorem benötigen wir eine Verallgemeinerung von (1.8) (vgl. Abschnitt 4.4), die wir ohne Beweis angeben, die sich aber mit unseren Methoden behandeln läßt. Sei $U_\eta(t,\alpha)$ die Lösung von:

$$i\frac{d}{dt}U_\eta(t,\alpha) = (A_0 + \alpha e^{\eta t}B)U_\eta(t,\alpha), \ \lim_{t\to-\infty} U(-t,0)U_\eta(t,\alpha) = \mathbb{1}, \ U(0,0) = \mathbb{1}. \tag{1.10}$$

Physikalisch bedeutet dies, daß die Störung B vor unendlich langer Zeit eingeschaltet wurde; deshalb muß auch die Normierung bei $t = -\infty$ vorgenommen werden. Man erhält:

$$\det PU_\eta(0,1)P = \det PU(0,0)P \exp\left[-\int_0^1 \int_{-\infty}^0 e^{\eta t}\,\mathrm{tr}\,BG^\eta(t,t+0;\alpha)\,dt\,d\alpha\right]. \tag{1.11}$$

Dabei erfüllt G^η die Integralgleichung ($\varphi \in \mathcal{H}$):

$$G^\eta(t,t';\alpha)\varphi = G_0(t-t')\varphi + \alpha\int_{-\infty}^0 e^{\eta\tau}G_0(t-\tau)BG^\eta(\tau,t';\alpha)\varphi\,d\tau. \tag{1.12}$$

Formel (1.11) taucht erstmals bei Rivier und Simanek [15] auf, die aber nur eine formale Herleitung mittels unendlicher Reihen andeuten. (1.12) ist keine reine Faltungsgleichung; deshalb ist es naheliegend, in (1.12) den Grenzübergang $\eta \to 0$ auszuführen. Leider ist die Grenzgleichung nicht wohldefiniert. Wir führen daher einen weiteren Parameter $\varepsilon > 0$ ein:

$$G_\varepsilon^\eta(t,t';\alpha)\varphi = e^{-\varepsilon|t-t'|}G_0(t-t')\varphi + \alpha\int_{-\infty}^0 e^{\eta\tau}e^{-\varepsilon|t-\tau|}G_0(t-\tau)BG_\varepsilon^\eta(\tau,t';\alpha)\,d\tau. \tag{1.13}$$

Jetzt können wir in (1.13) den Grenzübergang $\eta \to 0$ ausführen. Dabei stellt sich natürlich die Frage, ob die Lösungen für $\eta \to 0$ konvergieren und wenn ja, ob sie gegen die Lösung der Grenzgleichung konvergieren. Auf diese Weise haben wir unser Adiabatisches Theorem wieder gewonnen. Der Parameter η in (1.2) läßt sich also als eine Art Einschaltparameter interpretieren. Der Parameter ε taucht in der physikalischen Literatur nur implizit durch die Fourier-Transformation auf. Wir werden diese Herleitung nicht streng rechtfertigen, da der Beweis in Abschnitt 5 ohne das klassische Adiabatische Theorem auskommt.

Kehren wir zu unseren Adiabatischen Theoremen zurück. Neben den Gemeinsamkeiten bestehen auch offensichtliche Unterschiede. Zunächst fallen die verschiedenen Gleichungstypen auf. Einmal ist eine Wiener-Hopf-Gleichung zu lösen, das andere mal eine Schrödinger-Gleichung. Allerdings erfüllt auch G_ε (formal) eine Differentialgleichung, nämlich:

$$(i\frac{\partial}{\partial t} - A(\alpha))G_\varepsilon(t,t';\alpha) = \delta(t-t')\mathbb{1}.$$

Der wesentlichere Unterschied sind aber die zwei Parameter in (1.2) im Gegensatz zu dem einen Parameter in (1.4). Wie wir in Abschnitt 4 sehen werden, hängen diese Parameter mit unterschiedlichen Voraussetzungen zusammen. Der Parameter η erfordert in beiden Fällen eine Lücke im Spektrum. Das rechtfertig nochmals die übereinstimmende Bezeichnung, wohingegen ε eine Lücke im Wertebereich von $A(\alpha)$ erfordert. Wir benötigen dies, damit ein bestimmter Operator keine reellen Spektralwerte besitzt. Aussagen dazu werden als Dichotomie-Kriterien bezeichnet. Damit sind wir beim dritten Hauptresultat dieser Arbeit angelangt. Da das bisherige Kriterium von Baskakov [6] für unsere Zwecke nicht ausreicht, beweisen wir in Abschnitt 3 ein neues Dichotomie-Kriterium.

Wie schon mehrfach angeklungen ist, lassen sich die untersuchten Probleme physikalisch motivieren. Dies wollen wir nun genauer ausführen. Die Quantenmechanik beschreibt ein physikalisches System durch einen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, dessen normierte Elemente des Zuständen des Systems entsprechen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System aus dem Zustand φ in den Zustand ψ übergeht, ist durch $|(\varphi,\psi)|^2$ gegeben. Eine Meßgröße oder Observable wird durch einen selbstadjungierten Operator A auf $\mathcal{H}$ dargestellt. Das Spektrum von A liefert die möglichen Meßwerte. Einen orthogonalen Projektor auf einen Vektor φ kann man auffassen als Messung, ob sich das System im Zustand φ befindet oder nicht. Eine besonders wichtige Observable ist die Gesamtenergie. Der zugehörige Operator H heißt Hamilton-Operator. Durch ihn wird das physikalische System charakterisiert. Er beherrscht auch die zeitliche Entwicklung des Systems über die Schrödinger-Gleichung:

$$i\frac{d}{dt}U(t)\varphi = HU(t)\varphi, U(0) = \mathbb{1},\ \varphi \in \mathcal{H}.$$

Man nennt den unitären Operator $U(t)$ auch Zeitentwicklungsoperator. Er beschreibt die zeitliche Veränderung der Zustände.

Wir stellen uns die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein System in seinen Ausgangszustand zurückkehrt. Genauer: Das System starte im Zustand φ und entwickle sich gemäß der Schrödinger-Gleichung bis zum Zeitpunkt t. Dann ist es im Zustand $U(t)\varphi$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung den Zustand φ wieder vorzufinden? Nach dem oben gesagten müssen wir dazu das Skalarprodukt $(\varphi, U(t)\varphi)$ studieren.

Wir betrachten zwei Hamilton-Operatoren, nämlich ungestörten Operator H_0 und einen gestörten Operator $H := H_0+V$. Den Übergang von H_0 zu H interpretieren wir als plötzliches Einschalten des Störpotentials V.[1] Man denke beispielsweise an Elektronen und ein spontan eingeschaltetes Magnetfeld. Die Operatoren H_0 und H mögen ein rein diskretes Spektrum mit den zugehörigen Eigenvektoren φ_j und ψ_j, $j \in \mathbb{N}$, besitzen. Wir fragen danach, wie wahrscheinlich es ist, daß das System beim Einschalten der Störung V vom Zustand φ_j in den Zustand ψ_k übergeht; d.h. wie groß ist $|(\varphi_j, \psi_k)|^2$? Der Hamilton-Operator repräsentiert die Gesamtenergie; deshalb ist insbesondere die Frage interessant, ob das System aus einem Zustand niedrigster Energie wieder in einen solchen Zustand übergeht.

Bisher haben wir ganz allgemein über quantenmechanische Systeme gesprochen. Wir richten unser Augenmerk nun auf die Vielteilchenphysik, und zwar auf Systeme, die aus N identischen Fermionen bestehen.[2] Ein einzelnes Fermion werde durch einen Hilbert-Raum $\mathcal{H}_1$, den Einteilchenraum, beschrieben. Gemäß allgemeiner Prinzipien ist der Hilbert-Raum $\mathcal{H}_N$, der N-Teilchenraum, des Gesamtsystems aus N Fermionen durch das N-fache antisymmetrische Tensorprodukt von $\mathcal{H}_1$ mit sich selbst gegeben:

$$\mathcal{H}_N := \underbrace{\mathcal{H}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{H}_1}_{N\text{-mal}}.$$

[1] Natürlich handelt es sich hierbei um eine Idealisierung, da ein Einschaltvorgang immer eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt.

[2] Fermionen sind Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen. Für das folgende ist das nicht weiter wichtig. Worauf es ankommt, ist das antisymmetrische Tensorprodukt. Im Gegensatz dazu gehört zu Spin-1-Teilchen oder Bosonen das symmetrische Tensorprodukt.

Skalarprodukte im N-Teilchenraum lassen sich durch Skalarprodukte im 1-Teilchenraum ausdrücken:

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_N, \psi_1 \wedge \ldots \psi_N) = \det((\varphi_j, \psi_k))_{j,k=1,\ldots,N}.$$

Wir unterstellen, daß die einzelnen Teilchen nicht miteinander wechselwirken.[3] Dann können wir auch den N-Teilchen Hamilton-Operator H_N und den Zeitentwicklungsoperator $U_N(t)$ durch die entsprechenden Einteilchengrößen H_1 und $U_1(t)$ ausdrücken:

$$H_N = H_1 \wedge \mathbb{1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{1} + \cdots + \mathbb{1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{1} \wedge H_1,\ U_N(t) = U_1(t) \wedge \ldots \wedge U_1(t).$$

Die Formel für den Hamilton-Operator drückt die Tatsache aus, daß ohne Wechselwirkung die Energien der einzelnen Teilchen einfach zur Gesamtenergie aufaddiert werden.

Die oben gestellten Fragen nach gewissen Wahrscheinlickeiten hatten uns auf verschiedene Skalarprodukte geführt. Diese können wir im Falle eines N-Teilchensystems auf Größen im Einteilchenraum reduzieren. Wir haben nämlich:

$$\begin{aligned}(\varphi^N, U_N(t)\varphi^N) = (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_N, U(t)\varphi_1 \wedge \ldots \wedge U(t)\varphi_N) &= \det((\varphi_j, U(t)\varphi_k)_{j,k=1,\ldots,N}) \\ &= \det P_N U(t) P_N.\end{aligned}$$

Dabei ist P_N der orthogonale Projektor auf $\operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$. Die Determinante ist als Determinante des endlichdimensionalen Operators $PU(t)P : \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} P$ zu verstehen. Die letzte Gleichheit folgt leicht aus

$$P_N = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j, \cdot)\varphi_j.$$

Auf ähnliche Weise erhält man die folgende Formel (vgl. Abschnitt 2.2):

$$|(\varphi^N, \psi^N)|^2 = |(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_N, \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_N)|^2 = |\det((\varphi_j, \psi_k)_{j,k=1,\ldots,N})|^2 = \det P_N \tilde{P}_N P_N.$$

Mit dem orthogonalen Projektor auf $\operatorname{span}\{\psi_1, \ldots, \psi_N\}$.

Das Verhalten von $\det P_N \tilde{P}_N P_N$ spielt in der Physik eine Rolle beim sogenannten X-ray-edge Effekt und wurde zum erstenmal von Anderson untersucht [1]. Das Problem dabei ist, daß man eigentlich an freien Teilchen im $\mathbb{R}^d$ interessiert ist, die plötzlich einem Störpotential ausgesetzt werden. Das Spektrum des Hamilton-Operators ist in diesem Fall aber kontinuierlich, so daß sich unser Adiabatisches Theorem, das gewisse Lückenbedingungen voraussetzt, nicht anwenden läßt. Schränkt man die Teilchen auf ein endliches Gebiet mit der Abmessung L ein, lassen sich Aussagen über das Verhalten der Determinante gewinnen. Anderson leitete eine Abschätzung ab, indem er mit asymptotischen Formeln für große N arbeitete. Allerdings vernachlässigte er dabei die Korrekturterme, die noch von L abhängen und zwar gemäß $O(L)$ für große L. Sein Resultat ist seitdem in der Physik als Andersonsches Orthogonalitäts Theorem oder Orthogonalitätskatastrophe bekannt. Rivier und Simanek [15] sowie Hamann [8] verwendeten das klassische Adiabatische Theorem und die die Formel (1.11) für ein spezielles V, um die genaue Asymptotik für große Teilchenzahlen N abzuleiten. Diese Arbeiten enthalten jedoch einige mathematische Fehler, so daß die Ergebnisse als unbewiesen gelten müssen.[4] Yamada und Yosida [18] haben versucht, allgemeine Potentiale V zu behandeln.

[3] Diese Situation ist physikalisch angenähert realisiert bei Elektronen in einem Kristallgitter.

[4] In der physikalischen Literatur sind die Resultate trotzdem weitestgehend akzeptiert.

Ihre Rechnungen beruhen aber auf einem fehlerhaften Verfahren zur Lösung der Wiener-Hopf-Gleichung. Die später von ihnen angegebene Modifikation (vgl. [19]) ist mathematisch undurchschaubar. Die genaue Analyse der Abschittsdeterminanten insbesondere für große N muß also noch als ein offenes Problem gelten, für das die in dieser Arbeit entwickelten Methoden strenge Lösungsansätze liefern.

Die Arbeit ist wie folgt organisiert. In Kapitel 2 stellen wir die nötigen Hilfsmittel für unsere Untersuchungen zusammen. Kapitel 3 stellt das Dichotomie-Kriterium zur Verfügung, das wir bei der Integralformel für die Riesz-Projektoren benötigen werden. Diese beweisen wir in Kapitel 5. Wir haben die Integralformel für die Abschnittsdeterminanten von Gruppen beschränkter Operatoren davor gestellt, da sich die rechnerische Seite des Beweises schon hier erkennen läßt. Im letzten Kapitel 6 stellen wir einige mehr konkrete Untersuchungen an, die sich mit unitären Operatoren und Spektralprojektoren beschäftigen.[5]

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Kreß für die Betreuung bei dieser Arbeit sowie Herrn Prof. Schönhammer danken, der mich auf diese interessante Fragestellung aufmerksam gemacht hat.

[5]Dieses Kapitel ist als überholt zu betrachten, da es dem Verfasser in der Zwischenzeit gelungen ist, wesentlich genauere und allgemeinere Kriterien abzuleiten.

2 Präliminarien

2.1 Allgemeine Bemerkungen

Im weiteren bezeichnet $\mathcal{H}$ grundsätzlich einen separablen komplexen Hilbert-Raum. Falls $\mathcal{H}$ endlichdimensional ist, werden wir dies ausdrücklich erwähnen. Das Skalarprodukt in $\mathcal{H}$ ist linear im zweiten Argument. Alle auftretenden Operatoren sind linear, so daß wir nicht mehr darauf hinweisen werden. Mit $D(S) \subset \mathcal{H}$ bezeichnen wir den Definitionsbereich des Operators $S : D(S) \to \mathcal{H}$. Wir setzen stets voraus, daß $D(S)$ dicht liegt. $\operatorname{ran} S$ ist der Bildbereich von S.

Wir erinnern an einige einfache Tatsachen über die Analysis in Hilbert-Räumen. Als Standardreferenz sei auf [9] verwiesen. Die Stetigkeit vektorwertiger Funktionen wird in der üblichen Weise über die Norm erklärt. Bei operatorwertigen Funktionen $S(\cdot) : x \mapsto S(x)$ gibt es mehrere Möglichkeiten, die Stetigkeit einzuführen. Handelt es sich um beschränkte Operatoren, kann man die Definition auf die Operatornorm gründen. Wir sprechen dann von Stetigkeit bzgl. der Operatornorm. Man kann aber auch für beliebiges aber festes $\varphi \in \mathcal{H}$ die Funktion $\varphi(\cdot) : x \mapsto S(x)\varphi$ betrachten und hier Stetigkeit über die Hilbert-Raum-Norm einführen. Wir sagen dann, $S(\cdot)$ sei stark stetig.

Entprechendes gilt für die Differentiation vektor- oder operatorwertiger Funktionen. Die üblichen Rechenregeln lassen sich auf den allgemeinen Fall übertragen, solange man beachtet, daß die vorkommenden Operatoren im allgemeinen nicht kommutieren.

Integrale sehen wir stets als Riemann-Integrale an. Falls wir operatorwertige Funktionen integrieren müssen, unterscheiden wir wieder zwischen einem Integral bzgl. der Operatornorm oder einem starken Integral. Komplexe Kurvenintegrale längs eines Weges $\Gamma \subset \mathbb{C}$ werden wie üblich definiert. Einen geschlossenen, hinreichend glatten und positiv orientierten Weg in der komplexen Ebene nennen wir im weiteren kurz Integrationsweg. Wir benötigen des öfteren die Standardabschätzung für Integrale:

$$\| \int_\Gamma F(x)\, dx \| \leq |\Gamma| \sup_{x \in \Gamma} \|F(x)\|.$$

Dabei ist $|\Gamma|$ die Länge des Integrationsweges, der ein Intervall in $\mathbb{R}$ oder ein Integrationsweg in $\mathbb{C}$ sein kann. F ist eine beschränkte, integrierbare vektor- oder operatorwertige Funktion. Weiterhin gilt für beschränkte Operatoren $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$:

$$\int_\Gamma SF(x)\, dx = S \int_\Gamma F(x)\, dx.$$

Für allgemeine lineare Operatoren muß dies nicht richtig sein.

2.2 Hilfsmittel aus der linearen Algebra

Wir zitieren einige einfache Aussagen über Spurklasseoperatoren (vgl. [12]). Ein linearer beschränkter Operator $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt Spurklasseoperator, falls für ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}$ die Reihe

$$\operatorname{tr} S := \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j, S\varphi_j)$$

absolut konvergiert. In diesem Fall konvergiert die Reihe für jedes beliebige Orthonormalsystem absolut, und der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl des Orthonormalsystems. Wir nennen $\operatorname{tr} S$ die Spur von S.

Satz 2.1. *Seien $S_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein Spurklasseoperator und $S_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator. Dann sind auch S_1S_2 und S_2S_1 Spurklasseoperatoren, und es gilt:*

$$\operatorname{tr} S_1S_2 = \operatorname{tr} S_2S_1.$$

Beweis. Siehe [12]. □

Satz 2.2. *Sei $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein Spurklasseoperator. Dann ist auch der adjungierte Operator $S^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein Spurklasseoperator, und es gilt:*

$$\operatorname{tr} S^* = (\operatorname{tr} S)^*.$$

Dabei bedeutet * auf der rechten Seite die komplexe Konjugation.

Beweis. Wir haben:

$$\operatorname{tr} S^* = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j, S^*\varphi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (S\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j, S\varphi_j)^* = (\operatorname{tr} S)^*.$$

Das war zu zeigen. □

Satz 2.3. *Sei $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein orthogonaler Projektor mit N-dimensionalem Bild. Dann gilt:*

1. *P ist ein Spurklasseoperator.*

2. *Sei $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator. Dann gilt:*

$$|\operatorname{tr} PS| \leq N\|S\|.$$

3. *Sei $S(\beta) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine Schar beschränkter Operatoren, die stark stetig von $\beta \in \mathbb{R}$ abhängen mögen.[1] Dann ist die Abbildung $\beta \mapsto \operatorname{tr} PS(\beta)$ stetig.*

Beweis. Es gibt ein Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\} \subset \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft:

$$P = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j, \cdot)\varphi_j.$$

[1] In den Abschnitten 2.2, 2.3 und 2.4 bezeichnen wir den Scharparameter grundsätzlich mit β, um nicht mit den verschiedenen Parametern in Kapitel 5 in Konflikt zu geraten.

Es reicht, zur Berechnung der Spur das Orthonormalsystem $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ zu verwenden:

$$\operatorname{tr} P = \sum_{j=1}^{N} \|\varphi_j\|^2 = N < \infty.$$

Das zeigt 1. Entsprechend folgt 2.:

$$|\operatorname{tr} PS| = |\sum_{j=1}^{N} (\varphi_j, S\varphi_j)| \leq \sum_{j=1}^{N} \|S\| \|\varphi_j\|^2 = N\|S\|.$$

Schließlich gilt:

$$\operatorname{tr} PS(\beta) = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j, S(\beta)\varphi_j).$$

Die Abbildung $\beta \mapsto (\varphi_j, S(\beta)\varphi_j)$ ist stetig. Damit ist $\operatorname{tr} PS(\beta)$ als Summe aus endlich vielen stetigen Funktionen wieder stetig. Somit ist 3. bewiesen. □

Wir erklären die Determinante endlichdimensionaler Operatoren wie gewöhnlich als normierte, alternierende Multilinearform auf den Spaltenvektoren der entsprechenden Matrix. Aus der linearen Algebra ist bekannt, daß diese Definition unabhängig von der Wahl der Basis ist. Es besteht eine einfache aber wichtige Beziehung zwischen Determinante und Spur, die Grundlage für die Abschnitte 4 und 5 ist.

Satz 2.4. *Seien $\mathcal{H}$ ein endlichdimensionaler Hilbert-Raum und $S(\beta) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$, eine Schar invertierbarer Operatoren, die stetig differenzierbar von β abhängen mögen. Dann gilt die Formel:*

$$\frac{d}{d\beta} \ln \det S(\beta) = \operatorname{tr}(S^{-1}(\beta) S'(\beta)).$$

Dabei bezeichnet $'$ die Ableitung nach β.

Beweis. Sei $N := \dim \mathcal{H}$. Seien $s_1(\beta), \dots, s_N(\beta)$ die Spaltenvektoren von $S(\beta)$. Dann ist:

$$\frac{d}{d\beta} \det S(\beta) = \sum_{k=1}^{N} \det(s_1(\beta), \dots, s_{k-1}(\beta), s_k'(\beta), s_{k+1}(\beta), \dots, s_N(\beta)).$$

Seien s_{jk} die Einträge von S. Wir entwickeln den k-ten Summanden nach der k-ten Spalte:

$$\det(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k', s_{k+1}, \dots, s_N) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+k} D_{jk} s_{jk}'.$$

Dabei ist D_{jk} der jk-te Kofaktor von S. Wir erhalten somit

$$\frac{d}{d\beta} \det S(\beta) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+k} D_{jk}(\beta) s_{jk}'(\beta) = \operatorname{tr} D(\beta) S'(\beta)$$

mit $D(\beta) := ((-1)^{j+k} D_{kj}(\beta))_{j,k=1,\dots,N}$. Nach der Cramerschen Regel ist $D(\beta) = \det(S(\beta)) \cdot S^{-1}(\beta)$. Das zeigt die Behauptung. □

Wir wollen die Formel in Satz 2.4 aufintegrieren. Dazu benötigen wir eine Aussage über das Stetigkeitsverhalten von $S^{-1}(\beta)$.

Satz 2.5. *Sei $S(\beta) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\beta_0 \le \beta \le \beta_1$, eine Schar invertierbarer beschränkter Operatoren, die stetig bzgl. der Operatornorm von β abhängen mögen. Dann ist auch $S^{-1}(\beta)$ beschränkt und hängt bzgl. der Operatornorm stetig von β ab.*

Beweis. Nach dem Homöomorphiesatz ist $S^{-1}(\beta)$ beschränkt. Wir zeigen die stetige Abhängigkeit. Es gilt:

$$S(\beta + h) = S(\beta)(\mathbb{1} + S^{-1}(\beta)(S(\beta + h) - S(\beta))).$$

Sei $0 < C < 1$. $S(\cdot)$ ist stetig. Also gibt es ein $h_0 > 0$, so daß für alle h mit $|h| \le h_0$ gilt:

$$\|S^{-1}(\beta)\|\|S(\beta + h) - S(\beta)\| \le C < 1.$$

Dann liefert die Neumannsche Reihe die Abschätzung:

$$\|S(\beta + h)^{-1}\| \le \frac{\|S^{-1}(\beta)\|}{1 - C}.$$

Wir haben weiter:

$$\begin{aligned} \|S^{-1}(\beta + h) - S^{-1}(\beta)\| &\le \|S^{-1}(\beta + h)\|\|S(\beta) - S(\beta + h)\|\|S^{-1}(\beta)\| \\ &\le \frac{\|S^{-1}(\beta)\|^2}{1 - C}\|S(\beta + h) - S(\beta)\|. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit. □

Wir können nun in trivialer Weise Satz 2.4 umrechnen.

Korollar 2.6. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.4 gilt:*

$$\det S(\beta_1) = \det S(\beta_0) \exp\left[\int_{\beta_0}^{\beta_1} \operatorname{tr} S^{-1}(\beta) S'(\beta)\, d\beta\right].$$

Beweis. Integration und Exponentialbildung in Satz 2.4. □

Wie die Spur so läßt sich auch die Definition der Determinante auf beliebige separable Hilbert-Räume ausdehnen. Für das weitere reicht uns hier ein Spezialfall, nämlich die Determinante von Operatoren der Gestalt PSP, wobei P ein orthogonaler Projektor auf einen endlichdimensionalen Unterraum ist. Wir erklären $\det PSP$ einfach als:[2]

$$\det PSP := \det(PSP : \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} P).$$

Im weiteren sind alle Determinanten von Operatoren der Form PSP stets in diesem Sinne zu verstehen.

Seien $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{H}$ und $\{\psi_j\} \subset \mathcal{H}$ zwei Orthonormalsysteme. Wir bilden die Determinante:

$$\Delta_N := \det \begin{pmatrix} (\varphi_1, \psi_1) & \cdots & (\varphi_1, \psi_N) \\ \vdots & & \vdots \\ (\varphi_N, \psi_1) & \cdots & (\varphi_N, \psi_N) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Δ_N läßt sich in eine Gestalt bringen, die der analytischen Behandlung zugänglicher ist.

[2] In $PSP : \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} P$ können wir PSP natürlich durch PS ersetzen. Da wir aber Operatoren häufig sowohl auf $\operatorname{ran} P$ als auch auf ganz $\mathcal{H}$ betrachten werden, verwenden wir stets die Schreibweise PSP.

Lemma 2.7. *Seien $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ Orthonormalsysteme und P_N der orthogonale Projektor auf* $\operatorname{span}\{\varphi_1,\dots,\varphi_N\}$ *und $\tilde{P}_N$ der orthogonale Projektor auf* $\operatorname{span}\{\psi_1,\dots,\psi_N\}$. *Dann läßt sich Δ_N aus (2.1) schreiben als:*

$$|\Delta_N|^2 = \det P_N \tilde{P}_N P_N.$$

Beweis. Sei $Z := ((\varphi_j,\psi_k))_{j,k=1,\dots,N}$. Nach dem Determinanten-Multiplikationssatz ist:

$$|\det Z|^2 = \det Z(\det Z)^* = \det Z \det Z^* = \det ZZ^*.$$

Wir berechnen ZZ^*:

$$(ZZ^*)_{j,k} = \sum_{l=1}^{N} (\varphi_j,\psi_l)(\psi_l,\varphi_k) = \left(\varphi_j, \sum_{l=1}^{N} (\psi_l,\varphi_k)\psi_l\right).$$

Der eindeutig bestimmte orthogonale Projektor auf $\operatorname{span}\{\psi_1,\dots,\psi_N\}$ hat die Form:

$$\tilde{P}_N = \sum_{l=1}^{N} (\psi_l,\cdot)\psi_l$$

Damit erhalten wir:

$$(ZZ^*)_{jk} = (\varphi_j, \tilde{P}_N\varphi_k).$$

Das sind die Matrixelemente von $\tilde{P}_N$ in der Basis $\{\varphi_j\}$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Im Zusammenhang mit den Integralformeln in den Abschnitten 4 und 5 benötigen wir die Inverse eines Operators bzgl. eines Unteraumes.

Satz 2.8. *Seien $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator und $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein orthogonaler Projektor, so daß der Operator $(PSP|_{\operatorname{ran} P})^{-1} : \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} P$ existiert. Wir erklären den Operator $S^+ : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ folgendermaßen. Zunächst definieren wir:*

$$S^+\varphi := \begin{cases} (PSP|_{\operatorname{ran} P})^{-1}\varphi & \textit{für } \varphi \in \operatorname{ran} P, \\ 0 & \textit{für } \varphi \in (\operatorname{ran} P)^\perp \end{cases}$$

und setzen S^+ dann linear auf ganz $\mathcal{H}$ fort. Dann gilt $S^+ = S^+P = PS^+$ sowie $S^+SP = PSS^+ = P$. Falls S und P kommutieren, ist weiter $SS^+ = S^+S = P$. Wir nennen S^+ Pseudoinverse von S bzgl. P.

Beweis. Wir haben:

$$S^+\varphi = S^+ \underbrace{P\varphi}_{\in \operatorname{ran} P} + S^+ \underbrace{(\mathbb{1}-P)\varphi}_{\in \operatorname{ran}(\mathbb{1}-P)} = S^+P\varphi + 0.$$

Also ist $S^+ = S^+P$. Da $S^+ : \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} P$ abbildet, folgt $S^+P\varphi \in \operatorname{ran} P$ und damit $S^+P\varphi = PS^+P\varphi$. Das gibt $S^+ = PS^+$.

Weiter ist:

$$S^+SP\varphi = S^+PSP\varphi + S^+(\mathbb{1}-P)SP\varphi = P\varphi + 0$$

sowie mit dem ersten Teil:

$$PSS^+\varphi = PSPS^+\varphi = P\varphi.$$

Falls S und P kommutieren, folgt aus dem bisher bewiesenen:

$$\begin{aligned} SS^+ &= SPS^+ = PSS^+ = P \\ S^+S &= SPS = S^+SP = P. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. $\square$

Wir rechnen die Determinantenformel aus Korollar 2.6 für orthogonale Projektoren weiter.

Lemma 2.9. *Sei $P(\beta) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $0 \le \beta \le 1$, eine Schar orthogonaler Projektoren, die stetig differenzierbar bzgl. der Operatornorm von β abhängen mögen. Weiter sei $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein orthogonaler Projektor mit endlichdimensionalem Bild und der Eigenschaft, daß $\det PP(\beta)P \neq 0$ für alle $\beta \in [0,1]$ ist. Dann ist:*

$$\det PP(1)P = \det PP(0)P \exp\left[2\,\mathrm{Re}\int_0^1 \mathrm{tr}\, P^+(\beta)(\mathbb{1} - P(\beta))P'(\beta)P(\beta)\, d\beta\right]. \tag{2.2}$$

Dabei ist $P^+(\beta)$ die Pseudoinverse von $P(\beta)$ bzgl. P gemäß Satz 2.8.

Beweis. Da $P(\beta)$ stetig differenzierbar nach β und $\det PP(\beta)P \neq 0$ ist, können wir Korollar 2.6 auf den endlichdimensionalen Operator $PP(\beta)P : \mathrm{ran}\, P \to \mathrm{ran}\, P$ anwenden:

$$\det PP(1)P = \det PP(0)P \exp\left[\int_0^1 \mathrm{tr}\, P^+(\beta)P'(\beta)\, d\beta\right].$$

Dabei haben wir $P^+(\beta) = PP(\beta)$ beachtet (Satz 2.8). Differentiation der Identität $P(\beta) = P(\beta)^2$ liefert:

$$P'(\beta) = P(\beta)P'(\beta) + P'(\beta)P(\beta). \tag{2.3}$$

Mit $P(\beta)$ sind auch $P^+(\beta)$ und $P'(\beta)$ selbstadjungiert. Wir beachten noch $\mathrm{tr}\, S^* = (\mathrm{tr}\, S)^*$ nach Satz 2.2 und rechnen:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\, P^+(\beta)P'(\beta) &= \mathrm{tr}\, P^+(\beta)[P(\beta)P'(\beta) + P'(\beta)P(\beta)] \\ &= \mathrm{tr}\, P^+(\beta)P(\beta)P'(\beta) + \mathrm{tr}\, P^+(\beta)P'(\beta)P(\beta) \\ &= (\mathrm{tr}\, P'(\beta)P(\beta)P^+(\beta))^* + \mathrm{tr}\, P^+(\beta)P'(\beta)P(\beta) \\ &= (\mathrm{tr}\, P^+(\beta)P'(\beta)P(\beta))^* + \mathrm{tr}\, P^+(\beta)P'(\beta)P(\beta) \\ &= 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, P^+(\beta)P'(\beta)P(\beta). \end{aligned}$$

Dabei haben wir mehrmals $P(\beta)^2 = P(\beta)$ benutzt. Wir multiplizieren Gleichung (2.3) mit $P(\beta)$ und finden:

$$P(\beta)P'(\beta)P(\beta) = 0.$$

Daraus folgt:

$$P'(\beta)P(\beta) = (\mathbb{1} - P(\beta))P'(\beta)P(\beta).$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung. $\square$

Wir benötigen noch eine Aussage über das Stetigkeitsverhalten von Projektoren.

Lemma 2.10. *Sei $P(\beta)$ eine Schar von Projektoren, die stetig von β abhängen mögen. Dann ist $\dim \mathrm{ran}\, P(\beta) = const.$*

Beweis. [10], Lemma I.4.10 und Problem III.3.31. $\square$

2.3 Riesz-Projektoren

Die Resolventenmenge $\rho(S)$ eines abgeschlossenen und dicht definierten Operators $S : D(S) \to \mathcal{H}$ ist erklärt als Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die der Operator $(z\mathbb{1} - S)^{-1} : \mathcal{H} \to D(S)$, die Resolvente, existiert und beschränkt ist.[3] Die Menge $\sigma(S) := \mathbb{C} \setminus \rho(S)$ heißt Spektrum von S. Wir untersuchen, wie $\rho(S)$ von z und S abhängt.

Satz 2.11. *Seien $S_0 : D(S_0) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Operator und $z_0 \in \rho(S_0)$. Seien weiter $S_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator und $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft:*

$$(|z - z_0| + \|S_1\|)\|(z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}\| < 1. \tag{2.4}$$

Wir setzen $S := S_0 + S_1$. Dann ist $z \in \rho(S)$, und es gilt:

$$\|(z\mathbb{1} - S)^{-1} - (z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}\| \leq (|z - z_0| + \|S_1\|)\frac{\|(z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}\|^2}{1 - (|z - z_0| + \|S_1\|)\|(z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}\|}. \tag{2.5}$$

Beweis. Nach Voraussetzung existiert $(z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ und ist beschränkt. Wir rechnen:

$$z\mathbb{1} - S = z_0\mathbb{1} - S_0 + (z - z_0)\mathbb{1} - S_1 = (z_0\mathbb{1} - S_0)(\mathbb{1} + (z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}((z - z_0)\mathbb{1} - S_1)).$$

Aus der Voraussetzung (2.4) folgt:

$$\|(z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}((z - z_0)\mathbb{1} - S_1)\| \leq \|(z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}\|(|z - z_0| + \|S_1\|) < 1.$$

Die Neumannsche Reihe liefert, daß $(z\mathbb{1} - S)^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ existiert und beschränkt ist mit:

$$\|(z\mathbb{1} - S)^{-1}\| \leq \frac{\|(z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}\|}{1 - \|(z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}\|(|z - z_0| + \|S_1\|)}. \tag{2.6}$$

Also ist $z \in \rho(S)$. Aus (2.6) und der Beziehung

$$(z\mathbb{1} - S)^{-1} - (z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1} = (z\mathbb{1} - S)^{-1}(S_1 + (z_0 - z)\mathbb{1})(z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}$$

erhalten wir die Abschätzung (2.5):

$$\begin{aligned}\|(z\mathbb{1} - S)^{-1} - (z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}\| &\leq (|z - z_0| + \|S_1\|)\|(z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}\|\|(z\mathbb{1} - S)^{-1}\| \\ &\leq (|z - z_0| + \|S_1\|)\frac{\|(z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}\|^2}{1 - \|(z_0\mathbb{1} - S_0)^{-1}\|(|z - z_0| + \|S_1\|)}.\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. □

Aus diesem Satz folgt, daß die Resolventenmenge offen und das Spektrum damit abgeschlossen ist. Die Abbildung $z \mapsto (z\mathbb{1} - S)^{-1}$ ist auf $\rho(S)$ stetig bzgl. der Operatornorm und somit Riemann-integrierbar bzgl. der Operatornorm. Damit können wir den für das weitere grundlegenden Begriff einführen.

[3] Ein linearer Operator, dessen Inverse beschränkt ist, ist notwendigerweise abgeschlossen, so daß die Forderung nach Abgeschlossenheit bei der Definition der Resolventenmenge vernünftig ist. Umgekehrt folgt aus der Abgeschlossenheit von S und der Existenz der Resolvente deren Beschränktheit (Homöomorphiesatz).

Definition 2.12. *Sei $S : D(S) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Operator. Es gebe einen Integrationsweg $\Gamma \subset \rho(S)$. Dann heißt*

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z\mathbb{1} - S)^{-1} \, dz \tag{2.7}$$

Riesz-Projektor von S bzgl. Γ. Der Teil von $\sigma(S)$, der innerhalb von Γ liegt, wird als die Spektralmenge von S bzgl. Γ bezeichnet.

Falls die Spektralmenge von S bzgl. Γ leer ist, ist $P = 0$. Falls sie mit ganz σ übereinstimmt, haben wir $P = \mathbb{1}$. Wir notieren die wichtigsten Eigenschaften von Riesz-Projektoren.

Satz 2.13. *Seien $S : D(S) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen und P der Riesz-Projektor zu S gemäß Definition 2.12 bzgl. des Integrationsweges $\Gamma \subset \rho(S)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *$P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist beschränkt.*
2. *$P^2 = P$.*
3. *$P\varphi \in D(S)$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$.*
4. *$SP\varphi = PS\varphi$ für alle $\varphi \in D(S)$.*
5. *$SP : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist beschränkt.*
6. *Der Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ läßt sich als direkte Summe schreiben: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ mit $\mathcal{H}_1 := \operatorname{ran} P$ und $\mathcal{H}_2 = \operatorname{ran}(\mathbb{1} - P)$.*
7. *Seien $\sigma_1(S)$ die Spektralmenge von S bzgl. Γ und $\sigma_2(S) := \sigma(S) \setminus \sigma_1(S)$. Die eingeschränkten Operatoren $PSP : \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} P$ und $(\mathbb{1} - P)S(\mathbb{1} - P) : \operatorname{ran}(\mathbb{1} - P) \to \operatorname{ran}(\mathbb{1} - P)$ haben die Spektren $\sigma_1(S)$ bzw. $\sigma_2(S)$. Weiter ist die eingeschränkte Resolvente gleich der Resolvente der Einschränkung.*

Beweis. [10], Abschnitt III.4.6. □

Korollar 2.14. *Seien $S : D(S) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen und P der Riesz-Projektor zu S bzgl. des Integrationsweges $\Gamma \subset \rho(S)$. Sei $\dim \operatorname{ran} P = N < \infty$. Dann enthält die Spektralmenge von S bzgl. Γ genau N Eigenwerte (mit Vielfachheit gezählt) und sonst keine weiteren Spektralwerte.*

Beweis. Da $\operatorname{ran} P$ ein N-dimensionaler Vektorraum ist, hat der Operator $PSP : \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} P$ genau N Eigenwerte (mit Vielfachheit gezählt). Nach Satz 2.13 stimmt das Spektrum von $PSP : \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} P$ mit der Spektralmenge von S bzgl. Γ überein. □

Satz 2.15. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 2.13 sei S selbstadjungiert. Dann ist der entsprechende Riesz-Projektor ebenfalls selbstadjungiert, d.h. ein orthogonaler Projektor.*

Beweis. [10], Abschnitt V.3.5. □

Aus Satz 2.11 folgt, daß Riesz-Projektoren stetig von Störungen abhängen. Wir wollen das an dieser Stelle nicht präzisieren, sondern verweisen auf Abschnitt 5. Unter gewissen Voraussetzungen hängen Riesz-Projektoren auch differenzierbar von Störungen ab. Uns reicht hier ein Spezialfall.

Satz 2.16. *Seien $S_0 : D(S_0) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen und $S_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkt. Wir schreiben $S(\beta) := S_0 + \beta S_1$, $\beta \in \mathbb{R}$. $S_0 = S(0)$ besitze einen Riesz-Projektor $P(0)$ bzgl. des Integrationsweges $\Gamma \subset \rho(S_0)$. Dann gibt es ein $\beta_0 > 0$, so daß für alle $\beta \in]-\beta_0, \beta_0[$ auch $\Gamma \subset \rho(S(\beta))$ ist, und die zugehörigen Riesz-Projektoren $P(\beta)$ sind auf $]-\beta_0, \beta_0[$ stetig differenzierbar nach β; d.h. der Grenzwert $P'(\beta) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(P(\beta+h) - P(\beta))$ existiert in der Operatornorm und hängt stetig bzgl. der Operatornorm von β ab. Es gilt:*

$$P'(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1} S_1 (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}\, dz. \tag{2.8}$$

Beweis. Sei $z \in \rho(S_0)$. Dann gilt:

$$z\mathbb{1} - S(\beta) = z\mathbb{1} - (S_0 + \beta S_1) = (z\mathbb{1} - S_0)(\mathbb{1} - \beta(z\mathbb{1} - S_0)^{-1} S_1).$$

Nach Satz 2.11 ist die Funktion $z \mapsto \|(z\mathbb{1} - S_0)^{-1}\|$ stetig auf $\rho(S_0)$ und nimmt deshalb auf der kompakten Menge $\Gamma \subset \rho(S_0)$ ihr Maximum an:

$$m := \max_{z\in\Gamma} \|(z\mathbb{1} - S_0)^{-1}\| < \infty.$$

Damit können wir abschätzen:

$$\|\beta(z\mathbb{1} - S_0)^{-1} S_1\| \le |\beta| m \|S_1\|.$$

Wir wählen $\beta_0 > 0$ so, daß $\beta_0 m \|S_1\| < 1$ ist. Dann liefert die Neumannsche Reihe für alle $\beta \in]-\beta_0, \beta_0[$ und alle $z \in \Gamma$, daß $(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}$ existiert und beschränkt ist mit:

$$\|(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}\| \le \frac{m}{1 - \beta_0 m \|S_1\|}.$$

Wir zeigen die Konvergenz des Differenzenquotienten gegen den Ausdruck (2.8). Seien $z \in \Gamma$, $\beta \in]-\beta_0, \beta_0[$ und h hinreichend klein:

$$\begin{aligned}
&(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1} S_1 (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1} - \frac{1}{h}\left[(z\mathbb{1} - S(\beta+h))^{-1} - (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}\right] \\
&= (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1} S_1 (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1} - (z\mathbb{1} - S(\beta+h))^{-1} S_1 (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1} \\
&= \left[(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1} - (z\mathbb{1} - S(\beta+h))^{-1}\right] S_1 (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1} \\
&= -h(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1} S_1 (z\mathbb{1} - S(\beta+h))^{-1} S_1 (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Abschätzung für $\beta \in]-\beta_0, \beta_0[$:

$$\begin{aligned}
\| \int_\Gamma (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1} S_1 (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}\, dz - \frac{1}{h} \int_\Gamma (z\mathbb{1} - S(\beta+h))^{-1} - (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}\, dz \| \\
\le |\Gamma| m^2 \|S_1\|^2 \frac{m}{1 - h_0 m \|S_1\|} |h|.
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Differenzierbarkeit und die Formel (2.8).

Wir zeigen mit (2.8), daß $P'(\beta)$ auf $]-\beta_0, \beta_0[$ stetig in β ist. Dazu verwenden wir eine ähnliche Formel wie eben ($\beta_1, \beta_2 \in]-\beta_0, \beta_0[$):

$$\begin{aligned}
&(z\mathbb{1} - S(\beta_2))^{-1} S_1 (z\mathbb{1} - S(\beta_2))^{-1} - (z\mathbb{1} - S(\beta_1))^{-1} S_1 (z\mathbb{1} - S(\beta_1))^{-1} \\
&\quad = (\beta_1 - \beta_2)(z\mathbb{1} - S(\beta_2))^{-1} S_1 \left[(z\mathbb{1} - S(\beta_2))^{-1} + (z\mathbb{1} - S(\beta_1))^{-1}\right] S_1 (z\mathbb{1} - S(\beta_1))^{-1},
\end{aligned}$$

woraus wir die Abschätzung

$$\|(z\mathbb{1} - S(\beta_2))^{-1}S_1(z\mathbb{1} - S(\beta_2))^{-1} - (z\mathbb{1} - S(\beta_1))^{-1}S_1(z\mathbb{1} - S(\beta_1))^{-1}\| \\ \leq 2|\beta_1 - \beta_2| \left(\frac{m}{1 - \beta_0 m\|S_1\|}\right)^3 \|S_1\|^2$$

gewinnen. Damit zeigt man die Stetigkeit von $P'(\beta)$. □

Mittels Satz 2.16 können wir den Fall untersuchen, daß S_0 und S_1 miteinander kommutieren.

Korollar 2.17. *Seien $S_0 : D(S_0) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen und $S_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkt. Für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gelte $S_1\varphi \in D(S_0)$ sowie $S_0S_1\varphi = S_1S_0\varphi$. Weiter sei P der Riesz-Projektor von S_0 zum Integrationsweg $\Gamma \subset \rho(S_0)$. Dann ist P für hinreichend kleine $\beta \in \mathbb{R}$ auch Riesz-Projektor von $S(\beta) := S_0 + \beta S_1$ zu Γ.*

Beweis. Wie in Satz 2.16 sieht man $\Gamma \subset \rho(S(\beta))$ für hinreichend kleine β. Seien $P(\beta)$ die entsprechenden Riesz-Projektoren. Es gilt:

$$\begin{aligned} P'(\beta) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}S_1(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}\,dz \\ &= S_1\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}]^2\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}]^2\,dz S_1. \end{aligned}$$

Dabei haben wir beachtet, daß S_1 mit $S(\beta)$ kommutiert. Andererseits folgt aus $P(\beta) = P(\beta)^2$:

$$P'(\beta) = P(\beta)P'(\beta) + P'(\beta)P(\beta).$$

Wir zeigen $P(\beta)P'(\beta) = 0$. Es gilt:

$$P(\beta)P'(\beta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma P(\beta)[(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}]^2\,dz S_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [P(\beta)(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}]^2\,dz S_1,$$

da $P(\beta)$ als Riesz-Projektor mit $(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}$ kommutiert. Die Polstellen von $P(\beta)(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}$ liegen nach Satz 2.13 innerhalb von Γ, bilden also eine beschränkte Menge. Vermöge des Residuensatzes kann man Γ in einen Kreis K_r um den Ursprung mit beliebig großem Radius r deformieren. Aus

$$\|P(\beta)(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}\| \leq \frac{C}{|z|}$$

für hinreichend große z folgt mit der Standardabschätzung für Kurvenintegrale:

$$\|\int_\Gamma [P(\beta)(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}]^2\,dz S_1\| = \|\int_{K_r} [P(\beta)(z\mathbb{1} - S(\beta))^{-1}]^2\,dz S_1\| \leq \frac{C}{r^2}r\|S_1\| = \frac{C}{r}\|S_1\| \to 0$$

für $r \to \infty$. Entsprechend sieht man $P'(\beta)P(\beta) = 0$ ein, so daß sich insgesamt $P'(\beta) = 0$ ergibt. Daraus schließen wir $P(\beta) = P(0) = P$. □

Integrale vom Typ, wie sie bei der Differentiation von Riesz-Projektoren auftauchen, haben einen eigenen Namen.

Definition 2.18. *Seien $S : D(S) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Operator und $\tilde{S} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator. Sei weiter $\Gamma \subset \rho(S)$ ein Integrationsweg. Dann heißt*

$$\Phi(\tilde{S}) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z\mathbb{1} - S)^{-1} \tilde{S} (z\mathbb{1} - S)^{-1}\, dz \tag{2.9}$$

Friedrichs-Integral.[4] *Das Integral ist als Riemann-Integral bzgl. der Operatornorm definiert.*

Mithilfe von Friedrichs-Integralen lassen sich Kommutatoren auflösen.

Lemma 2.19. *Seien $S : D(S) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Operator und $\tilde{S} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator. Sei weiter $\Phi(\tilde{S})$ das Friedrichs-Integral zu $\tilde{S}$ gemäß Definition 2.18 mit dem Integrationsweg $\Gamma \subset (\rho(S))$. Dann gilt:*

1. *$\Phi(\tilde{S}) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist beschränkt.*
2. *Für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ ist $\Phi(\tilde{S})\varphi \in D(S)$, und $S\Phi(\tilde{S}) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist beschränkt.*
3. *Sei P der Riesz-Projektor von S bzgl. Γ. Dann gilt für alle $\varphi \in D(S)$:*

$$[\Phi(\tilde{S}), S]\varphi = [\tilde{S}, P]\varphi.$$

Beweis. Da die Resolvente stetig bzgl. der Operatornorm von z abhängt, konvergieren die Riemannschen Summen

$$\Phi_n := \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} (z_j - z_{j-1})(\tilde{z}_j\mathbb{1} - S)^{-1} \tilde{S} (\tilde{z}_j\mathbb{1} - S)^{-1}$$

in der Operatornorm gegen das Friedrichs-Integral.

1. Da die Resolvente und $\tilde{S}$ beschränkt sind, muß auch $\Phi(\tilde{S})$ als Grenzwert der Riemannschen Summen beschränkt sein.

2. Aus $S(z\mathbb{1}-S)^{-1} = z(z\mathbb{1}-S)^{-1} - z\mathbb{1}$ folgt, daß $S\Phi_n$ beschränkt ist und in der Operatornorm konvergiert. Also haben wir für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ die Konvergenz von $\Phi_n\varphi$ und $S\Phi_n\varphi$. Da S abgeschlossen ist, folgt $\Phi(\tilde{S})\varphi \in D(S)$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ sowie die Beschränktheit von $S\Phi(\tilde{S})$.

3. Sei $\varphi \in D(S)$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
[\Phi(\tilde{S}), S]\varphi &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma [(z\mathbb{1} - S)^{-1} \tilde{S} (z\mathbb{1} - S)^{-1}, S]\varphi\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma [(z\mathbb{1} - S)^{-1} \tilde{S} (z\mathbb{1} - S)^{-1}, -z\mathbb{1} + S]\varphi\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (-(z\mathbb{1} - S)^{-1} \tilde{S} + \tilde{S}(z\mathbb{1} - S)^{-1})\varphi\, dz \\
&= [\tilde{S}, \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z\mathbb{1} - S)^{-1}\varphi\, dz] \\
&= [\tilde{S}, P]\varphi.
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist gerade die Definition des Riesz-Projektors P in (2.7). □

[4] Die Zuordnung $\tilde{S} \mapsto \Phi(\tilde{S})$ wird auch als Friedrichssche Gamma-Operation bezeichnet. In der Literatur werden häufig unitäre Operatoren anstelle der Resolvente verwendet. Vgl. [10], X.5

2.4 Gruppen beschränkter Operatoren

Wir folgen in unserer Darstellung im wesentlichen [11] und [10].

Definition 2.20. *Eine einparametrige Schar $U(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$, beschränkter linearer Operatoren heißt stark stetige Gruppe beschränkter linearer Operatoren, wenn folgendes gilt:*

1. $U(0) = \mathbb{1}$.
2. $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
3. *Die Abbildung* $U(\cdot)\varphi : t \mapsto U(t)\varphi$ *ist bzgl. der Hilbert-Raum-Norm stetig für alle* $\varphi \in \mathcal{H}$.

Der durch

$$D(S) := \left\{ \varphi \in \mathcal{H} | \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(U(t)\varphi - \varphi) \text{ existiert} \right\}, \; S\varphi := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(U(t)\varphi - \varphi), \; \varphi \in D(S)$$

erklärte lineare Operator $S : D(S) \to \mathcal{H}$ *heißt Generator der Gruppe.*

Im weiteren werden wir anstelle von stark stetigen Gruppen beschränkter linearer Operatoren einfach von einer Gruppe von Operatoren oder noch kürzer von einer Gruppe sprechen, sofern keine Mißverständnisse zu befürchten sind. Vom Generator S sagen wir auch, er generiere die zugehörige Gruppe. Der Generator einer Gruppe von Operatoren ist eindeutig bestimmt. Es ist auch die Umkehrung richtig; d.h ein Operator kann höchstens eine Gruppe generieren.

Satz 2.21. *Seien S_1 und S_2 die Generatoren der Gruppen $U_1(t)$ bzw. $U_2(t)$. Dann folgt aus $S_1 = S_2$ auch $U_1(t) = U_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Folgt aus [11], Th. 1.2.6. □

Nach Satz 2.21 kann man also von der zu S gehörenden Gruppe sprechen. Wir haben folgende grundlegende Existenzaussage.

Satz 2.22. *Seien $M \geq 1$ und $\omega \geq 0$. Ein Operator $S : D(S) \to \mathcal{H}$ ist genau dann Generator einer Gruppe $U(t)$ mit der Eigenschaft:*

$$\|U(t)\| \leq M e^{\omega|t|}, \; t \in \mathbb{R},$$

wenn folgendes gilt:

1. *S ist dicht definiert und abgeschlossen.*
2. *Aus $\lambda \in \mathbb{R}$ und $|\lambda| > \omega$ folgt $\lambda \in \rho(S)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung:*

$$\| \left[(\lambda \mathbb{1} - S)^{-1} \right]^n \| \leq M(|\lambda| - \omega)^{-n}.$$

Beweis. [11], Th. 1.6.3. □

Wir stellen den Zusammenhang mit Differentialgleichungen her.

Satz 2.23. *Sei $U(t)$ eine Gruppe von Operatoren mit Generator S. Dann ist für alle $\varphi \in D(S)$ auch $U(t)\varphi \in D(S)$, $t \in \mathbb{R}$, und die Funktion $t \mapsto U(t)\varphi$ ist stetig differenzierbar mit:*

$$\frac{d}{dt}U(t)\varphi = SU(t)\varphi = U(t)S\varphi. \tag{2.10}$$

Beweis. Folgt aus [11], Th. 1.2.4. □

Wir ziehen aus den Sätzen 2.22 und 2.23 eine wichtige Folgerung.

Korollar 2.24. *Seien $A : D(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert und $U(t)$ die von $-iA$ generierte Gruppe. Dann ist $U(t)$ unitär für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir überprüfen die Voraussetzungen von Satz 2.22. $-iA$ ist dicht definiert und abgeschlossen, da A als selbstadjungierter Operator dies ist. Die Abschätzung für die Resolvente aus Satz 3.1 liefert für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\| \left[(\lambda\mathbb{1} + iA)^{-1}\right]^n \| \leq \|(i\lambda\mathbb{1} - A)^{-1}\|^n \leq |\lambda|^{-n}.$$

Also generiert $-iA$ eine Gruppe $U(t)$ mit $M = 1$ und $\omega = 0$ in Satz 2.22.

Um die Unitarität nachzuweisen, differenzieren wir $\|U(t)\varphi\|^2$ und beachten die Differentialgleichung (2.10):

$$\frac{d}{dt}\|U(t)\varphi\|^2 = 2\,\mathrm{Re}(U(t)\varphi, U'(t)\varphi) = -2\,\mathrm{Re}\, i(U(t)\varphi, AU(t)\varphi) = 0.$$

Daraus schließen wir, daß $U(t)$ isometrisch ist. Zusammen mit der Gruppeneigenschaft liefert das die Behauptung. □

Nach Satz 2.23 kann man mit der Gruppe $U(t)$ Lösungen von Differentialgleichungen gewinnen. Man erhält daduch sogar alle Lösungen.

Satz 2.25. *Sei $S : D(S) \to \mathcal{H}$ dicht definiert mit $\rho(S) \neq \emptyset$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = S\varphi(t),\ t \in \mathbb{R},\ \varphi(0) = \psi, \tag{2.11}$$

genau dann zu jedem Anfangswert $\psi \in D(S)$ eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Lösung $\varphi(t) \in \mathcal{H}$, wenn S der Generator einer Gruppe $U(t)$ von Operatoren gemäß Definition 2.20 ist, und die Lösung ist gegeben durch $\varphi(t) = U(t)\psi$.

Beweis. [11], Th. 4.1.3. □

Das inhomogene Anfangswertproblem läßt sich ebenfalls mittels $U(t)$ lösen.

Satz 2.26. *$S : D(S) \to \mathcal{H}$ sei Generator einer Gruppe $U(t)$ von Operatoren, und $f(\cdot) : t \mapsto f(t) \in \mathcal{H}$ sei stetig differenzierbar. Dann ist auch die Funktion*

$$g(t) := \int_{t_0}^{t} U(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

stetig differenzierbar, und es ist $g(t) \in D(S)$ sowie:

$$\frac{d}{dt}g(t) = f(t) + Sg(t),\ g(t_0) = 0.$$

Beweis. Folgt aus [10], IX.1.5. □

Die von einem Operator generierte Gruppe kann man formelmäßig angeben. Bei beschränkten Operatoren treten keine Probleme mit Definitionsbereichen auf.

Satz 2.27. *Seien $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkt und $\Gamma \subset \rho(S)$ ein Integrationsweg, der das Spektrum von S umfaßt. Dann ist die von S generierte Gruppe $U(t)$ durch das Dunford-Taylor-Integral*

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{zt} (z\mathbb{1} - S)^{-1} \, dz \tag{2.12}$$

gegeben. Das Integral ist als Riemann-Integral in der Operatornorm erklärt. Eine weitere Darstellung erhält man als Potenzreihe:

$$U(t) = \mathbb{1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j S^j. \tag{2.13}$$

Die Reihe konvergiert in der Operatornorm. Insbesondere ist $U(t)$ bzgl. der Operatornorm nach t stetig differenzierbar.

Beweis. [10], Abschnitte IX.1.6 und IX.1.2. □

Das Dunford-Taylor-Integral (2.12) existiert auch unter schwächeren Voraussetzungen, wenn man den Integrationsweg geeignet modifiziert (vgl. [10], IX.1.6). Für die Anwendung in Abschnitt 5 benötigen wir eine Variante.

Korollar 2.28. *Seien $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkt und $\Gamma \subset \rho(S)$ ein Integrationsweg, der das Spektrum von S umfaßt. Dann ist die von $-iS$ generierte Gruppe $U(t)$ durch das Dunford-Taylor-Integral*

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-izt} (z\mathbb{1} - S)^{-1} \, dz \tag{2.14}$$

gegeben. Das Integral ist als Riemann-Integral in der Operatornorm erklärt.

Beweis. Variablensubstitution $z \to -iz$ in (2.12). □

Die Formel (2.12) bzw. (2.14) erlaubt eine wichtige Abschätzung.

Korollar 2.29. *Seien $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkt und $U(t)$ die von $-iS$ generierte Gruppe.. Es gelte:*

$$\inf_{\mu \in \sigma(S)} \operatorname{Im} \mu > 0.$$

Dann gibt es Konstanten $M \geq 0$ und $\delta > 0$, so daß für alle $t \leq 0$ gilt:

$$\|U(t)\| \leq M e^{\delta t}. \tag{2.15}$$

Beweis. In der Formel (2.14) können wir Γ so wählen, daß $\delta := \inf_{z \in \Gamma} \operatorname{Im} z > 0$ ist. Mit der Standardabschätzung für Wegintegrale folgt für $t \leq 0$:

$$\|U(t)\| \leq \frac{|\Gamma|}{2\pi} \sup_{z \in \Gamma} e^{t \operatorname{Im} z} \|(z\mathbb{1} - S)^{-1}\| \leq \frac{|\Gamma|}{2\pi} e^{t\delta} \sup_{z \in \Gamma} \|(z\mathbb{1} - S)^{-1}\|.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Zu Satz 2.27 gibt es eine Umkehrung; d.h. die Resolvente läßt sich durch die Gruppe ausdrücken.

Satz 2.30. *Seien* $S : D(S) \to \mathcal{H}$ *der Generator einer Gruppe* $U(t)$ *und* $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *ein beschränkter Operator, so daß für alle* $t \geq 0$ *gilt:*

$$\|U(t)K\| \leq Me^{\omega t}$$

mit Konstanten $M \geq 0$ *und* $\omega \in \mathbb{R}$.[5] *Dann ist für alle* z, $\operatorname{Re} z > \omega$, *und für alle* $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$(z\mathbb{1} - S)^{-1}K\varphi = \int_{-\infty}^{0} e^{zt}U(-t)K\varphi \, dt. \tag{2.16}$$

Beweis. Folgt aus den Beweisen von [11], Th. 1.5.3. und Th. 1.3.1. □

Die Variablensubstitution $t \to -t$ bringt (2.16) auf die bekannte Gestalt:

$$(z\mathbb{1} - S)^{-1}\varphi = \int_{0}^{\infty} e^{-zt}U(t)\varphi \, dt.$$

Wir verwenden die unübliche Schreibweise, um den Zusammenhang der Integralformeln für Gruppen von Operatoren und Riesz-Projektoren mittels des Adiabatischen Theorems beizubehalten (vgl. die Einleitung).

Wir untersuchen, wie sich eine Gruppe von Operatoren unter Störungen des Generators verhält. Eine Anwendung der Existenzaussage 2.22 führt auf folgendes Stabilitätsresultat.

Satz 2.31. *Sei* $S_0 : D(S_0) \to \mathcal{H}$ *der Generator einer Gruppe* $U_0(t)$ *mit der Eigenschaft:*

$$\|U_0(t)\| \leq Me^{\omega|t|},$$

$M \geq 1$ *und* $\omega \geq 0$. *Sei weiter* $S_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *ein beschränkter Operator. Dann generiert auch* $S_0 + S_1 : D(S_0) \to \mathcal{H}$ *eine Gruppe* $U(t)$ *von Operatoren mit der Eigenschaft:*

$$\|U(t)\| \leq Me^{(\omega + M\|S_1\|)|t|}.$$

Beweis. [9], Th. 13.2.2. □

Um den genauen Zusammenhang zwischen den Gruppen $U_0(t)$ und $U(t)$ aus Lemma 2.31 zu studieren, leiten wir eine Integralgleichung ab.

Satz 2.32. *Seien* $S_0 : D(S_0) \to \mathcal{H}$ *der Generator der Gruppe* $U_0(t)$ *und* $S_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *beschränkt.* $U(t)$ *sei die von* $S_0 + S_1$ *generierte Gruppe. Dann gilt für alle* $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$(U_0(-t_1)U(t_1) - U_0(-t_0)U(t_0))\varphi = \int_{t_0}^{t_1} U_0(-\tau)S_1U(\tau)\varphi \, d\tau, \tag{2.17}$$

$$U(t)\varphi = U_0(t)\varphi + \int_{0}^{t} U_0(t-\tau)S_1U(\tau)\varphi \, d\tau. \tag{2.18}$$

[5] Aufgrund des Operators K kann die Konstante ω im Gegensatz zu der sonstigen Abschätzung für $U(t)$ auch negative Werte annehmen, was für später wichtig ist.

Zusätzlich gelte für alle $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$\int_{-\infty}^{t_1} \|U_0(-\tau)S_1U(\tau)\varphi\| \, d\tau < \infty, \quad \lim_{t\to-\infty} \|U_0(-t)U(t)\varphi\| = 0. \tag{2.19}$$

Dann ist für alle $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$U_0(-t_1)U(t_1)\varphi = \int_{-\infty}^{t_1} U_0(-\tau)S_1U(\tau)\varphi \, d\tau. \tag{2.20}$$

Beweis. Vgl. [11], Abschnitt 3.1. Die Funktion $t \mapsto U_0(-t)U(t)\varphi$ ist für $\varphi \in D(S_0)$ differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U_0(-t)U(t)\varphi &= \frac{d}{dt}U_0(-t) \cdot U(t)\varphi + U_0(-t)\frac{d}{dt}U(t)\varphi \\ &= -U_0(-t)S_0U(t)\varphi + U_0(-t)(S_0 + S_1)U(t)\varphi \\ &= U_0(-t)S_1U(t)\varphi.\end{aligned}$$

Integration liefert die Formel (2.17) für $\varphi \in D(S_0)$. Da $U_0(t)$, $U(t)$ und S_1 beschränkte Operatoren sind, ist die Formel für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ richtig. Die Integralgleichung (2.18) erhält man, indem man $t_0 = 0$ und $t_1 = t$ setzt.

Mit der Voraussetzung (2.19) folgt (2.20) aus der Formel (2.18). □

Die Gruppe $U(t)$ ist durch die Integralgleichung eindeutig charakterisiert.

Satz 2.33. *Die Integralgleichung (2.18) besitzt genau eine stark stetige Lösung $\tilde{U}(t)$. Sie ist gegeben durch:*

$$\tilde{U}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(t), \; U_{j+1}(t)\varphi = \int_0^t U_0(t-\tau)S_1U_j(\tau)\varphi \, d\tau, \; j \geq 0, \; \varphi \in \mathcal{H}. \tag{2.21}$$

Die Reihe konvergiert in der Operatornorm lokal gleichmäßig in t.

Beweis. [10], IX.2.1. oder [11], Prop. 3.1.2. □

Aus der Integralgleichung folgt, daß die Gruppe stetig von Störungen abhängt.

Satz 2.34. *Sei $S_0 : D(S_0) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen und Generator einer Gruppe $U_0(t)$ von Operatoren mit der Eigenschaft:*

$$\|U_0(t)\| \leq Me^{\omega|t|}$$

mit Konstanten $M \geq 1$, $\omega \geq 0$. Sei weiter $S_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator. Dann generiert auch $S_0 + S_1$ eine Gruppe $U(t)$, und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\|U(t) - U_0(t)\| \leq Me^{\omega|t|}(e^{M\|S_1\||t|} - 1).$$

Beweis. [11], Corollary 3.1.3. □

Unter bestimmten Voraussetzungen hängt die Gruppe auch differenzierbar vom Generator ab. Uns reicht hier ein Spezialfall.

Satz 2.35. *Seien $S_0 : D(S_0) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen und Generator einer Gruppe $U_0(t)$ mit der Eigenschaft:*

$$\|U_0(t)\| \leq Me^{\omega|t|}$$

mit Konstanten $M \geq 1$, $\omega \geq 0$ und $S_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkt. Dann generiert auch $S_0 + \beta S_1$, $\beta \in \mathbb{R}$, eine Gruppe $U(t, \beta)$, die für jedes $t \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar bzgl. der Operatornorm von β abhängt. Für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt:

$$(\frac{\partial}{\partial \beta} U(t, \beta))\varphi = U(t, \beta) \int_0^t U(-\tau, \beta) S_1 U(\tau, \beta)\varphi \, d\tau = \int_0^t U(t - \tau, \beta) S_1 U(\tau, \beta)\varphi \, d\tau. \quad (2.22)$$

Beweis. Wir untersuchen den Differenzenquotienten $\frac{1}{h}(U(t, \beta + h) - U(t, \beta))$. Nach Satz 2.32 haben wir folgende Integralgleichung:

$$U(t, \beta + h)\varphi = U(t, \beta)\varphi + h \int_0^t U(t - \tau, \beta) S_1 U(\tau, \beta + h)\varphi \, d\tau, \;\; \varphi \in \mathcal{H}. \quad (2.23)$$

Wir iterieren (2.23) einmal und ordnen für den Differenzenquotienten um:

$$\frac{1}{h}(U(t, \beta + h)\varphi - U(t, \beta)\varphi) =$$
$$\int_0^t U(t - \tau, \beta) S_1 U(\tau, \beta)\varphi \, d\tau + h \int_0^t U(t - \tau, \beta) S_1 \int_0^\tau U(\tau - \tau', \beta) S_1 U(\tau', \beta + h)\varphi \, d\tau' \, d\tau. \quad (2.24)$$

Aus Satz 2.31 haben wir die Abschätzung:

$$\|U(t, \beta)\| \leq Me^{(\omega + \beta M \|S_1\|)|t|}. \quad (2.25)$$

Dann zeigt (2.24), daß der Differenzenquotient in der Operatornorm konvergiert und die Formel (2.22) richtig ist.

Wir zeigen, daß $\frac{\partial}{\partial \beta} U(t, \beta)$ für festes t stetig in β bzgl. der Operatornorm ist. Aus (2.22) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} U(t, \beta + h)\varphi - \frac{\partial}{\partial \beta} U(t, \beta)\varphi = \int_0^t &[U(t - \tau, \beta + h) S_1 (U(\tau, \beta + h) - U(\tau, \beta)) \\ &+ (U(t - \tau, \beta + h) - U(t - \tau, \beta)) S_1 U(\tau, \beta)] \, \varphi \, d\tau. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aus Satz 2.34 gewinnt man die Abschätzung:

$$\|U(t, \beta + h) - U(t, \beta)\| \leq Me^{(\omega + \beta M \|S_1\|)} \left(e^{|h| M \|S_1\| |t|} - 1 \right).$$

Wendet man dies zusammen mit (2.25) auf (2.26) an, dann erhält man die Behauptung. $\square$

Wir untersuchen den Fall, daß die Operatoren S_0 und S_1 miteinander kommutieren.

Satz 2.36. *Seien $S_0 : D(S_0) \to \mathcal{H}$ der Generator einer Gruppe $U_0(t)$ und $S_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkt. Weiter folge aus $\varphi \in D(S_0)$ auch $S_1\varphi \in D(S_0)$, und es gelte $S_1 S_0 \varphi = S_0 S_1 \varphi$ für alle $\varphi \in D(S_0)$. Dann kommutieren auch $U_0(t)$ und S_1 miteinander; d.h. für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ ist:*

$$U_0(t) S_1 \varphi = S_1 U_0(t)\varphi.$$

Beweis. Die eindeutig bestimmte Lösung von

$$\varphi'(t) = S_0\varphi(t),\ \varphi(0) = \psi \in D(S_0) \tag{2.27}$$

ist nach Satz 2.25 gegeben durch:

$$\varphi(t) = U_0(t)\psi.$$

Wir multiplizieren (2.27) mit S_1. Da S_1 beschränkt ist, haben wir $(S_1\varphi')(t) = (S_1\varphi)'(t)$. Es folgt:

$$(S_1\varphi)'(t) = S_1S_0\varphi(t) = S_0S_1\varphi(t),\ S_1\varphi(0) = S_1\psi.$$

Mit $\tilde{\varphi}(t) := S_1\varphi(t)$ ist also:

$$\tilde{\varphi}'(t) = S_0\tilde{\varphi}(t),\ \tilde{\varphi}(0) = S_1\psi. \tag{2.28}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung von (2.28) ist nach Satz 2.25 gegeben durch:

$$\tilde{\varphi}(t) = U_0(t)S_1\psi.$$

Damit folgt für alle $\psi \in D(S_0)$:

$$U_0(t)S_1\psi = S_1U_0(t)\psi$$

Da $U_0(t)$ und S_1 beschränkt sind, muß dies für alle $\psi \in \mathcal{H}$ richtig sein. □

Die von S_1 erzeugte Gruppe läßt sich abspalten.

Satz 2.37. *Seien S_0, S_1 und $U_0(t)$ wie in Satz 2.36. Seien weiter $U(t)$ die von $S_0 + S_1$ generierte Gruppe und $U_1(t)$ die von S_1 generierte Gruppe. Dann gilt:*

$$U(t) = U_0(t)U_1(t) = U_1(t)U_0(t).$$

Beweis. Nach Satz 2.32 erfüllt $U(t)$ die Integralgleichung:

$$U(t)\varphi = U_0(t)\varphi + \int_0^t U_0(t-\tau)S_1U(\tau)\varphi\,d\tau$$

für alle $\varphi \in \mathcal{H}$. Wir zeigen, daß auch U_0U_1 eine Lösung der Integralgleichung ist. Wir beachten $S_1U_0(\tau) = U_0(\tau)S_1$ (Satz 2.36) und die Gruppeneigenschaft. Für $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^t U_0(t-\tau)S_1U_0(\tau)U_1(\tau)\varphi\,d\tau &= \int_0^t U_0(t-\tau)U_0(\tau)S_1U_1(\tau)\varphi\,d\tau \\
&= \int_0^t U_0(t)S_1U_1(\tau)\varphi\,d\tau \\
&= U_0(t)\int_0^t \frac{d}{d\tau}U_1(\tau)\varphi\,d\tau \\
&= U_0(t)(U_1(t) - \mathbb{1})\varphi \\
&= (U(t) - U_0(t))\varphi.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Differentialgleichung für $U_1(t)$ gemäß Satz 2.23 benutzt. Da S_1 beschränkt ist, mußten wir bei φ nicht auf Definitionsbereiche achten. Aus der eindeutigen Lösbarkeit der Integralgleichung schließen wir nun auf $U = U_0U_1$.

Es bleibt noch $U_0 U_1 = U_1 U_0$ zu zeigen. Da S_1 beschränkt ist, können wir U_1 als Potenzreihe schreiben:

$$U_1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j S_1^j.$$

Nach Satz 2.36 ist $U_0 S_1 = S_1 U_0$, woraus man leicht $U_0 S_1^j = S_1^j U_0$ folgert. Daraus erhält man:

$$U_0(t)U_1(t) = U_0(t) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j S_1^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j U_0(t) S_1^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j S_1^j U_0(t) = U_1(t)U_0(t).$$

Das war zu zeigen. □

Ein Projektor läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen aus der Gruppe herausziehen.

Lemma 2.38. *Seien $S : D(S) \to \mathcal{H}$ Generator einer Gruppe $U(t)$ und $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Projektor mit der Eigenschaft $P\varphi \in D(S)$ für $\varphi \in D(S)$. P kommutiere mit $U(t)$. Sei schließlich $\tilde{U}(t)$ die von SP generierte Gruppe. Dann gilt $\tilde{U}(t)P = U(t)P$.*

Beweis. Wir zeigen, daß $\tilde{U}(t)P$ und $U(t)P$ dasselbe Anfangswertproblem lösen. Wegen $\tilde{U}(0) = \mathbb{1}$ und $U(0) = \mathbb{1}$ stimmen die Anfangswerte überein. Für $\varphi \in D(S)$ ist auch $P\varphi \in D(S)$, und wir haben:

$$i\frac{d}{dt}\tilde{U}(t)P\varphi = SP\tilde{U}(t)P\varphi = S\tilde{U}(t)P^2\varphi = S\tilde{U}(t)P\varphi.$$

Andererseits ist auch:

$$i\frac{d}{dt}U(t)P\varphi = SU(t)P\varphi.$$

Die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems (Satz 2.36) liefert die Behauptung. □

Wir untersuchen die Gruppe eines konkreten Generators, der in Abschnitt 5 auftauchen wird.

Lemma 2.39. *Sei $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Projektor. Wir setzen $J = 2P - \mathbb{1}$. Dann gilt für die von γJ, $\gamma \in \mathbb{C}$, generierte Gruppe $U(t)$:*

$$U(t)P = PU(t) = e^{\gamma t}P, \; U(t)(\mathbb{1} - P) = (\mathbb{1} - P)U(t) = e^{-\gamma t}(\mathbb{1} - P).$$

Beweis. J ist beschränkt und kommutiert mit P. Es gilt $J^2 = 4P^2 - 4P + \mathbb{1} = \mathbb{1}$. Wir verwenden die Potenzreihenentwicklung für $U(t)$:

$$U(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\gamma t)^j J^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (\gamma t)^{2k} \mathbb{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (\gamma t)^{2k+1} J.$$

Aus $JP = (2P - \mathbb{1})P = P$ und $J(\mathbb{1} - P) = (2P - \mathbb{1})(\mathbb{1} - P) = P - \mathbb{1}$ folgt die Behauptung. □

Abschließend führen wir die Greenschen Operatoren ein.

Definition 2.40. *Seien $U(t)$ eine Gruppe beschränkter Operatoren mit Generator $S : D(S) \to \mathcal{H}$, $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator und $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann heißt*

$$G(t,t') := \begin{cases} \gamma U(t) K U(-t'), & t \leq t', \\ \gamma U(t)[K - \mathbb{1}]U(-t'), & t > t', \end{cases}$$

Greenscher Operator bzgl. K mit Generator S zum Parameter γ.[6]

G erfüllt formal die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial t} - S\right) G(t,t') = \delta(t-t')\mathbb{1}. \tag{2.29}$$

Dies läßt sich im Sinne schwacher Differenzierbarkeit rechtfertigen. Da wir (2.29) nicht benötigen, werden wir diesen Punkt nicht weiter beleuchten. Wir bemerken nur:

Satz 2.41. *Der Greensche Operator G mit Generator S sei erklärt gemäß Definition 2.40. Für $\varphi \in D(S)$ sei $K\varphi \in D(S)$. Dann erfüllt G für alle $\varphi \in D(S)$ die Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,t')\varphi = SG(t,t')\varphi, \;\; t \neq t'. \tag{2.30}$$

Beweis. Nach Satz 2.23 ist $U(-t')\varphi \in D(S)$ für $\varphi \in D(S)$, und nach Voraussetzung ist $KU(-t')\varphi \in D(S)$, so daß $G(\cdot,t')$ stark differenzierbar ist. Die Differentialgleichung folgt dann sofort aus der Definition von $G(t,t')$. $\square$

Greensche Operatoren erfüllen eine Integralgleichung, die zu der Gleichung (2.18) für die Gruppe $U(t)$ analog ist.[7]

Satz 2.42. *Seien G_0 der Greensche Operator gemäß Definition 2.40 bzgl. K_0 zum Parameter γ und $S_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkt. Dann läßt sich zu $S := S_0 + S_1$ ein Greenscher Operator G bzgl. K zum Parameter γ erklären. Für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt:*

$$\begin{aligned} G(t,t')\varphi + \frac{1}{\gamma} G_0(t,T_0)G(T_0,t')\varphi - \frac{1}{\gamma} G_0(t,T_1)G(T_1,t')\varphi& \\ = G_0(t,t')\varphi - \frac{1}{\gamma}\int_{T_0}^{T_1} G_0(t,\tau)S_1 G(\tau,t')\varphi\, d\tau.& \end{aligned} \tag{2.31}$$

Zusätzlich sei für alle $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$\int_{-\infty}^{T_1} \|U_0(-\tau)S_1U(\tau)\varphi\|\, dt < \infty, \;\; \lim_{t\to-\infty} \|U_0(-t)U(t)\varphi\| = 0. \tag{2.32}$$

Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$G(t,t')\varphi - \frac{1}{\gamma} G_0(t,T_1)G(T_1,t')\varphi = G_0(t,t')\varphi - \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{T_1} G_0(t,\tau)S_1G(\tau,t')\varphi\, d\tau. \tag{2.33}$$

[6]In der Literatur wird $G(t,t')$ auch als Bi-Semi-Gruppe bezeichnet, S heißt entsprechend Bigenerator. Vgl. [3], [4], [5]. Den Parameter γ haben wir mit Blick auf die Abschnitte 4 und 5 eingeführt, wo wegen der Schrödinger-Gleichung ein Faktor i auftritt.

[7]Die Integralgleichung für $U(t)$ ist eine Volterra-Gleichung, während wir hier eine Fredholmsche Gleichung erhalten; deshalb heißt die obere Integrationsgrenze T_1 und nicht t.

Beweis. Nach Satz 2.31 generiert auch S eine Gruppe von Operatoren, so daß sich ein Greenscher Operator zu S erklären läßt.

Im folgenden sind alle Gleichungen auf $\varphi \in \mathcal{H}$ angewendet zu denken. Sei $t \le t'$. Wir spalten das Integral in (2.31) auf:

$$\int_{T_0}^{T_1} = \int_{T_0}^{t} + \int_{t}^{t'} + \int_{t'}^{T_1}$$

und setzen in den Teilintegralen die Definition von G bzw. G_0 ein:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma^2}\int_{T_0}^{T_1} G_0(t,\tau)S_1G(\tau,t')\,d\tau = & \int_{T_0}^{t} U_0(t)[K_0-\mathbb{1}]U_0(-\tau)S_1U(\tau)KU(-t')\,d\tau \\
& + \int_{t}^{t'} U_0(t)K_0U_0(-\tau)S_1U(\tau)KU(-t')\,d\tau \\
& + \int_{t'}^{T_1} U_0(t)K_0U_0(-\tau)S_1U(\tau)[K-\mathbb{1}]U(-t')\,d\tau.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir die Integrationsregel aus Satz 2.32 verwenden:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\gamma^2}\int_{T_0}^{T_1} G_0(t,\tau)S_1G(\tau,t')\,d\tau \\
&= U_0(t)[K_0-\mathbb{1}]\left\{U_0(-t)U(t)-U_0(-T_0)U(T_0)\right\}KU(-t') \\
&\quad + U_0(t)K_0\left\{U_0(-t')U(t')-U_0(-t)U(t)\right\}KU(-t') \\
&\quad + U_0(t)K_0\left\{U_0(-T_1)U(T_1)-U_0(-t')U(t')\right\}[K-\mathbb{1}]U(-t') \\
&= -U_0(t)U_0(-t)U(t)KU(-t') - U_0(t)[K_0-\mathbb{1}]U_0(-T_0)U(T_0)KU(-t') \\
&\quad + U_0(t)K_0U_0(-T_1)U(T_1)[K-\mathbb{1}]U(-t') + U_0(t)K_0U_0(-t')U(t')U(-t') \\
&= -\frac{1}{\gamma}G(t,t') + \frac{1}{\gamma}G_0(t,t') - \frac{1}{\gamma^2}G_0(t,T_0)G(T_1,t') + \frac{1}{\gamma^2}G_0(t,T_1)G(T_1,t').
\end{aligned}$$

Das ergibt (2.31) für $t \le t'$. Sei $t > t'$. Wir zerlegen wieder das Integral:

$$\int_{T_0}^{T_1} = \int_{T_0}^{t'} + \int_{t'}^{t} + \int_{t}^{T_1}$$

und setzen die Definition von G und G_0 ein:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma^2}\int_{T_0}^{T_1} G_0(t,\tau)S_1G(\tau,t')\,d\tau = & \int_{T_0}^{t'} U_0(t)[K_0-\mathbb{1}]U_0(-\tau)BU(\tau)KU(-t')\,d\tau \\
& + \int_{t'}^{t} U_0(t)[K_0-\mathbb{1}]U_0(-\tau)BU(\tau)[K-\mathbb{1}]U(-t')\,d\tau \\
& + \int_{t}^{T_1} U_0(t)K_0U_0(-\tau)BU(\tau)[K-\mathbb{1}]U(-t')\,d\tau.
\end{aligned}$$

Die Integrationsregel aus Satz 2.32 liefert analog wie eben:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\gamma^2}\int_{T_0}^{T_1} G_0(t,\tau)S_1G(\tau,t')\,d\tau \\
&= U_0(t)[K_0-\mathbb{1}]\left(U_0(-t')U(t')-U_0(-T_0)U(T_0)\right)KU(-t') \\
&\quad + U_0(t)[K_0-\mathbb{1}]\left(U_0(-t)U(t)-U_0(-t')U(t')\right)[K-\mathbb{1}]U(-t') \\
&\quad + U_0(t)K_0\left(U_0(-T_1)U(T_1)-U_0(-t)U(t)\right)[K-\mathbb{1}]U(-t') \\
&= -U_0(t)[K_0-\mathbb{1}]U_0(-T_0)U(T_0)KU(-t') + U_0(t)[K_0-\mathbb{1}]U_0(-t')U(t')U(-t') \\
&\quad - U_0(t)U_0(-t)U(t)[K-\mathbb{1}]U(-t') + U_0(t)K_0U_0(-T_1)U(T_1)[K-\mathbb{1}]U(-t') \\
&= \frac{1}{\gamma}G(t,t') - \frac{1}{\gamma}G_0(t,t') - \frac{1}{\gamma^2}G_0(t,T_0)G(T_0,t') + \frac{1}{\gamma^2}G_0(t,T_1)G(T_1,t').
\end{aligned}$$

Das ergibt (2.31) für $t > t'$.

Für $T_0 = -\infty$ kann man wegen der Voraussetzung (2.32) die Formel (2.20) aus Satz 2.32 anwenden. $\square$

3 Operatoren mit Dichotomie

3.1 Motivation

Wir betrachten lineare Operatoren, deren Spektrum eine bestimmte Struktur aufweist.

Definition 3.1. *Sei $S : D(S) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Operator. Wir sagen, S sei dichotomisch oder besitze eine Dichotomie (bzgl. der reellen Achse[1]), falls sein Spektrum keine reellen Werte enthält.*

Wir werden im weiteren Operatoren untersuchen, die in Real- und Imaginärteil zerlegt sind: $S = S_r + iS_i$ mit symmetrischen Operatoren S_r und S_i. Wir orientieren uns zunächst anhand eines einfachen Beispiels. Seien $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ und

$$A(V) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & V \\ \bar{V} & \lambda_2 \end{pmatrix}, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ V \in \mathbb{C}.$$

Wir fragen, inwieweit sich das Spektrum von $A(V)$ durch eine Störung der Diagonalelemente in die komplexe Ebene verschieben läßt. Falls wir ein Vielfaches der Einheitsmatrix als Imaginärteil addieren, läßt sich die Frage erschöpfend beantworten, wie wir in Satz 3.2 sehen werden. Sei also:

$$A_\varepsilon(V) := \begin{pmatrix} \lambda_1 + i\varepsilon & V \\ \bar{V} & \lambda_2 - i\varepsilon \end{pmatrix}, \ \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Für $\varepsilon \neq 0$ besitzt $A_\varepsilon(0)$ offensichtlich keine reellen Eigenwerte. Die charakteristische Gleichung für $A_\varepsilon(V)$ lautet:

$$\mu^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\mu + (\lambda_1 + i\varepsilon)(\lambda_2 - i\varepsilon) - |V|^2 = 0.$$

Die Lösungen sind:

$$\mu_{1,2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \sqrt{r + i\varepsilon(\lambda_1 - \lambda_2)}, \ r := \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4} - \varepsilon^2 + |V|^2.$$

Man überzeugt sich leicht von:

$$\operatorname{Im} \mu_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-r + \sqrt{r^2 + \varepsilon^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right)^{1/2}.$$

Aus $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt $\operatorname{Im} \mu_{1,2} \neq 0$ für alle $\varepsilon \neq 0$. Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$ ist dies nicht mehr richtig; denn bei hinreichend kleinem ε ist:

$$r = |V|^2 - \varepsilon^2 \geq 0$$

und damit:

$$\operatorname{Im} \mu_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (-r + \sqrt{r^2})^{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (-r + r)^{1/2} = 0.$$

Wir lernen daraus, daß es weniger auf die Kleinheit der Störung V ankommt als vielmehr auf die „Lücke“, d.h. die Differenz zwischen λ_1 und λ_2, um reelle Eigenwerte von $A_\varepsilon(V)$ auszuschließen. Dieses Resultat wollen wir auf allgemeine Hilbert-Räume erweitern.

[1] In der Literatur wird die Dichotomie auch manchmal bzgl. der imaginären Achse definiert.

3.2 Dichotomie-Kriterien

Das einfachste allgemeine Dichotomie-Kriterium erhält man, wenn man das Spektrum eines selbstadjungierten Operators um denselben Imaginärteil verschiebt.

Satz 3.2. *Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator. Dann existiert die Resolvente $((x + i\varepsilon)\mathbb{1} - A)^{-1}$ für alle $\varepsilon \neq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ und ist beschränkt mit:*

$$\|((x + i\varepsilon)\mathbb{1} - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\varepsilon|} \tag{3.1}$$

Beweis. Sei $\varphi \in D(A)$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \|((x + i\varepsilon)\mathbb{1} - A)\varphi\|^2 &= \|(x\mathbb{1} - A)\varphi\|^2 + \varepsilon^2\|\varphi\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, i\varepsilon((x\mathbb{1} - A)\varphi, \varphi) \\ &= \|(x\mathbb{1} - A)\varphi\|^2 + \varepsilon^2\|\varphi\|^2 \\ &\geq \varepsilon^2\|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung mittels Standardargumenten (vgl. [12]). □

Satz 3.2 ist die wohlbekannte Aussage, daß ein selbstadjungierter Operator ein rein reelles Spektrum hat. Addiert man einen beliebigen Imaginärteil, kann man mit ähnlichen Rechnungen eine Verschärfung des Resultates beweisen, die in etwas allgemeinerer Form auf Baskakov [6] zurückgeht.

Satz 3.3 (Baskakov). *Seien $A, K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkte, selbstadjungierte Operatoren. K besitze eine beschränkte Inverse. Weiter gelte:*

$$\|[A, K]\| < \frac{1}{\|K^{-1}\|^2}.$$

Dann ist $A + iK$ dichotomisch.

Beweis. Für $\varphi \in \mathcal{H}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|(x\mathbb{1} - A - iK)\varphi\|^2 &= \|(x\mathbb{1} - A)\varphi\|^2 + \|K\varphi\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, i((x\mathbb{1} - A)\varphi, K\varphi) \\ &= \|(x\mathbb{1} - A)\varphi\|^2 + \|K\varphi\|^2 + i(\varphi, [A, K]\varphi) \\ &\geq \frac{1}{\|K^{-1}\|^2}\|\varphi\|^2 - \|[A, K]\| \cdot \|\varphi\|^2 \\ &= \left(\frac{1}{\|K^{-1}\|^2} - \|[A, K]\|\right)\|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit der Voraussetzung die Behauptung. □

Im Zusammenhang mit der Integralformel aus Abschnitt 5 sind Imaginärteile einer speziellen Bauart bedeutsam. Seien $A : D(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert und $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein orthogonaler Projektor mit endlichdimensionalem Bild. Dann ist

$$A_\varepsilon := A + i\varepsilon(2P - \mathbb{1}),\ \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{3.2}$$

auf Dichotomie zu untersuchen.[2] Die Schwierigkeit liegt hier darin, daß wir in der Integralformel den Limes $\varepsilon \to 0$ ausführen müssen. Dadurch ist das Kriterium von Baskakov, das einen großen Imaginärteil voraussetzt, nicht anwendbar. Satz 3.2 legt es nahe, den Operator auf die Unteräume $\operatorname{ran} P$ und $(\operatorname{ran} P)^\perp$ umzurechnen. Wir beweisen ein einfaches algebraisches Invertierbarkeitskriterium.

Lemma 3.4. *Seien D_1, D_2 und $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ lineare Räume sowie $S : D_1 \oplus D_2 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ ein linearer Operator. Wir schreiben S als:*

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}, \; S_{jk} : D_k \to \mathcal{H}_j, \; j,k = 1,2.$$

Der Operator $S_{22} : D_2 \to \mathcal{H}_2$ sei invertierbar. Dann ist S genau dann invertierbar, falls

$$(S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})^{-1} : \mathcal{H}_1 \to D_1$$

existiert.

Beweis. Sei S invertierbar. Wir schreiben den inversen Operator $\tilde{S} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to D_1 \oplus D_2$ als:

$$\tilde{S} := \begin{pmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} \end{pmatrix}, \; \tilde{S}_{jk} : \mathcal{H}_k \to D_j, \; j,k = 1,2,$$

und berechnen das Produkt $S\tilde{S}$:

$$S\tilde{S} = \begin{pmatrix} S_{11}\tilde{S}_{11} + S_{12}\tilde{S}_{21} & S_{11}\tilde{S}_{12} + S_{12}\tilde{S}_{22} \\ S_{21}\tilde{S}_{11} + S_{22}\tilde{S}_{21} & S_{21}\tilde{S}_{12} + S_{22}\tilde{S}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Vergleich der Einträge der ersten Spalte liefert:

$$\tilde{S}_{21} = -S_{22}^{-1}S_{21}\tilde{S}_{11} \tag{3.3}$$

$$(S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})\tilde{S}_{11} = \mathbb{1}. \tag{3.4}$$

Das zeigt die Existenz von $(S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})^{-1}$.

Definiert man umgekehrt $\tilde{S}_{11}$ und $\tilde{S}_{21}$ über (3.3) und (3.4) sowie $\tilde{S}_{12}$ und $\tilde{S}_{22}$ entsprechend, so sieht man, daß S invertierbar ist. ☐

Aus dem vorstehenden Lemma können wir ein für unsere Zwecke brauchbares Dichotomie-Kriterium ableiten.

Satz 3.5. *Seien $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator und $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein orthogonaler Projektor mit endlichdimensionalem Bild und der Eigenschaft $P\varphi \in D(A)$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$. Wir schreiben $D_1 := \mathcal{H}_1 := \operatorname{ran} P$, $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_1^\perp$ und $D_2 := D(A) \cap \mathcal{H}_2$. D_2 liege dicht in $\mathcal{H}_2$, und der Operator $(\mathbb{1} - P)A(\mathbb{1} - P) : D_2 \to \mathcal{H}_2$ sei selbstadjungiert. Für die Größen*

$$\lambda := \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{H}_1 \\ \|\varphi\| = 1}} (\varphi, A\varphi) \; \text{und} \; \mu := \inf_{\substack{\varphi \in D_2 \\ \|\varphi\| = 1}} (\varphi, A\varphi)$$

gelte $\lambda < \mu$. Dann ist $A_\varepsilon := A + i\varepsilon(2P - \mathbb{1})$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dichotomisch.

[2] Anschaulich gesprochen versucht man, einen Teil des Spektrums in die obere, den anderen in die untere Halbebene zu verschieben.

Beweis. Wir schreiben A_ε als Blockmatrix:

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} + i\varepsilon\mathbb{1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - i\varepsilon\mathbb{1} \end{pmatrix}, \; A_{jk} : D_k \to \mathcal{H}_j, \; j,k = 1,2.$$

Bei der Identität verzichten wir auf eine Kennzeichnung der Räume. Nach Voraussetzung ist $A_{22} : D_2 \to \mathcal{H}_2$ selbstadjungiert; deshalb existiert nach Satz 3.2 die Resolvente $(A_{22} - i\varepsilon\mathbb{1} - x\mathbb{1})^{-1}$, so daß die Voraussetzungen von Lemma 3.4 erfüllt sind. Danach existiert $(A_\varepsilon - x\mathbb{1})^{-1} : \mathcal{H} \to D$ genau dann, falls

$$Z := A_{11} - x\mathbb{1} + i\varepsilon\mathbb{1} - A_{12}(A_{22} - x\mathbb{1} - i\varepsilon\mathbb{1})^{-1}A_{21}, \; Z : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1,$$

invertierbar ist. Da $\mathcal{H}_1$ endlichdimensional ist, genügt der Nachweis der Injektivität. Sei dazu $\varphi \in \mathcal{H}_1$ mit $Z\varphi = 0$. Wir zerlegen Z in eine Summe aus symmetrischen und antisymmetrischen Operatoren, wobei wir $A_{12}^* = A_{21}$ beachten:

$$\begin{aligned}
&A_{12}(A_{22} - (x + i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}A_{21} \\
&= A_{12}(A_{22} - (x - i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}(A_{22} - (x - i\varepsilon)\mathbb{1})(A_{22} - (x + i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}A_{21} \\
&= A_{12}(A_{22} - (x - i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}(A_{22} - x\mathbb{1})(A_{22} - (x + i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}A_{21} \\
&\quad + i\varepsilon A_{12}(A_{22} - (x - i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}(A_{22} - (x + i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}A_{21}
\end{aligned}$$

und bilden die quadratische Form mit φ:

$$\begin{aligned}
0 &= (\varphi, Z\varphi) \\
&= (\varphi, (A_{11} - x\mathbb{1})\varphi) + i\varepsilon\|\varphi\|^2 \\
&\quad - (\varphi, A_{12}(A_{22} - (x - i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}(A_{22} - x\mathbb{1})(A_{22} - (x + i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}A_{21}\varphi) \\
&\quad - i\varepsilon(\varphi, A_{12}(A_{22} - (x - i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}(A_{22} - (x + i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}A_{21}\varphi) \\
&= (\varphi, (A_{11} - x\mathbb{1})\varphi) - ((A_{22} - (x + i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}A_{21}\varphi, (A_{22} - x\mathbb{1})(A_{22} - (x + i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}A_{21}\varphi) \\
&\quad + i\varepsilon\|\varphi\|^2 - i\varepsilon\|(A_{22} - (x + i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}A_{21}\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

Aus dem Realteil folgt, wenn man die Definition von λ und μ beachtet:

$$\begin{aligned}
0 &= (\varphi, (A_{11} - x\mathbb{1})\varphi) - ((A_{22} - (x + i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}A_{21}\varphi, (A_{22} - x\mathbb{1})(A_{22} - (x + i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}A_{21}\varphi) \\
&\leq (\lambda - x)\|\varphi\|^2 - (\mu - x)\|(A_{22} - (x + i\varepsilon)\mathbb{1})^{-1}A_{21}\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

Mit dem Imaginärteil können wir den zweiten Summanden weiter umrechnen:

$$0 \leq (\lambda - x)\|\varphi\|^2 - (\mu - x)\|\varphi\|^2 = (\lambda - \mu)\|\varphi\|^2.$$

Wegen $\lambda - \mu < 0$ ist dies nur mit $\|\varphi\| = 0$, also $\varphi = 0$ möglich. □

Bemerkenswerterweise kommt es in Satz 3.5 weder auf die Größe der „Nebendiagonalelemente“ an, noch geht die Größe der „Lücke“ zwischen A_{11} und A_{22} ein, solange sie nur von Null verschieden ist.

4 Abschnittsdeterminanten von Gruppen beschränkter Operatoren

4.1 Die Integralformel

Zur Motivation rechnen wir ein einfaches Beispiel durch, bei dem sich alle Fragen explizit beantworten lassen. Wir gehen von der folgenden Schrödinger-Gleichung aus:

$$i \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & V \\ \bar{V} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \; u_1(0) = 1, \; u_2(0) = 0$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $V \in \mathbb{C}$. Wir interessieren uns für das Verhalten von u_1; deshalb entkoppeln wir das System und erhalten:

$$u_1'' + i(\lambda_1 + \lambda_2)u_1' - (\lambda_1\lambda_2 - |V|^2)u_1 = 0, \; u_1(0) = 1, \; u_1'(0) = -i\lambda_1.$$

Der übliche Ansatz führt zusammen mit den Anfangsbedingungen auf die Lösung:

$$u_1(t) = \frac{e^{-i\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}t}}{2\omega} \left((\omega - \frac{\Lambda}{2})e^{i\omega t} + (\omega + \frac{\Lambda}{2})e^{-i\omega t} \right)$$

mit

$$\Lambda := \lambda_1 - \lambda_2, \; \omega := \sqrt{\frac{\Lambda^2}{4} + |V|^2}.$$

Dieser Ausdruck zeigt schon das Charakteristikum der Integralformel, da im wesentlichen die Lösung des ungestörten Problems mit einem Korrekturfaktor multipliziert wird. Wir bringen die Lösung auf eine andere Gestalt:

$$u_1(t) = \frac{e^{-i\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}t}}{2\omega} \left(2\omega \cos \omega t - i\Lambda \sin \omega t\right).$$

Dem entnimmt sofort $u_1(t) \neq 0$ für alle t, falls nur $\Lambda \neq 0$ ist (für $\omega = 0$ ist alles trivial). Wir können sogar eine quantitative Aussage machen:

$$\begin{aligned} |u_1(t)|^2 &= \frac{1}{4\omega^2} \left(4\omega^2 \cos^2 \omega t + \Lambda^2 \sin^2 \omega t\right) \\ &= \cos^2 \omega t + \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + 4|V|^2} \sin^2 \omega t \\ &= 1 - \frac{4|V|^2}{\Lambda^2 + 4|V|^2} \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

Ist also $|\Lambda|$ groß gegen $|V|$, gilt:

$$|u_1(t)|^2 = 1 + O(\frac{|V|^2}{\Lambda^2}).$$

Wir wollen ähnliche Untersuchungen in beliebigen Hilbert-Räumen anstellen. Dabei beschränken wir uns nicht auf unitäre Operatoren, sondern beweisen allgemeiner eine Integralformel für die Abschnittsdeterminanten von Gruppen beschränkter Operatoren.

Satz 4.1. *Der Operator $A_0 : D(A_0) \to \mathcal{H}$ sei dicht definiert und abgeschlossen, und $-iA_0$ generiere eine Gruppe $U_0(t)$. Sei weiter $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator. Wir erklären die Operatoren $A(\alpha) : D(A_0) \to \mathcal{H}$ gemäß $A(\alpha) := A_0 + \alpha B$, $\alpha \in [0,1]$. Weiter sei $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein orthogonaler Projektor mit endlichdimensionalem Bild, der mit $U_0(t)$ kommutiert: $PU_0(t) = U_0(t)P$. Es gelte $\det PU(T,\alpha)P \neq 0$, $\alpha \in [0,1]$, für die von $-iA(\alpha)$ generierte Gruppe $U(t,\alpha)$. Sei schließlich der freie (zeitgeordnete) Greensche Operator G_0 erklärt gemäß:*

$$G_0(t) = \begin{cases} iU_0(t)P = iPU_0(t), & t \leq 0, \\ iU_0(t)[P - \mathbb{1}] = i[P - \mathbb{1}]U_0(t), & t > 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Dann besitzt die Integralgleichung

$$G(t,t';\alpha)\varphi = G_0(t-t')\varphi + \alpha \int_0^T G_0(t-\tau)BG(\tau,t';\alpha)\varphi \, d\tau,$$
$$t,t' \in [0,T], \;\; \alpha \in [0,1], \;\; \varphi \in \mathcal{H}, \tag{4.2}$$

(wenigstens) eine Lösung G, den zeitgeordneten Greenschen Operator, mit den Eigenschaften:

1. *Die Funktion $t \mapsto G(t,t';\alpha)$ ist stark stetig für $t \neq t'$ und alle $t' \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in [0,1]$.*
2. *Der Operator $G(t,t+0;\alpha)$ ist Spurklasse, und die Funktion $\operatorname{tr} BG(t,t+0;\alpha)$ ist bzgl. t und α integrierbar, so daß für die Abschnittsdeterminanten die Integralformel gilt:*

$$\det PU(T,1)P = \det PU_0(T)P \exp\left[-\int_0^1 \int_0^T \operatorname{tr} BG(t,t+0;\alpha)\, dt\, d\alpha\right]. \tag{4.3}$$

Dieser Satz hat einen störungstheoretischen Charakter. Er setzt die Determinante zum gestörten Operator $A_0 + B$ in Beziehung zur Determinante zum ungestörten Operator A_0. Die wesentliche Idee im Beweis von Satz 4.1 besteht darin, die Abhängigkeit vom Parameter α zu studieren, indem man die Ableitung nach α berechnet. Im Gegensatz dazu entwickelt man in der klassischen Störungstheorie, wie wir sie auch in Abschnitt 6.2 verwenden werden, die gesuchten Größen in eine Potenzreihe nach α. Eine solche Entwicklung kann man auch aus Satz 4.1 gewinnen, indem man beispielsweise die Integralgleichung (4.2) iteriert. Dies ist aber nicht die einzige Möglichkeit und auch gar nicht die zu empfehlende.

Wir arbeiten mit der von $-iA(\alpha)$ anstatt mit der von $A(\alpha)$ generierten Gruppe, um den Zusammenhang zur Schrödinger-Gleichung und dem folgenden Abschnitt über Riesz-Projektoren zu wahren.

Der Beweis von Satz 4.1 zerfällt in zwei Schritte.

Schritt 1: Wir wenden die Determinantenformel aus Korollar 2.6 auf den endlichdimensionalen Operator $PU(T,\alpha)P : \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} P$ an:

$$\det PU(T,1)P = \det PU_0(T)P \exp\left[\int_0^1 \operatorname{tr} U^+(T,\alpha)\frac{\partial U(T,\alpha)}{\partial \alpha}\, d\alpha\right].$$

Dabei ist $U^+(T,\alpha)$ die Pseudoinverse von $U(T,\alpha)$ bzgl. P gemäß Satz 2.8. Die Ableitung $\frac{\partial U(T,\alpha)}{\partial \alpha}$ haben wir in Satz 2.35 berechnet. Wir erhalten so die Formel:

$$\det PU(T)P = \det PU_0(T)P \exp\left[-i\int_0^1 \int_0^T \operatorname{tr} BU(t,\alpha)U^+(T,\alpha)U(T,\alpha)U(-t,\alpha)\, dt\right]. \tag{4.4}$$

Schritt 2: Wir definieren das G in der Integralformel (4.3) im wesentlichen als den Exponenten in (4.4):

$$G(t,t;\alpha) := iU(t,\alpha)U^+(T,\alpha)U(T,\alpha)U(-t,\alpha)$$

und leiten dann die Integralgleichung (4.2) für $G(t,t';\alpha)$ ab, wobei wir die Integralgleichung (2.33) für allgemeine Greensche Operatoren aus Satz 2.42 verwenden.

4.2 Beweis der Integralformel

Wir haben den Operator $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ als beschränkt vorausgesetzt; deshalb ergibt sich sofort, daß die $A(\alpha)$ auf $D(A_0)$ erklärt sind. Weiterhin wissen wir aus Lemma 2.31, daß $-iA(\alpha)$ eine Gruppe $U(t,\alpha)$ generiert, weil $-iA_0$ Generator einer Gruppe ist.

4.2.1 Schritt 1: Die endlichdimensionale Determinantenformel

Wir wenden (2.4) auf den endlichdimensionalen Operator $PU(t,\alpha)P : \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} P$ an.

Satz 4.2. *Sei $U^+(T,\alpha)$ die Pseudoinverse von $U(T,\alpha)$ bzgl. P. Dann gilt:*

$$\det PU(T,1)P = \det PU_0(T)P \exp\left[-i\int_0^1\int_0^T \operatorname{tr} BU(t,\alpha)U^+(T,\alpha)U(T,\alpha)U(-t,\alpha)\,dt\,d\alpha\right].$$

Beweis. Nach Satz 2.35 ist $U(T,\alpha)$ bzgl. der Operatornorm stetig differenzierbar nach α. Zusammen mit $\det PU(T,\alpha)P \neq 0$ erfüllt der endlichdimensionale Operator $PU(T,\alpha)P : \operatorname{ran} P \to \operatorname{ran} P$ die Voraussetzungen von Korollar 2.6. Also folgt wegen $U(T,0) = U_0(T)$:

$$\det PU(T,1)P = \det PU_0(T)P \exp\left[\int_0^1 \operatorname{tr} U^+(T,\alpha)\frac{\partial U(T,\alpha)}{\partial\alpha}\,d\alpha\right].$$

Die Ableitung $\partial U/\partial\alpha$ haben wir in Satz 2.35 ausgerechnet:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}U(T,\alpha)\varphi = -i\int_0^T U(T,\alpha)U(-t,\alpha)BU(t,\alpha)\varphi\,dt,\ \ \varphi \in \mathcal{H}.$$

Da die $U(t,\alpha)$ stark stetig von t abhängen und sich die Spurbildung nur über den endlichdimensionalen Raum $\operatorname{ran} P$ erstreckt, sind die folgenden Integrale wohldefiniert (Satz 2.3). Beachten wir noch die zyklische Vertauschbarkeit unter der Spur, so folgt:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} U^+(T,\alpha)\frac{\partial U(T,\alpha)}{\partial\alpha} &= \int_0^T \operatorname{tr} U^+(T,\alpha)[-iU(T,\alpha)U(-t,\alpha)BU(t,\alpha)]\,dt\\ &= \int_0^T \operatorname{tr} BU(t,\alpha)U^+(T,\alpha)[-iU(T,\alpha)U(-t,\alpha)]\,dt.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. □

4.2.2 Schritt 2: Die Integralgleichung

Der Ausdruck $iU(t,\alpha)U^+(T,\alpha)U(T,\alpha)U(-t,\alpha)$ läßt sich unabhängig von $U(t,\alpha)$ charakterisieren. Dazu brauchen wir die Greenschen Operatoren aus Abschnitt 2.4. Wir setzen in Definition 2.40 $\gamma = i$ und $K = U^+(T,\alpha)U(T,\alpha)$.

Definition 4.3. *Sei $U^(T,\alpha)$ die Pseudoinverse von $U(T,\alpha)$ bzgl. P. Der durch*

$$G(t,t';\alpha) := \begin{cases} iU(t,\alpha)U^+(T,\alpha)U(T,\alpha)U(-t',\alpha), & t \le t', \\ iU(t,\alpha)[U^+(T,\alpha)U(T,\alpha) - \mathbb{1}]U(-t',\alpha), & t > t', \end{cases}$$

erklärte Operator heißt zeitgeordneter Greenscher Operator.[1]

Wir halten die Eigenschaften von G fest.

Lemma 4.4. *Sei G der zeitgeordnete Greensche Operator gemäß Definition 4.3. Dann ist die Abbildung $t \mapsto G(t,t';\alpha)$ für $t \neq t'$ und alle $t' \in \mathbb{R}$ stark stetig. Der Operator $G(t,t+0;\alpha)$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\alpha \in [0,1]$ Spurklasse, und das folgende Integral existiert:*

$$\int_0^1 \int_0^T \operatorname{tr} BG(t,t+0;\alpha)\,dt\,d\alpha.$$

Beweis. Die starke Stetigkeit von $G(\cdot,t';\alpha)$ (für $t \neq t'$) folgt sofort aus der starken Stetigkeit von $U(t,\alpha)$ und der Definition von G.

Da $U^+(T,\alpha) = PU^+(T,\alpha)$ ein endlichdimensionales Bild hat und somit Spurklasse ist, ist auch $G(t,t+0;\alpha)$ ein Spurklasseoperator.

Die Existenz des Integrals ergibt sich sofort aus Satz 4.2. □

G genügt einfachen Randbedingungen.

Lemma 4.5. *Der zeitgeordnete Greensche Operator gemäß Definition 4.3 erfüllt für alle $\alpha \in [0,1]$ die Randbedingungen:*

$$(\mathbb{1} - P)G(0,t';\alpha) = 0, \;\; PG(T,t';\alpha) = 0, \;\; 0 \le t' \le T. \tag{4.5}$$

Beweis. Wir beachten $U^+(T,\alpha) = PU^+(T,\alpha)$ (Satz 2.8):

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} - P)G(0,t';\alpha) &= i(\mathbb{1} - P)U(0,\alpha)U^+(T,\alpha)U(T,\alpha)U(-t',\alpha) \\ &= i(\mathbb{1} - P)U^+(T,\alpha)U(T,\alpha)U(-t',\alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für $t = T$ berücksichtigen wir $PU(T,\alpha)U^+(T,\alpha) = P$ (vgl. Satz 2.8):

$$\begin{aligned} PG(T,t';\alpha) &= iPU(T,\alpha)[U^+(T,\alpha)U(T,\alpha) - \mathbb{1}]U(-t',\alpha) \\ &= i[PU(T,\alpha) - PU(T,\alpha)]U(-t',\alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

[1] G hängt natürlich auch vom Intervall $[0,T]$ ab. Wir verzichten auf eine explizite Kennzeichnung, da andernfalls G zu variablenlastig wird. In der Physik schreibt man die Lösung von Schrödinger-Gleichungen mit zeitabhängigem Potential als formale Exponentialfunktion, die sogenannte zeitgeordnete Exponentialfunktion. Aus diesem Zusammenhang stammt die Bezeichnung zeitgeordneter Greenscher Operator.

Für $\alpha = 0$ erhalten wir den freien zeitgeordneten Greenschen Operator wieder.

Lemma 4.6. *Für den freien zeitgeordneten Greenschen Operator $G_0(t)$ aus (4.1) gilt: $G(t, t'; 0) = G_0(t - t')$. Falls A_0 selbstadjungiert ist, ist $\|G_0(t)\| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung kommutiert P mit $U_0(t)$. Daraus folgt:

$$U_0^+(T) = U_0(-T)P.$$

Also ist für $t \leq t'$:

$$-iG(t, t'; 0) = U_0(t)U_0^+(T)U_0(T)U_0(-t') = U_0(t)PU_0(-t') = U_0(t - t') = -iG_0(t - t').$$

Entsprechend rechnet man für $t > t'$ und erhält so den ersten Teil der Behauptung.

Falls A_0 selbstadjungiert ist, ist $U_0(t)$ nach Korollar 2.24 unitär. Da P ein orthogonaler Projektor ist, haben wir $\|P\| \leq 1$. Für $t \leq 0$ folgt damit:

$$\|G_0(t)\| = \|iPU_0(t)\| \leq \|P\|\|U_0(t)\| \leq 1.$$

Die Behauptung für $t > 0$ erhält man entsprechend wegen $\|\mathbb{1} - P\| \leq 1$. □

Der zeitgeordnete Greensche Operator G und der freie zeitgeordnete Greensche Operator G_0 sind durch eine Integralgleichung miteinander verknüpft.

Satz 4.7. *Der zeitgeordnete Greensche Operator G gemäß Definition 4.3 erfüllt die Integralgleichung:*

$$G(t, t'; \alpha)\varphi = G_0(t - t')\varphi + \alpha \int_0^T G_0(t - \tau)BG(\tau, t'; \alpha)\varphi \, d\tau,$$
$$0 \leq t, t' \leq T, \;\; \alpha \in [0, 1], \;\; \varphi \in \mathcal{H}. \quad (4.6)$$

Beweis. Wir setzen in Satz 2.42 $\gamma = i$ und $S_1 = -iB$ sowie $T_0 = 0$ und $T_1 = T$ und erhalten:

$$G(t, t'; \alpha)\varphi + G_0(t)G(0, t'; \alpha)\varphi - G_0(t - T)G(T, t'; \alpha)\varphi$$
$$= G_0(t - t')\varphi + \alpha \int_0^T G_0(t - \tau)BG(\tau, t'; \alpha)\varphi \, d\tau, \;\; \varphi \in \mathcal{H}.$$

Das ist schon fast die gesuchte Integralgleichung. Wir erinnern uns an die Definition von G_0 und beachten $0 \leq t \leq T$ sowie die Randbedingungen (4.5) für G:

$$G_0(t)G(0, t'; \alpha) = iU_0(t)[P - \mathbb{1}]G(0, t'; \alpha) = 0$$
$$G_0(t - T)G(T, t'; \alpha) = iU_0(t - T)PG(T, t'; \alpha) = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Die Kombination der Sätze 4.2 und 4.7 mit Defintion 4.3 liefert die Behauptung von Satz 4.1.

4.3 Lösungstheorie der Integralgleichung

Die Bezeichnungen und Voraussetzungen seien wie in Satz 4.1.[2] Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen der eindeutigen Lösbarkeit der Integralgleichung (4.2) und der Determinante $\det PU(T,\alpha)P$. Wir werden zeigen, daß aus der Eindeutigkeit der Lösung auch schon die Existenz einer Lösung für die spezielle rechte Seite in (4.2) folgt. Wir brauchen also nur die homogene Integralgleichung zu betrachten. Zunächst zeigen wir, daß die homogene Gleichung zu einem homogenen Randwertproblem in Beziehung steht.

Satz 4.8. *Die Funktion $\varphi(\cdot) : t \mapsto \varphi(t) \in \mathcal{H}$ sei stetig differenzierbar und löse die Integralgleichung:*

$$\varphi(t) = \alpha \int_0^T G_0(t-\tau)B\varphi(\tau)\,d\tau,\ \ 0 \le t \le T. \tag{4.7}$$

Dann ist $\varphi(\cdot)$ auch eine Lösung des Randwertproblems:

$$i\frac{d}{dt}\varphi(t) = A(\alpha)\varphi(t),\ \ (\mathbb{1}-P)\varphi(0) = 0,\ \ P\varphi(T) = 0. \tag{4.8}$$

Beweis. Wir spalten das Integral in (4.7) auf:

$$I(t) := \int_0^T G_0(t-\tau)B\varphi(\tau)\,d\tau = \int_0^t iU_0(t-\tau)[P-\mathbb{1}]B\varphi(\tau)\,d\tau + \int_t^T iU_0(t-\tau)PB\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Wir haben $\varphi(\cdot)$ als stetig differenzierbar vorausgesetzt. Dann sind auch die Funktionen $\tau \mapsto [P-\mathbb{1}]B\varphi(\tau)$ und $\tau \mapsto PB\varphi(\tau)$ stetig differenzierbar, da P und B beschränkt sind. Aus Satz 2.26 folgt, daß $I(\cdot)$ stetig differenzierbar ist und $\varphi(\cdot)$ die Differentialgleichung (4.8) erfüllt. Für den freien zeitgeordneten Greenschen Operator G_0 ist nach Definition für alle $\tau \in [0,T]$:

$$(\mathbb{1}-P)G_0(-\tau) = i(\mathbb{1}-P)PU_0(-\tau) = 0,\ \ PG_0(T-\tau) = iP(P-\mathbb{1})U_0(T-\tau) = 0.$$

Daraus folgen die Randbedingungen. □

Die Voraussetzung, daß die Lösung der Integralgleichung stetig differenzierbar sei, ergibt sich bei einem unbeschränkten Generator im allgemeinen nicht aus der Integralgleichung (vgl. [11], Abschnitt 4.2.) und kann daher nicht fallen gelassen werden. Für beschränkte Operatoren ist dies allerdings richtig.

Korollar 4.9. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 4.1 sei $A_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beschränkt. Dann ist jede stetige Lösung der Integralgleichung (4.7) differenzierbar und erfüllt das Randwertproblem (4.8)*

Beweis. Die Gruppe $U_0(t)$ wird vom beschränkten Operator $-iA_0$ generiert und ist deshalb bzgl. der Operatornorm differenzierbar (Satz 2.27). Dann folgt aus dem Beweis von Satz 4.8 die Behauptung. □

Der Satz 4.8 läßt sich umkehren.

[2] Der Scharparameter α dürfte in diesem Abschnitt auch beliebige komplexe Werte annehmen, was aber in unserem Zusammenhang nicht notwendig ist.

Satz 4.10. *Die Funktion $\varphi(\cdot) : t \mapsto \varphi(t) \in \mathcal{H}$ sei stetig differenzierbar, und es gelte $\varphi(0) \in D(A)$. Löst dann $\varphi(\cdot)$ das Randwertproblem (4.8), dann ist $\varphi(\cdot)$ auch Lösung der Integralgleichung (4.7).*

Beweis. Sei $\varphi(\cdot)$ eine Lösung von (4.8). Nach Satz 2.25 läßt sich $\varphi(t)$ schreiben als:

$$\varphi(t) = U(t,\alpha)\varphi(0),$$

da $\varphi(0) \in D(A)$ ist. Aus der Integrationsregel (2.17) erhalten wir für $t_0 = 0$ und $t_1 = t$:

$$U(t,\alpha)\varphi(0) = U_0(t)\varphi(0) - i\alpha \int_0^t U_0(t-\tau)BU(\tau,\alpha)\varphi(0)\,d\tau. \tag{4.9}$$

Für $t_0 = t$ und $t_1 = T$ liefert (2.17):

$$U(t,\alpha)\varphi(0) = U_0(t-T)U(T,\alpha)\varphi(0) + i\alpha \int_t^T U_0(t-\tau)BU(\tau,\alpha)\varphi(0)\,d\tau. \tag{4.10}$$

Wir multiplizieren (4.9) mit $\mathbb{1} - P$ und (4.10) mit P und beachten $PU_0(t) = U_0(t)P$. Dann folgt zusammen mit den Randbedingungen:

$$(\mathbb{1} - P)\varphi(t) = 0 - i\alpha \int_0^t (\mathbb{1} - P)U_0(t-\tau)B\varphi(\tau)\,d\tau \tag{4.11}$$

$$P\varphi(t) = 0 + i\alpha \int_t^T PU_0(t-\tau)B\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{4.12}$$

Addition von (4.11) und (4.12) ergibt die Behauptung. □

Die Lösbarkeit des Randwertproblems ist durch $\det PU(T,\alpha)P$ charakterisiert.

Satz 4.11. *Das Randwertproblem (4.8) besitzt genau dann nur die triviale Lösung, wenn $\det PU(T,\alpha)P \neq 0$ ist.*

Beweis. Die Lösung des Randwertproblems läßt sich nach Satz 2.25 schreiben als:

$$\varphi(t) = U(t,\alpha)\varphi(0).$$

Aus den Randbedingungen folgt $\varphi(0) = P\varphi(0)$ sowie:

$$0 = P\varphi(T) = PU(T,\alpha)\varphi(0) = PU(T,\alpha)P\varphi(0).$$

Betrachtet man diese Gleichung auf $\operatorname{ran} P$, sieht man sofort, daß $\det PU(T,\alpha)P \neq 0$ mit $\varphi(0) = 0$ gleichbedeutend ist. Daraus erhält man die Behauptung. □

Aus den vorangehenden Überlegungen erhalten wir ein Kriterium, wann die Determinante $\det PU(T,\alpha)P$ nicht verschwindet.

Korollar 4.12. *Die homogene Gleichung (4.7) besitze nur die triviale Lösung. Dann gilt:*

1. $\det PU(T,\alpha)P \neq 0$.
2. *Die inhomogene Gleichung (4.2) besitzt genau eine Lösung.*

Beweis. 1. Falls $\det PU(T,\alpha)P = 0$ ist, besitzt das Randwertproblem (4.8) eine nichttriviale Lösung, die gleichzeitig auch eine nichttriviale Lösung der Integralgleichung (4.7) ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

2. Da die homogene Gleichung (4.7) nur die triviale Lösung besitzt, kann die inhomogene Gleichung (4.2) höchstens eine Lösung haben. Da nach 1. $\det PU(T,\alpha)P \neq 0$ ist, existiert in Definition 4.3 der Operator $U^+(T,\alpha)$. Nach Satz 4.7 löst $G(t,t';\alpha)$ die Gleichung (4.2). □

Diese Lösbarkeitsaussage erinnert insofern an die Riesz-Theorie für kompakte Operatoren, als aus der Eindeutigkeit der Lösung auch die Existenz einer Lösung folgt. Dabei ist aber zu beachten, daß sich die Existenzaussage nur auf die spezielle Gleichung (4.2) bezieht.

4.4 Bemerkungen

Eine sorgfältige Analyse des Beweises in Abschnitt 4 zeigt, daß sich die Integralformel (4.3) in mehrere Richtungen verallgemeinern läßt.

Die Forderung nach der vollen Gruppeneigenschaft der $U(t,\alpha)$ ist überflüssig, wie ein Blick auf die Definition von G zeigt. Es reicht schon die Halbgruppeneigenschaft und insbesondere die Existenz von $U(T-t,\alpha)$ für $T \geq t$. Damit lassen sich unsere Resultate auf die Wärmeleitungsgleichung ausdehnen.

Eine andere Voraussetzung, die man ohne rechnerische Schwierigkeiten fallen lassen kann, ist die Zeitunabhängigkeit von A. In der Tat gilt die Formel auch für zeitabhängige Operatoren $A(t) = A_0 + B(t)$:

$$\det PU(T)P = \det PU_0(T)P \times \exp\left[-\int_0^1 \int_0^T \operatorname{tr} B(t)G(t,t+0;\alpha)\,dt\,d\alpha\right].$$

Der Exponent genügt der entsprechenden Integralgleichung:

$$G(t,t';\alpha)\varphi = G_0(t-t')\varphi + \alpha \int_0^T G_0(t-\tau)B(\tau)G(\tau,t';\alpha)\varphi\,d\tau,\ \ \varphi \in \mathcal{H}.$$

Wir können sogar von allgemeinen Operatorscharen $A(t,\alpha)$ ausgehen, ohne die rechnerische Seite des Beweises zu verändern. Allerdings werden die technischen Schwierigkeiten größer, da die $U(t)$ in diesem Falle keine Gruppe mehr sind, so daß man sich als erstes die Invertierbarkeit von $U(t)$ überlegen muß. Setzt man voraus, daß $A(t): \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt ist, treten kaum technische Schwierigkeiten auf und alle Rechnungen lassen sich genauso wie hier durchführen. Anwendungen in der Quantenmechanik verlangen aber, daß A_0 unbeschränkt ist. Dann sind selbst für beschränkte $B(t)$ zusätzliche technische Voraussetzungen nötig.[3] Die Situation vereinfacht sich etwas, wenn die Zeitabhängigkeit nur durch einen skalaren Faktor auftritt:

$$B(t) = f(t)B,\ \ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Diese Gestalt haben die Operatoren aus der Einleitung, die im Gefolge des Adiabatischen Theorems auftreten. Es ist möglich, Satz 4.1 auf diesen Fall auszudehnen.

Weiter kann man auch unbeschränkte Zeitintervalle zulassen. Dies ist wichtig, um mittels des Adiabatischen Theorems den Zusammenhang mit den Riesz-Projektoren herzustellen (vgl. die Einleitung).

[3] Allgemeine Aussagen über solche Evolutionsgleichungen findet man in [11] oder [20].

5 Abschnittsdeterminanten von Riesz-Projektoren

5.1 Die Integralformel

Zur Orientierung beginnen wir mit einem einfachen Beispiel. Sei:

$$A(V) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & V \\ \bar{V} & \lambda_2 \end{pmatrix}, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ V \in \mathbb{C}.$$

Wir fragen uns, wie die Eigenvektoren von $A(V)$ gegenüber denen von $A(0)$ verdreht sind. Man rechnet leicht nach, daß durch

$$x_1(V) = \frac{\frac{\Lambda}{2} + \omega}{((\frac{\Lambda}{2} + \omega)^2 + |V|^2)^{1/2}}, \ x_2(V) = \frac{\bar{V}}{((\frac{\Lambda}{2} + \omega)^2 + |V|^2)^{1/2}}$$

ein normierter Eigenvektor $(x_1(V), x_2(V))^T$ von $A(V)$ gegeben ist. Zur Abkürzung haben wir

$$\Lambda := \lambda_1 - \lambda_2, \ \omega := \sqrt{\frac{\Lambda^2}{4} + |V|^2}$$

gesetzt. Wir setzen $\Lambda > 0$ voraus, so daß wir für $V \to 0$ die Werte $x_1(0) = 1$ und $x_2(0) = 0$ erhalten. In diesem Sinne entspricht $(x_1(V), x_2(V))^T$ dem ungestörten Eigenvektor $(1,0)^T$. Die maßgebliche Größe ist das Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} x_1(V) \\ x_2(V) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1(V).$$

Man stellt sofort $x_1(V) \neq 0$ fest. Wir können sogar ein quantitatives Resultat angeben:

$$|x_1(V)|^2 = \frac{(\frac{\Lambda}{2} + \omega)^2}{(\frac{\Lambda}{2} + \omega)^2 + |V|^2} = \frac{1}{1 + \frac{4|V|^2}{\Lambda^2 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4|V|^2}{\Lambda^2}}\right]^2}}.$$

Ist also $\frac{|V|^2}{\Lambda^2}$ hinreichend klein, so erhalten wir eine Entwicklung nach Potenzen von $\frac{|V|^2}{\Lambda^2}$. Für $\Lambda = 0$ ist die Situation im Gegensatz zu den Abschnitten 3.1 zur Dichotomie und 4.1 über die Abschnittsdeterminanten von Gruppen beschränkter Operatoren ein wenig anders. Sei $\Lambda = 0$, also $\lambda_1 = \lambda_2$. Auch hier ist noch $x_1(V) \neq 0$. Allerdings können wir nicht mehr sagen, daß dieser Eigenvektor dem ungestörten entspricht, da wir für $V \to 0$ keine Konvergenz gegen $(1,0)^T$ haben. Das liegt daran, daß für $V = 0$ ein zweifacher Eigenwert vorliegt.

Um in allgemeinen Hilbert-Räumen ähnliche Fragestellungen untersuchen zu können, beweisen wir eine Integralformel für Riesz-Projektoren eines selbstadjungierten Operators.

Satz 5.1. *Seien $A_0 : D(A_0) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator und $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter symmetrischer Operator. Wir erklären die Operatoren $A(\alpha) : D(A_0) \to \mathcal{H}$, $\alpha \in [0,1]$, gemäß: $A(\alpha) := A_0 + \alpha B$. Von den $A(\alpha)$ verlangen wir für alle $\alpha \in [0,1]$:*

1. Es gebe einen Integrationsweg Γ mit der Eigenschaft $\Gamma \subset \rho(A(\alpha))$. Mit $P(\alpha)$ bezeichnen wir die Riesz-Projektoren von $A(\alpha)$ bzgl. Γ:

$$P(\alpha) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}\, dz.$$

2. Das Bild von $P(0)$ sei endlichdimensional mit $N := \dim \operatorname{ran} P(0) \geq 1$.

3. Es gelte $\det P(0)P(\alpha)P(0) \neq 0$.

4. Seien $\mathcal{H}_1 := \operatorname{ran} P(0) \subset D(A(\alpha))$ und $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_1^\perp$. $D_2 := \mathcal{H}_2 \cap D(A_0)$ liege dicht in $\mathcal{H}_2$, und $(\mathbb{1} - P(0))A(\alpha)(\mathbb{1} - P(0)) : D_2 \to \mathcal{H}_2$ sei selbstadjungiert. Für die Größen

$$\lambda(\alpha) := \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{H}_1 \\ \|\varphi\|=1}} (\varphi, P(0)A(\alpha)P(0)\varphi), \;\; \mu(\alpha) := \inf_{\substack{\varphi \in D_2 \\ \|\varphi\|=1}} (\varphi, (\mathbb{1} - P(0))A(\alpha)(\mathbb{1} - P(0))\varphi)$$

gelte $\lambda(\alpha) < \mu(\alpha)$.

Schließlich sei der freie zeitgeordnete Greensche Operator G_0 wie in Satz 4.1 erklärt. Dann besitzt die Wiener-Hopf-Gleichung

$$G_\varepsilon(t, t'; \alpha)\varphi = e^{-\varepsilon|t-t'|} G_0(t - t')\varphi + \alpha \int_{-\infty}^0 e^{-\varepsilon|t-\tau|} G_0(t - \tau) B G_\varepsilon(\tau, t'; \alpha)\varphi \, d\tau,$$
$$-\infty < t, t' \leq 0, \;\; \alpha \in [0, 1], \;\; \varphi \in \mathcal{H}, \quad (5.1)$$

für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ (wenigstens) eine Lösung G_ε, den zeitgeordneten Greenschen Operator, mit den Eigenschaften:

a. Die Abbildung $t \mapsto G_\varepsilon(t, t'; \alpha)$ ist für $t \neq t'$ und alle $t' \in \mathbb{R}$ stark stetig. Wir haben die Abschätzung $\|G_\varepsilon(t, t'; \alpha)\| \leq Ce^{\delta t}$ mit $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

b. $G_\varepsilon(t, t + 0; \alpha)$ ist ein Spurklasseoperator, und $\operatorname{tr} BG_\varepsilon(t, t + 0; \alpha)$ ist bzgl. t und α integrierbar, so daß für die Abschnittsdeterminanten die Integralformel gilt:

$$\det P(0)P(1)P(0) = \lim_{\eta \to +0} \lim_{\varepsilon \to +0} \exp \left[-2 \operatorname{Re} \int_0^1 \int_{-\infty}^0 e^{\eta t} \operatorname{tr} BG_\varepsilon(t, t + 0; \alpha) \, dt \, d\alpha \right]. \quad (5.2)$$

Die Forderung nach einem Integrationsweg Γ mit der Eigenschaft $\Gamma \subset \rho(A(\alpha))$ ist beispielsweise erfüllt, falls $\|B\|$ hinreichend klein ist (vgl. Satz 2.11). Die Forderung nach $N \geq 1$ ist sinnvoll, weil sonst $P(0)$ der Nulloperator wäre.

Wie in der Einleitung dargelegt wurde, läßt sich dieser Satz als Adiabatisches Theorem auffassen. Wir erinnern kurz an das klassische Adiabatische Theorem (vgl. die Einleitung und [2]). Die Spektralprojektoren $P(s)$ einer Schar selbstadjungierter Operatoren $H(s)$ lassen sich asymptotisch ineinander transformieren; d.h. es gilt für $\eta \to 0$:

$$P(s) = U_\eta(s)P(0)U_\eta^*(s) + O(\eta).$$

Die Operatoren U_η erfüllen eine Schrödinger-Gleichung:

$$i\eta \frac{d}{ds} U_\eta(s) = H(s) U_\eta(s),\ U_\eta(0) = \mathbb{1}.$$

Die Gültigkeit dieses Theorems erfordert eine Lücke im Spektrum aller $H(s)$. Dies ist vergleichbar mit der Lückenbedingung 1. aus Satz 5.1. In gewisser Weise gehört zu dieser Voraussetzung der Parameter η. Aus diesem Grunde haben wir auch dieselbe Bezeichnung wie beim klassischen Theorem verwendet. Zusätzlich haben wir aber noch die Lückenbedingung 4., zu der der Parameter ε gehört. Diese bezieht sich auf den Wertebereich und nicht auf das Spektrum. Im allgemeinen folgen die beiden Bedingungen 1. und 4. nicht auseinander. Aus der Bedingung 4. folgt mit dem Dichotomie-Kriterium 3.5, daß der Operator

$$A_\varepsilon(\alpha) := A(\alpha) + i\varepsilon(2P(0) - \mathbb{1})$$

für $\varepsilon \neq 0$ keine reellen Spektralwerte hat, was im Beweis wesentlich ist. An dieser Stelle sehen wir auch, daß das Kriterium 3.3 von Baskakov nicht anwendbar ist, da mit $\varepsilon \to 0$ der Imaginärteil von $A_\varepsilon(\alpha)$ klein wird.

Wir gliedern den Beweis von Satz 5.1 in vier Schritte.

Schritt 1: Wie schon in Abschnitt 4 gehen wir aus von der Integralformel für endlichdimensionale Determinanten, wobei wir aber die Version für orthogonale Projektoren aus Lemma 2.9 verwenden:

$$\det P(0)P(1)P(0) = \det P(0)P(0)P(0) \exp\left[2\,\mathrm{Re} \int_0^1 \mathrm{tr}\, P^+(\alpha)(\mathbb{1} - P(\alpha))P'(\alpha)P(\alpha)\, d\alpha\right]. \tag{5.3}$$

Dabei ist $P^+(\alpha)$ die Pseudoinverse von $P(\alpha)$ bzgl. $P(0)$ gemäß Satz 2.8. Die Ableitung $P'(\alpha)$ berechnet sich gemäß Satz 2.16) zu:

$$P'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1} B (z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}\, dz. \tag{5.4}$$

Schritt 2: Die Resolvente ist im wesentlichen die Fourier-Transformierte der unitären Gruppe. Eine rein formale Anwendung der Parsevalschen Gleichung der Fourier-Transformation auf das Integral in (5.4) würde so den Zusammenhang mit der Schrödinger-Gleichung herstellen. Wir präzisieren diese Idee, indem wir das Spektrum von $A(\alpha)$ in die komplexe Ebene verschieben. Dazu addieren wir zwei Imaginärteile:

$$A_\varepsilon(\alpha) := A(\alpha) + i\varepsilon(2P(0) - \mathbb{1}),\ \varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{5.5}$$

$$A_{\eta,\varepsilon}(\alpha) := A_\varepsilon(\alpha) + \frac{i\eta}{2}(2P_\varepsilon(\alpha) - \mathbb{1}),\ \eta \in \mathbb{R}, \tag{5.6}$$

mit den zu $A_\varepsilon(\alpha)$ gehörenden Riesz-Projektoren $P_\varepsilon(\alpha)$.

Schritt 3: Der Operator $A_{\eta,\varepsilon}(\alpha)$ hat für $\eta \neq 0$ keine reellen Spektralwerte mehr, so daß wir mithilfe der Laplace-Transformation zur Gruppe $U_\varepsilon(t, \alpha)$ übergehen können. Spaltet man noch einen Phasenfaktor ab, so gelangt man zu der Formel:

$$\begin{aligned} &\det P(0)P(1)P(0) \\ &= \lim_{\eta \to +0} \lim_{\varepsilon \to 0} \exp\left[-2\,\mathrm{Re}\, i \int_0^1 \int_{-\infty}^0 e^{\eta t}\, \mathrm{tr}\, B U_\varepsilon(t, \alpha) P_\varepsilon^+(\alpha) P_\varepsilon(\alpha) U_\varepsilon(-t, \alpha)\, dt\, d\alpha\right]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Der Faktor $e^{\eta t}$ ist eine Folge der Störung in (5.6).

Schritt 4: Wieder analog zu Abschnitt 4 charakterisieren wir den Exponenten in (5.7) unabhängig von U_ε. Wir definieren im wesentlichen $G_\varepsilon(t,t;\alpha)$ als den Exponenten in (5.7) und zeigen dann mithilfe der Integralgleichung in Satz 2.42, daß $G_\varepsilon(t,t';\alpha)$ für $\varepsilon > 0$ der Wiener-Hopf-Gleichung (5.1) genügt. Der Faktor $e^{-\varepsilon|t-\tau|}$ in (5.1) ist eine Folge der Störung in (5.5).

Der Unterschied zu Abschnitt 4 liegt in den zusätzlichen mittleren Schritten 2 und 3. Die Verschiebung des Spektrums ist notwendig, um die Laplace-Transformation anwenden zu können. Erst dadurch können wir den Zusammenhang zwischen Resolvente und Gruppe herstellen und eine zu Abschnitt 4 analoge Integralgleichung herleiten.

5.2 Beweis der Integralformel

Wir notieren einige Eigenschaften, die sich sofort aus den Voraussetzungen ergeben.

Lemma 5.2. *Für alle $\alpha \in [0,1]$ gilt:*

1. *$A(\alpha)$ ist auf $D(A_0)$ selbstadjungiert, und $P(\alpha)$ ist ein orthogonaler Projektor.*
2. *Das Bild von $P(\alpha)$ ist endlichdimensional mit $\dim \operatorname{ran} P(\alpha) = N$.*
3. *Die Spektralmenge von $A(\alpha)$ bzgl. Γ enthält genau N Eigenwerte (mit Vielfachheit gezählt) und sonst keine weiteren Spektralwerte.*

Beweis. 1. $A(\alpha)$ ist selbstadjungiert, da die Summe aus einem selbstadjungierten und einem beschränkten symmetrischen Operator wieder selbstadjungiert ist (vgl. [13]). $P(\alpha)$ ist als Riesz-Projektor eines selbstadjungierten Operators ein orthogonaler Projektor (Satz 2.15).

2. Nach Satz 2.16 hängen die $P(\alpha)$ stetig differenzierbar und somit stetig von α ab. Daraus folgt nach Lemma 2.10, daß $\dim \operatorname{ran} P(\alpha) = \dim \operatorname{ran} P(0) = N$ ist.

3. Folgt aus 2. und Korollar 2.14. $\square$

5.2.1 Schritt 1: Die endlichdimensionale Determinantenformel

Der erste Schritt besteht nur aus einer einfachen Anwendung von Lemma 2.9 auf die Schar der Riesz-Projektoren von $A(\alpha)$.

Satz 5.3. *Für die Schar der Riesz-Projektoren $P(\alpha)$ zu $A(\alpha)$ gilt:*

$$\det P(0)P(1)P(0) = \exp\left[2\operatorname{Re}\int_0^1 \operatorname{tr} P^+(\alpha)(\mathbb{1} - P(\alpha))P'(\alpha)P(\alpha)\,d\alpha\right]. \tag{5.8}$$

Dabei ist $P^+(\alpha)$ die Pseudoinverse von $P(\alpha)$ bzgl. $P(0)$, und $P'(\alpha)$ ist durch ein Friedrichs-Integral gegeben:

$$P'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}B(z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}\,dz. \tag{5.9}$$

Beweis. Die $P(\alpha)$ sind nach Satz 2.16 bzgl. der Operatornorm stetig differenzierbar nach α, und die Ableitung $P'(\alpha)$ ist durch das Friedrichs-Integral (5.9) gegeben. Wir wenden Lemma 2.9 auf den endlichdimensionalen Operator $P(0)P(\alpha)P(0) : \operatorname{ran} P(0) \to \operatorname{ran} P(0)$ an und beachten noch $\det P(0)P(0)P(0) = 1$ (wegen $N \geq 1$). Dann folgt sofort die Aussage des Satzes. $\square$

5.2.2 Schritt 2: Verschiebung des Spektrums

Wir addieren einen Imaginärteil zu $A(\alpha)$:

$$A_\varepsilon(\alpha) := A(\alpha) + i\varepsilon J,\ J := 2P(0) - \mathbb{1},\ \varepsilon \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

Operatoren von diesem Typus haben wir in Abschnitt 3 studiert. Wir bemerken:

$$J^2 = 4P(0)^2 - 4P(0) + \mathbb{1} = \mathbb{1},\ J^* = J,\ \|J\| = 1. \tag{5.11}$$

$A_\varepsilon(\alpha)$ ist zwar nicht mehr symmetrisch, hat aber dennoch angenehme Eigenschaften.

Lemma 5.4. *Die gemäß (5.10) erklärten $A_\varepsilon(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, sind für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ dicht definiert und abgeschlossen, und für alle $\alpha \in [0,1]$ gilt:*

1. *$\sigma(A_\varepsilon(\alpha)) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\operatorname{Im} z| \leq |\varepsilon|\}$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Die Resolvente läßt sich abschätzen:*

$$\|(z\mathbb{1} - A_\varepsilon(\alpha))^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z| - |\varepsilon|},\ |\operatorname{Im} z| > |\varepsilon|. \tag{5.12}$$

2. *Wir wählen $\varepsilon_0 > 0$ so, daß $\varepsilon_0 m < 1$ ist, wobei*

$$m := \max_{\substack{z\in\Gamma\\ \alpha\in[0,1]}} \|(z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}\| < \infty \tag{5.13}$$

wohldefiniert ist.[1] *Dann ist $\Gamma \subset \rho(A_\varepsilon(\alpha))$ für alle $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, und wir haben für $z \in \Gamma$:*

$$\|(z\mathbb{1} - A_\varepsilon(\alpha))^{-1}\| \leq \frac{m}{1 - \varepsilon_0 m} =: m_1. \tag{5.14}$$

Beweis. Da J nach (5.11) beschränkt ist, ist $A_\varepsilon(\alpha)$ auf $D(A(\alpha)) = D(A_0)$ erklärt. Die Summe aus einem abgeschlossenen und einem beschränkten Operator ist wieder abgeschlossen.

1. Wir untersuchen die Resolvente. Für $z \in \rho(A(\alpha))$ gilt:

$$z\mathbb{1} - A(\alpha) - i\varepsilon J = (z\mathbb{1} - A(\alpha))(\mathbb{1} - i\varepsilon(z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}J). \tag{5.15}$$

Sei $\operatorname{Im} z \neq 0$. Aus der Abschätzung (3.1) für die Resolvente folgt zusammen mit $\|J\| = 1$ (vgl. (5.11)):

$$\|i\varepsilon(z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}J\| \leq |\varepsilon|\|(z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}\|\|J\| \leq |\varepsilon|\frac{1}{|\operatorname{Im} z|}.$$

Für $|\operatorname{Im} z| > |\varepsilon|$ liefert die Neumannsche Reihe die Existenz von $(z\mathbb{1} - A(\alpha) - i\varepsilon J)^{-1}$ und die Abschätzung für die Resolvente. Daraus folgt die Behauptung über die Lage des Spektrums.

2. Da nach Voraussetzung $\Gamma \subset \rho(A(\alpha))$ ist für $\alpha \in [0,1]$, ist (5.15) auch für $z \in \Gamma$ richtig. Die Funktion $(z,\alpha) \mapsto \|(z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}\|$ ist nach Satz 2.11 stetig und nimmt daher auf der

[1] Es ist denkbar, die Beschränkung auf hinreichend kleine ε dadurch zu umgehen, daß man den Integrationsweg Γ geeignet modifiziert. Da wir aber ohnehin den Limes $\varepsilon \to 0$ ausführen müssen, erscheint es gerechtfertigt, auf diese Verallgemeinerung zu verzichten, die darüber hinaus einen technischen Mehraufwand mit sich brächte.

kompakten Menge $\Gamma \times [0,1]$ ihr Maximum $0 \le m < \infty$ an. Dann haben wir für alle $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ und alle $\alpha \in [0,1]$ nach Voraussetzung:

$$\|i\varepsilon(z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}J\| \le m|\varepsilon|\|J\| \le m\varepsilon_0 < 1.$$

Die Neumannsche Reihe liefert nun $z \in \rho(A_\varepsilon(\alpha))$ und damit $\Gamma \subset \rho(A_\varepsilon(\alpha))$ sowie:

$$\|(z\mathbb{1} - A_\varepsilon(\alpha))^{-1}\| \le \frac{m}{1-\varepsilon_0 m}.$$

Damit ist alles gezeigt. □

$A_\varepsilon(\alpha)$ besitzt Riesz-Projektoren und generiert eine Gruppe beschränkter Operatoren.

Lemma 5.5. *Sei $A_\varepsilon(\alpha)$ wie in (5.10) definiert. Sei weiter ε_0 wie in Lemma 5.4 gewählt. Dann gilt für alle $\alpha \in [0,1]$ und alle $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$:*

1. *Die Riesz-Projektoren*

$$P_\varepsilon(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z\mathbb{1} - A_\varepsilon(\alpha))^{-1}\,dz$$

existieren und lassen sich mit m_1 gemäß (5.14) abschätzen:

$$\|P_\varepsilon(\alpha)\| \le \frac{1}{2\pi}|\Gamma|m_1 =: C_P. \tag{5.16}$$

2. *Die $P_\varepsilon(\alpha)$ sind stetig in ε gleichmäßig für alle $\alpha \in [0,1]$. Insbesondere haben wir $\dim \operatorname{ran} P_\varepsilon(\alpha) = N$, und die Spektralmenge von $A_\varepsilon(\alpha)$ bzgl. Γ enthält genau N Eigenwerte und sonst keine weiteren Spektralwerte.*

Beweis. 1. Nach Lemma 5.4 ist $\Gamma \subset \rho(A_\varepsilon(\alpha))$. Daraus folgt die Existenz der Riesz-Projektoren. (5.16) ist eine unmittelbare Folge der Abschätzung (5.14) für die Resolvente aus Lemma 5.4 und der Standardabschätzung für Kurvenintegrale.

2. Seien $|\varepsilon_1|,\ |\varepsilon_2| \le \varepsilon_0$. Mithilfe der Abschätzung (5.14) für die Resolvente erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|(z\mathbb{1} - A_{\varepsilon_2}(\alpha))^{-1} - (z\mathbb{1} - A_{\varepsilon_1}(\alpha))^{-1}\| &= \|i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(z\mathbb{1} - A_{\varepsilon_2}(\alpha))^{-1}J(z\mathbb{1} - A_{\varepsilon_1}(\alpha))^{-1}\| \\ &\le |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|\|(z\mathbb{1} - A_{\varepsilon_2}(\alpha))^{-1}\|\|J\|\|(z\mathbb{1} - A_{\varepsilon_1}(\alpha))^{-1}\| \\ &\le |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|m_1^2.\end{aligned}$$

Da dies für alle $z \in \Gamma$ und alle $\alpha \in [0,1]$ richtig ist, ergibt sich die Stetigkeit der Riesz-Projektoren in ε gleichmäßig für α. Die Aussage über die Dimension des Bildes ist eine Folge von Lemma 2.10 und der Tatsache $\dim \operatorname{ran} P(\alpha) = N$. Daraus folgt auch mittels Korollar 2.14 die Behauptung über die Spektralmenge. □

Lemma 5.6. *Sei $A_\varepsilon(\alpha)$ wie in (5.10) definiert. Dann gilt für alle $\alpha \in [0,1]$:*

1. *$A_\varepsilon(\alpha)$ generiert für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ eine Gruppe $U_\varepsilon(t,\alpha)$ mit der Eigenschaft:*

$$\|U_\varepsilon(t,\alpha)\| \le e^{|\varepsilon t|},\ t \in \mathbb{R}. \tag{5.17}$$

2. *Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $C = C(\varepsilon) \geq 0$ und ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß gilt:*

$$\|U_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\| \leq Ce^{\delta t}, \; t \leq 0. \tag{5.18}$$

Beweis. 1. Nach Lemma 5.4 erfüllt $-iA_\varepsilon(\alpha)$ die Voraussetzungen von Satz 2.22 mit $M = 1$ und $\omega = |\varepsilon|$ und ist deshalb Generator einer Gruppe mit der genannten Eigenschaft.

2. Wir betrachten die von $-iA_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon(\alpha)$ generierte Gruppe $\tilde{U}_\varepsilon(t,\alpha)$. Da $P_\varepsilon(\alpha)$ der Riesz-Projektor zu $A_\varepsilon(\alpha)$ ist, gilt $P_\varepsilon(\alpha)\varphi \in D(A_\varepsilon(\alpha))$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ und $A_\varepsilon(\alpha)P_\epsilon(\alpha)\varphi = P_\epsilon(\alpha)A_\varepsilon(\alpha)\varphi$ für alle $\varphi \in D(A_\varepsilon(\alpha))$. Nach Satz 2.36 kommutiert $P_\varepsilon(\alpha)$ mit $U_\varepsilon(t,\alpha)$. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 2.38 erfüllt, und wir schließen: $\tilde{U}_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha) = U_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)$.

Um die Abschätzung (5.18) zu beweisen, reicht es also, den endlichdimensionalen Operator $\tilde{U}_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha) : \operatorname{ran} P_\varepsilon(\alpha) \to \operatorname{ran} P_\varepsilon(\alpha)$ zu betrachten. Dieser läßt sich über das N-dimensionale Differentialgleichungssystem

$$i\frac{d}{dt}\tilde{U}_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha) = A_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\tilde{U}_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)$$

bestimmen. Wir werden zeigen, daß $A_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon(\alpha)$ nur Eigenwerte mit einem positiven Imaginärteil hat. Dann liefert Korollar 2.29 die gesuchte Abschätzung.

Das Spektrum $\tilde{\sigma}$ von $A_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon(\alpha) : \operatorname{ran} P_\varepsilon(\alpha) \to \operatorname{ran} P_\varepsilon(\alpha)$ stimmt nach Satz 2.13 mit der Spektralmenge von $A_\varepsilon(\alpha)$ bzgl. Γ überein. Also enthält $\tilde{\sigma}$ nur endlich viele Eigenwerte (Lemma 5.5). Wegen der Voraussetzung 4 aus Satz 5.1 erfüllt $A(\alpha)$ das Dichotomie-Kriterium 3.5, so daß $A_\varepsilon(\alpha)$ keine reellen Spektralwerte hat. Wir zeigen mittels eines Stetigkeitsargumentes, daß alle Eigenwerte von $A_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon(\alpha)$ einen positiven Imaginärteil haben. Dazu beachten wir, daß $P_\varepsilon(0) = P(0)$ ist für hinreichend kleine ε (Korollar 2.17). Dann hat $(A_0 + i\varepsilon J)P_\varepsilon(0) = (A_0 + i\varepsilon J)P(0) = (A_0 + i\varepsilon P(0))P(0) : \operatorname{ran} P(0) \to \operatorname{ran} P(0)$ nur Eigenwerte mit positivem Imaginärteil. Da endlich viele Eigenwerte stetig von α abhängen ([10], IV.3.5), müssen auch alle Eigenwerte von $A_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon(\alpha)$ einen positiven Imaginärteil haben. □

Wir addieren einen weiteren Imaginärteil, um sicherzustellen, daß in einem Streifen um die reelle Achse keine Spektralwerte liegen:

$$A_{\eta,\varepsilon}(\alpha) = A_\varepsilon(\alpha) + \frac{i\eta}{2}J_\varepsilon(\alpha), \; J_\varepsilon(\alpha) := 2P_\varepsilon(\alpha) - \mathbb{1}, \; \eta \in \mathbb{R}. \tag{5.19}$$

Den Faktor $1/2$ haben wir hinzugefügt, um in der Integralformel (5.2) den Faktor $e^{\eta t}$ und nicht $e^{2\eta t}$ zu erhalten (vgl. den Zusammenhang mit dem Adiabatischen Theorem in der Einleitung). Aus (5.16) in Lemma 5.5 folgt:

$$\|J_\varepsilon(\alpha)\| \leq 2\|P_\varepsilon(\alpha)\| + 1 \leq 2C_P + 1 =: C_J. \tag{5.20}$$

Auch $A_{\eta,\varepsilon}(\alpha)$ besitzt Riesz-Projektoren und generiert eine Gruppe. Die Riesz-Projektoren werden wir aber nicht benötigen, und die Gruppe läßt sich durch $U_\varepsilon(t,\alpha)$ ausdrücken.

Lemma 5.7. *Die Operatoren $A_{\eta,\varepsilon}(\alpha)$ seien wie in (5.19) erklärt. Dann gilt für alle $\alpha \in [0,1]$:*

1. *$A_{\eta,\varepsilon}(\alpha) : D(A_0) \to \mathcal{H}$ ist abgeschlossen. Sei $\eta_0 > 0$ so gewählt, daß $\frac{\eta_0}{2}m_1C_J < 1$ ist. Dann ist $\Gamma \subset \rho(A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))$ für alle $|\eta| \leq \eta_0$, und die Resolvente läßt sich abschätzen:*

$$\|(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}\| \leq \frac{m_1}{1 - \frac{\eta_0}{2}m_1C_J} =: m_2. \tag{5.21}$$

2. *$-iA_{\eta,\varepsilon}(\alpha)$ generiert eine Gruppe beschränkter Operatoren $U_{\eta,\varepsilon}(t,\alpha)$ mit:*

$$U_{\eta,\varepsilon}(t,\alpha) = \tilde{U}_{\eta,\varepsilon}(t,\alpha)U_\varepsilon(t,\alpha) = U_\varepsilon(t,\alpha)\tilde{U}_{\eta,\varepsilon}(t,\alpha). \tag{5.22}$$

Dabei ist $\tilde{U}_{\eta,\varepsilon}(t,\alpha)$ die von $\frac{\eta}{2}J_\varepsilon(\alpha)$ generierte Gruppe. Insbesondere gilt:

$$U_{\eta,\varepsilon}(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha) = e^{\frac{\eta t}{2}}U_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha), \tag{5.23}$$

$$U_{\eta,\varepsilon}(t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha)) = e^{-\frac{\eta t}{2}}U_\varepsilon(t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha)). \tag{5.24}$$

Beweis. 1. Da $J_\varepsilon(\alpha)$ beschränkt ist, hat $A_{\eta,\varepsilon}(\alpha)$ den Definitionsbereich $D(A_0)$ und ist als Summe des abgeschlossenen Operators $A_\varepsilon(\alpha)$ und des beschränkten Operators $J_\varepsilon(\alpha)$ wieder abgeschlossen.

Sei $z \in \Gamma$. Nach Lemma 5.4 ist $\Gamma \subset \rho(A_\varepsilon(\alpha))$. Also gilt:

$$z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha) = z\mathbb{1} - A_\varepsilon(\alpha) - \frac{i\eta}{2}J_\varepsilon(\alpha) = (z\mathbb{1} - A_\varepsilon(\alpha))(\mathbb{1} - \frac{i\eta}{2}(z\mathbb{1} - A_\varepsilon(\alpha))^{-1}J_\varepsilon(\alpha)).$$

Wir verwenden die Abschätzungen (5.14) und (5.20) und finden:

$$\|(z\mathbb{1} - A_\varepsilon(\alpha))^{-1}J_\varepsilon(\alpha)\| \leq \|(z\mathbb{1} - A_\varepsilon(\alpha))^{-1}\|\|J_\varepsilon(\alpha)\| \leq m_1 C_J$$

Die Voraussetzung an η_0 ist so gewählt, daß die Neumannsche Reihe die Existenz der Resolvente und die Abschätzung (5.21) liefert.

2. $-iA_{\eta,\varepsilon}(\alpha)$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.31; denn $-iA_\varepsilon(\alpha)$ ist Generator einer Gruppe, und $J_\varepsilon(\alpha)$ ist beschränkt (vgl. (5.20)). Also generiert $-iA_{\eta,\varepsilon}(\alpha)$ die Gruppe $U_{\eta,\varepsilon}(t,\alpha)$. Nach Satz 2.13 kommutieren $A_\varepsilon(\alpha)$ und $J_\varepsilon(\alpha)$; deshalb liefert Satz 2.37 die Formel (5.22).

Es ist $J_\varepsilon(\alpha)^2 = \mathbb{1}$. Damit folgen die Formeln (5.23) und (5.24) sofort aus Lemma 2.39. □

Um die vorangehenden Resultate nutzen zu können, beweisen wir einige Konvergenzaussagen.

Lemma 5.8. *Die folgenden Konvergenzaussagen gelten bzgl. der Operatornorm und gleichmäßig für $\alpha \in [0,1]$:*

1. $\lim_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon(\alpha) = P(\alpha)$.

2. *Es gibt ein $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$, so daß die Pseudoinverse $P_\varepsilon^+(\alpha)$ von $P_\varepsilon(\alpha)$ bzgl. $P(0)$ für alle $|\varepsilon| \leq \tilde{\varepsilon}_0$ und alle $\alpha \in [0,1]$ existiert und $P_\varepsilon^+(\alpha) \to P^+(\alpha)$ strebt für $\varepsilon \to 0$.*

3. *Sei $\Phi_{\eta,\varepsilon}(\alpha)$ für $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ und $|\eta| \leq \eta_0$ als Friedrichs-Integral definiert:*

$$\Phi_{\eta,\varepsilon}(\alpha) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}B(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}\,dz.$$

Dann strebt $\Phi_{\eta,\varepsilon}(\alpha) \to P'(\alpha)$ für $\eta, \varepsilon \to 0$. Die Reihenfolge der Limites ist unerheblich.

Beweis. 1. Die gleichmäßige Konvergenz der Riesz-Projektoren ist eine triviale Folgerung aus der Stetigkeitsaussage in Lemma 5.5.

2. Nach Voraussetzung existiert $P^+(\alpha)$ für alle $\alpha \in [0,1]$. Es gilt:

$$\begin{aligned} P(0)P_\varepsilon(\alpha)P(0) &= P(0)P(\alpha)P(0) + P(0)P_\varepsilon(\alpha)P(0) - P(0)P(\alpha)P(0) \\ &= P(0)P(\alpha)P(0)[\mathbb{1} + P^+(\alpha)(P(0)P_\varepsilon(\alpha)P(0) - P(0)P(\alpha)P(0))]. \end{aligned} \tag{5.25}$$

$P^+(\alpha)$ hängt stetig von α ab, da $P(\alpha)$ dies tut (Sätze 2.16 und 2.5). Also nimmt die stetige Funktion $\alpha \mapsto \|P^+(\alpha)\|$ auf der kompakten Menge $[0,1]$ ihr Maximum an:

$$\tilde{m} := \max_{\alpha\in[0,1]} \|P^+(\alpha)\| < \infty.$$

Damit können wir in (5.25) abschätzen:

$$\|P^+(\alpha)(P(0)P_\varepsilon(\alpha)P(0) - P(0)P(\alpha)P(0))\| \leq \tilde{m}\|P_\varepsilon(\alpha) - P(\alpha)\|.$$

Sei $0 < \tilde{M} < 1$ fest gewählt. Nach Teil 1 gibt es ein $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$, so daß für alle ε mit $|\varepsilon| \leq \tilde{\varepsilon}_0$ und alle $\alpha \in [0,1]$ gilt:

$$\tilde{m}\|P_\varepsilon(\alpha) - P(\alpha)\| \leq \tilde{M} < 1;$$

deshalb folgt aus der Neumannschen Reihe, daß $P_\varepsilon^+(\alpha)$ existiert mit:

$$\|P_\varepsilon^+(\alpha)\| \leq \frac{\tilde{m}}{1-\tilde{M}} =: \tilde{C}. \tag{5.26}$$

Bleibt die Konvergenzaussage:

$$\|P_\varepsilon^+(\alpha) - P^+(\alpha)\| \leq \|P_\varepsilon^+(\alpha)\|\|P(\alpha) - P_\varepsilon(\alpha)\|\|P(\alpha)\| \leq \frac{\tilde{m}^2}{1-\tilde{M}}\|P_\varepsilon(\alpha) - P(\alpha)\|.$$

Zusammen mit 1. folgt hieraus die Behauptung.

3. Das Friedrichs-Integral ist nach Lemma 5.7 wohldefiniert. Es gilt:

$$\begin{aligned} &(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}B(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1} - (z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}B(z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1} \\ &= (z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}B(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}(i\varepsilon J + \frac{i\eta}{2}J_\varepsilon(\alpha))(z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1} \\ &\quad + (z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}(i\varepsilon J + \frac{i\eta}{2}J_\varepsilon(\alpha))(z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}B(z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1} \end{aligned}$$

Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned} &\|(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}B(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1} - (z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}B(z\mathbb{1} - A(\alpha))^{-1}\| \\ &\qquad \leq m_2\|B\|m_2(|\varepsilon| + \frac{|\eta|}{2}C_J)m + m_2 m(|\varepsilon| + \frac{|\eta|}{2}C_J)\|B\|m. \end{aligned}$$

Da dies unabhängig von $z \subset \Gamma$ und $\alpha \in [0,1]$ gilt, folgt die gleichmäßige Konvergenz der Friedrichs-Integrale. Ebenso sieht man daran, daß es auf die Reihenfolge der Grenzprozesse nicht ankommt. □

Wir formulieren das Ergebnis des zweiten Schrittes.

Satz 5.9. *Seien $P_\varepsilon(\alpha)$ die Pseudoinverse von $P_\varepsilon(\alpha)$ bzgl. $P(0)$ und $\Phi_{\eta,\varepsilon}(\alpha)$ das Friedrichs-Integral aus Lemma 5.8. Dann gilt:*

$$\det P(0)P(1)P(0) = \lim_{\eta\to 0} \exp\left[2\,\mathrm{Re}\int_0^1 \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{tr}\, P_\varepsilon^+(\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))\Phi_{\eta,\varepsilon}(\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\, d\alpha\right].$$

Beweis. Nach Lemma 5.8 konvergieren alle Größen in der Operatornorm für $\eta \to 0$ und $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig für $\alpha \in [0,1]$ gegen die entsprechenden Ausdrücke in Formel (5.8) aus Satz 5.3. Wegen $P_\varepsilon^+(\alpha) = P(0)P_\varepsilon^+(\alpha)$ und $\dim \operatorname{ran} P(0) = N$ gilt dies nach Lemma 2.3 auch für die Spur; deshalb können wir den η-Limes vor die Integration über α ziehen. □

Wir haben den ε-Limes nicht vor die Integration gezogen, da dies mit Blick auf die weiteren Rechnungen unzweckmäßig wäre.

5.2.3 Schritt 3: Anwendung der Laplace-Transformation

Wir ersetzen den bisherigen Integrationsweg Γ im Friedrichs-Integral durch $\tilde{\Gamma}$ mit der Eigenschaft $\operatorname{Im} z \geq 0$ für $z \in \Gamma$. Das ist notwendig für die Anwendung der Laplace-Transformation.

Lemma 5.10. *Sei $\frac{\eta}{2} > |\varepsilon|$. Dann gibt es einen Integrationsweg $\tilde{\Gamma} \subset \rho(A_{\eta,\varepsilon})$, so daß die Spektralmengen von $A_{\eta,\varepsilon}(\alpha)$ bzgl. $\tilde{\Gamma}$ und Γ übereinstimmen und $\operatorname{Im} z \geq 0$ ist für $z \in \tilde{\Gamma}$. Es gilt:*

$$\int_\Gamma (z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1} B (z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}\, dz = \int_{\tilde{\Gamma}} (z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1} B (z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}\, dz.$$

Beweis. Das Spektrum $\tilde{\sigma}$ von $A_{\eta,\varepsilon}(\alpha)P_\varepsilon(\alpha) : \operatorname{ran} P_\varepsilon(\alpha) \to \operatorname{ran} P_\varepsilon(\alpha)$ enthält keine reellen Eigenwerte hat; denn es gilt:

$$A_{\eta,\varepsilon}(\alpha)P_\varepsilon(\alpha) = A_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon(\alpha) + \frac{i\eta}{2} P_\varepsilon(\alpha).$$

Da $P_\varepsilon(\alpha)$ der Riesz-Projektor von $A_\varepsilon(\alpha)$ ist, stimmt nach Satz 2.13 das Spektrum von $A_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon(\alpha) : \operatorname{ran} P_\varepsilon(\alpha) \to \operatorname{ran} P_\varepsilon(\alpha)$ mit der Spektralmenge von $A_\varepsilon(\alpha)$ bzgl. Γ überein. Diese besteht nur aus endlich vielen Eigenwerten. Da $P_\varepsilon(\alpha)$ auf $\operatorname{ran} P_\varepsilon(\alpha)$ die Identität ist, folgt schließlich nach Voraussetzung:

$$\operatorname{Im} \mu \geq \frac{\eta}{2} - |\varepsilon| > 0, \;\; \mu \in \sigma_1(A_{\eta,\varepsilon}(\alpha)).$$

Wir können also $\tilde{\Gamma} \subset \rho(A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))$ so wählen, daß $\operatorname{Im} z \geq 0$ ist für $z \in \tilde{\Gamma}$ und sich die Spektralmenge beim Übergang von Γ zu $\tilde{\Gamma}$ nicht ändert. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt dann die Gleichheit der Friedrichs-Integrale. □

Die Parameter ε und η des vorangehenden Schrittes erlauben es, die Sätze 2.27 und 2.30 über den Zusammenhang zwischen der Resolvente und der zugehörigen Gruppe anzuwenden.

Lemma 5.11. *Seien ε_0 wie in Lemma 5.4 und η_0 wie in Lemma 5.7. Seien weiter $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ und $|\eta| \leq \eta_0$ sowie $\eta/2 > |\varepsilon|$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ die Formel:*

$$(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))\Phi_{\eta,\varepsilon}(\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\varphi = -i \int_{-\infty}^0 e^{\eta t} U_\varepsilon(-t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha)) B U_\varepsilon(t,\alpha) P_\varepsilon(\alpha)\varphi\, dt. \tag{5.27}$$

Beweis. Aus Lemma 5.7 erhalten wir für $t \in \mathbb{R}$ die Abschätzung:

$$\|U_{\eta,\varepsilon}(-t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))\| \leq e^{\frac{\eta t}{2}} \|U_\varepsilon(-t,\alpha)\| \|\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha)\| \leq e^{\frac{\eta t}{2}} e^{|\varepsilon t|} \|\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha)\|. \tag{5.28}$$

Für $\eta/2 > |\varepsilon|$ und $\operatorname{Im} z \geq 0$ liefert Satz 2.30 die Formel:

$$(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))\varphi = -i\int_{-\infty}^{0} e^{-izt}U_{\eta,\varepsilon}(-t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))\varphi\,dt.$$

Dies setzen wir in das Friedrichs-Integral aus Lemma 5.10 mit dem Integrationsweg $\tilde{\Gamma}$ ein, wobei wir beachten, daß $\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha)$ mit $(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}$ kommutiert:

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))\Phi_{\eta,\varepsilon}(\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}}(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}B(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}P_\varepsilon(\alpha)\varphi\,dz \\
&= -\frac{i}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}}\int_{-\infty}^{0} e^{-izt}U_{\eta,\varepsilon}(-t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))B(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}P_\varepsilon(\alpha)\varphi\,dt\,dz \\
&= -\frac{i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0} U_{\eta,\varepsilon}(-t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))B\int_{\tilde{\Gamma}} e^{-izt}(z\mathbb{1} - A_{\eta,\varepsilon}(\alpha))^{-1}P_\varepsilon(\alpha)\varphi\,dz\,dt.
\end{aligned}$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge im letzten Schritt ist wegen der Abschätzung (5.28) erlaubt. Der Operator $A_{\eta,\varepsilon}(\alpha)P_\varepsilon(\alpha)$ ist nach Satz 2.13 beschränkt, und die Resolvente des auf $\operatorname{ran} P_\varepsilon(\alpha)$ eingeschränkten Operators ist gleich der Resolvente der Einschränkung. Also ist durch das Dunford-Taylor Integral in der letzten Gleichung die von $-iA_{\eta,\varepsilon}(\alpha)P_\varepsilon(\alpha)$ generierte Gruppe gegeben (vgl. Satz 2.27). Damit folgt mithilfe von Lemma 2.38:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))\Phi_{\eta,\varepsilon}(\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\varphi &= -i\int_{-\infty}^{0} U_{\eta,\varepsilon}(-t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))BU_{\eta,\varepsilon}(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\varphi\,dt \\
&= -i\int_{-\infty}^{0} e^{\eta t}U_\varepsilon(-t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\varphi\,dt.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir Lemma 5.7 verwendet. □

Durch das vorangehende Lemma 5.11 haben wir im Friedrichs-Integral einen konvergenzerzeugenden Faktor erhalten, der es erlaubt, den Integranden aufzuspalten:

$$\begin{aligned}
&U_\varepsilon(-t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha) \\
&= U_\varepsilon(-t,\alpha)BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha) - U_\varepsilon(-t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)
\end{aligned}$$

Der zweite Summand entspricht dem Term $P(\alpha)P'(\alpha)P(\alpha) = 0$ in Lemma 2.9, den wir künstlich hinzugefügt hatten; deshalb verwundert es nicht, daß er nichts zum Realteil beiträgt.

Lemma 5.12. *Die folgenden Konvergenzaussagen gelten gleichmäßig für alle $\alpha \in [0,1]$:*

1. *Sei $t \in \mathbb{R}$ fest aber beliebig. Dann ist:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Im}\operatorname{tr} P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha) = 0.$$

2. *Für $\eta > 0$ ist:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{0} e^{\eta t}\operatorname{Im}\operatorname{tr} P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\,dt = 0.$$

Beweis. 1. Da $P_\varepsilon^+(\alpha) = P(0)P_\varepsilon^+(\alpha)$ ist (vgl. Satz 2.8) und $P(0)$ ein endlichdimensionales Bild hat, reicht es nach Satz 2.3, die Konvergenz der Operatoren in der Operatornorm nachzuweisen.

Nach Lemma 5.8 konvergieren $P_\varepsilon(\alpha) \to P(\alpha)$ und $P_\varepsilon^+(\alpha) \to P^+(\alpha)$ für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig in $\alpha \in [0,1]$. Die $U_\varepsilon(t,\alpha)$ konvergieren für festes $t \in \mathbb{R}$ und gleichmäßig für $\alpha \in [0,1]$ gegen $U(t,\alpha)$, was aus Satz 2.34 folgt:

$$\|U_\varepsilon(t,\alpha) - U(t,\alpha)\| \le e^{|\varepsilon|\|J\||t|} - 1 = e^{|\varepsilon||t|} - 1,$$

da $U(t,\alpha)$ unitär ist. Also ist gleichmäßig in $\alpha \in [0,1]$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Im}\operatorname{tr} P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha) = \operatorname{Im}\operatorname{tr} P^+(\alpha)U(-t,\alpha)P(\alpha)BU(t,\alpha)P(\alpha).$$

Wir beachten, daß B, $P(\alpha)$ und $P^+(\alpha)$ selbstadjungiert sind und $P(\alpha)$ und $Ut,\alpha)$ miteinander kommutieren (Satz 2.36), und rechnen:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tr} P^+(\alpha)U^*(t,\alpha)P(\alpha)BU(t,\alpha)P(\alpha))^* &= (\operatorname{tr} P^+(\alpha)U^*(t,\alpha)P(\alpha)BP(\alpha)U(t,\alpha))^* \\
&= \operatorname{tr}(P^+(\alpha)U^*(t,\alpha)P(\alpha)BP(\alpha)U(t,\alpha))^* \\
&= \operatorname{tr} U^*(t,\alpha)P(\alpha)BP(\alpha)U(t,\alpha)P^+(\alpha) \\
&= \operatorname{tr} P^+(\alpha)U^*(t,\alpha)P(\alpha)BP(\alpha)U(t,\alpha).
\end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{tr} P^+(\alpha)U^*(t,\alpha)P(\alpha)BP(\alpha)U(t,\alpha) \in \mathbb{R}$. Daraus erhält man 1.

2. Die Funktion

$$s_\varepsilon(t) := \sup_{\alpha\in[0,1]} |\operatorname{Im}\operatorname{tr} P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)BP_\varepsilon(\alpha)U_\varepsilon(t,\alpha)|$$

konvergiert nach 1. punktweise in $t \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{\varepsilon\to 0} s_\varepsilon(t) = 0$. Weiter ist für hinreichend kleine ε und alle $\alpha \in [0,1]$:

$$|s_\varepsilon(t)| \le N\tilde{C}e^{2|\varepsilon t|}C_P^2\|B\|$$

(vgl. Satz 2.3, (5.26), (5.17), (5.16)). Für $2|\varepsilon| < \eta$ liefert der Lebesguesche Konvergenzsatz:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^0 e^{\eta t}s_\varepsilon(t)\,dt = 0,$$

woraus wegen

$$|\int_{-\infty}^0 e^{\eta t}\operatorname{Im}\operatorname{tr} P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)BP_\varepsilon(\alpha)U_\varepsilon(t,\alpha)\,dt| \le \int_{-\infty}^0 e^{\eta t}s_\varepsilon(t)\,dt$$

die Aussage 2. folgt. □

Wir können nun Satz 5.9 weiterrechnen und erhalten so das Hauptresultat von Schritt 3.

Satz 5.13. *Sei $A_\varepsilon(\alpha)$ wie in (5.10) definiert. Seien weiter $P_\varepsilon(\alpha)$ der Riesz-Projektor zu $A_\varepsilon(\alpha)$, $P_\varepsilon^+(\alpha)$ die Pseudoinverse von $P_\varepsilon(\alpha)$ bzgl. $P(0)$ und $U_\varepsilon(t,\alpha)$ die von $-iA_\varepsilon(\alpha)$ generierte Gruppe. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
&\det P(0)P(1)P(0) \\
&\quad = \lim_{\eta\to+0}\lim_{\varepsilon\to 0}\exp\left[-2\operatorname{Re} i\int_0^1\int_{-\infty}^0 e^{\eta t}\operatorname{tr} BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t,\alpha)\,dt\,d\alpha\right]. \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

Beweis. Nach Lemma 5.11 ist für $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$P_\varepsilon^+(\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))\Phi_{\eta,\varepsilon}(\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\varphi = -i\int_{-\infty}^0 e^{\eta t} P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\varphi\, dt.$$

Wegen $P_\varepsilon^+(\alpha) = P(0)P_\varepsilon(\alpha)$ und $\dim \operatorname{ran} P(0) = N$ dürfen wir diese Beziehung auf die Spur übertragen:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\alpha) &:= \operatorname{Re}\operatorname{tr} P_\varepsilon^+(\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))\Phi_{\eta,\varepsilon}(\alpha)P_\varepsilon(\alpha) \\ &= -\operatorname{Re} i\int_{-\infty}^0 e^{\eta t} \operatorname{tr} P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\, dt. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Aufgrund der Abschätzung (5.17) für $U_\varepsilon(t,\alpha)$ läßt sich für $\eta > 2|\varepsilon|$ der Integrand in (5.30) aufspalten:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\alpha) = &-\operatorname{Re} i\int_{-\infty}^0 e^{\eta t} \operatorname{tr} P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t,\alpha)BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\, dt \\ &- \operatorname{Im}\int_{-\infty}^0 e^{\eta t} \operatorname{tr} P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)\, dt \\ =&: I_{1,\varepsilon}(\alpha) + I_{2,\varepsilon}(\alpha). \end{aligned}$$

Dabei haben wir beachtet, daß $U_\varepsilon(t,\alpha)$ und $P_\varepsilon(\alpha)$ miteinander kommutieren. Nach Lemma 5.8 und Satz 2.3 existiert $\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(\alpha)$ gleichmäßig für $\alpha \in [0,1]$. Nach Lemma 5.12 ist $\lim_{\varepsilon\to 0} I_{2,\varepsilon}(\alpha) = 0$ gleichmäßig für $\alpha \in [0,1]$. Daraus folgt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} I_{1,\varepsilon}(\alpha)$$

gleichmäßig für $\alpha \in [0,1]$. Ausgehend von Satz 5.13 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \det P(0)P(1)P(0) &= \lim_{\eta\to+0} \exp\left[2\int_0^1 \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(\alpha)\, d\alpha\right] \\ &= \lim_{\eta\to+0} \exp\left[2\int_0^1 \lim_{\varepsilon\to 0} I_{1,\varepsilon}(\alpha)\, d\alpha\right] \\ &= \lim_{\eta\to+0}\lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left[2\int_0^1 I_{1,\varepsilon}(\alpha)\, d\alpha\right]. \end{aligned}$$

Der Exponent läßt sich weiter umrechnen:

$$I_{1,\varepsilon}(\alpha) = -\operatorname{Re} i\int_{-\infty}^0 e^{\eta t} \operatorname{tr} BU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t,\alpha)\, dt,$$

woraus die Behauptung folgt. □

5.2.4 Schritt 4: Die Wiener-Hopf Gleichung

Der Ausdruck in (5.29) hat dieselbe Gestalt wie in Abschnitt 4. Wir setzen in Definition 2.40 $\gamma = i$ und $K = P_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon^+(\alpha)$.

Definition 5.14. *Seien $A_\varepsilon(\alpha)$ wie in (5.10), $P_\varepsilon(\alpha)$ der Riesz-Projektor zu $A_\varepsilon(\alpha)$ und $P_\varepsilon^+(\alpha)$ die Pseudoinverse von $P_\varepsilon(\alpha)$ bzgl. $P(0)$. Weiter sei $U_\varepsilon(t,\alpha)$ die von $-iA_\varepsilon(\alpha)$ generierte Gruppe. Dann heißt:*

$$G_\varepsilon(t,t';\alpha) := \begin{cases} iU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t',\alpha), & t \le t', \\ iU_\varepsilon(t,\alpha)[P_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon^+(\alpha) - \mathbb{1}]U_\varepsilon(-t',\alpha), & t > t', \end{cases}$$

zeitgeordneter Greenscher Operator.[2]

Wir notieren die Eigenschaften von G_ε.

Lemma 5.15. *Die Abbildung $t \mapsto G(t,t';\alpha)$ ist für alle $t \ne t'$ und alle $t' \in \mathbb{R}$ stark stetig. Der Operator $G_\varepsilon(t,t+0;\alpha)$ ist Spurklasse.*

Beweis. Die starke Stetigkeit folgt sofort aus der Definition von G_ε und der starken Stetigkeit von $U_\varepsilon(t,\alpha)$. Da $P_\varepsilon^+(\alpha) = P(0)P_\varepsilon^+(\alpha)$ ein endlichdimensionales Bild hat und somit ein Spurklasseoperator ist (Satz 2.3), folgt, daß auch $G(t,t+0;\alpha)$ ein Spurklasseoperator ist. □

Wir haben wieder einfache Randbedingungen, und zwar eine normale und eine asymptotische.

Lemma 5.16. *Der zeitgeordnete Greensche Operator $G_\varepsilon(t,t';\alpha)$ gemäß Definition 5.14 erfüllt die Randbedingung:*

$$P(0)G_\varepsilon(0,t';\alpha) = 0, \ -\infty < t' \le 0, \ \alpha \in [0,1], \tag{5.31}$$

sowie für $\varepsilon > 0$ die Abschätzung:

$$\|G_\varepsilon(t,t';\alpha)\| \le C(\varepsilon,t',\alpha)e^{\delta t}, \ t \le t' \le 0, \tag{5.32}$$

mit einem $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ und $C(\varepsilon,t') \ge 0$. Insbesondere existiert das Integral:

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^0 e^{\eta t} \operatorname{tr} BG_\varepsilon(t,t+0;\alpha)\,dt\,d\alpha.$$

Beweis. Wir beachten $P(0)P_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon^+(\alpha) = P(0)$:

$$\begin{aligned} P(0)G_\varepsilon(0,t';\alpha) &= iP(0)U_\varepsilon(0)[P_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon^+(\alpha) - \mathbb{1}]U_\varepsilon(-t',\alpha) \\ &= i[P(0)P_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon^+(\alpha) - P(0)]U_\varepsilon(-t',\alpha) \\ &= i[P(0) - P(0)]U_\varepsilon(-t',\alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für $t \le t'$ ist $G_\varepsilon(t,t';\alpha) = iU_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)P_\varepsilon^+(\alpha)U_\varepsilon(-t',\alpha)$. Zum Nachweis der Abschätzung (5.32) genügt es, $U_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)$ zu untersuchen. Die Behauptung folgt dann aus dem Verhalten von $U_\varepsilon(t,\alpha)$ im Unendlichen gemäß Lemma 5.6. Die Existenz des Integrals ergibt sich hieraus sofort wegen $P_\varepsilon^+(\alpha) = P(0)P_\varepsilon^+(\alpha)$ und $\dim \operatorname{ran} P(0) = N$ (Satz 2.3). □

Für $\alpha = 0$ erhalten wir den freien zeitgeordneten Greenschen Operator wieder.

[2] Auch dieser Greensche Operator trägt die Bezeichnung zeitgeordnet. Das ist gerechtfertigt, da er von einer vergleichbaren Bauart ist wie in Abschnitt 4.

Lemma 5.17. *Es gilt* $G_\varepsilon(t,t';0) = e^{-\varepsilon|t-t'|}G_0(t-t')$. *Dabei ist* G_0 *der freie zeitgeordnete Greensche Operator aus Satz 4.1.*

Beweis. Gemäß Definition 5.14 haben wir:

$$G_\varepsilon(t,t';0) = iU_\varepsilon(t,0)P_\varepsilon(0)P_\varepsilon^+(0)U_\varepsilon(-t',0),\ \ t \le t'.$$

Nach Lemma 2.17 ist $P_\varepsilon(0) = P(0)$. Für die Gruppe $U_\varepsilon(t,0)$ ergibt sich nach Satz 2.37:

$$U_\varepsilon(t,0) = U_0(t)\tilde{U}_\varepsilon(t) = \tilde{U}_\varepsilon(t)U_0(t)$$

mit der von εJ generierten Gruppe $\tilde{U}_\varepsilon(t)$. Somit ist:

$$G_\varepsilon(t,t';0) = i\tilde{U}_\varepsilon(t-t')P(0)U_0(t-t'),\ \ t \le t'.$$

Wegen $J^2 = \mathbb{1}$ liefert Lemma 2.39:

$$\tilde{U}_\varepsilon(t-t')P(0) = e^{\varepsilon(t-t')}P(0).$$

Wir haben somit

$$G_\varepsilon(t,t';0) = e^{\varepsilon(t-t')}G_0(t-t'),\ \ t \le t'.$$

gefunden. Für $t > t'$ erhält man analog:

$$G_\varepsilon(t,t';0) = e^{\varepsilon(t'-t)}G_0(t-t'),$$

so daß insgesamt die Behauptung folgt. □

Wir rechnen die Wiener-Hopf-Gleichung für G_ε nach.

Satz 5.18. *Der zeitgeordnete Greensche Operator* G_ε *erfüllt für hinreichend kleine* $\varepsilon > 0$ *die Wiener-Hopf-Gleichung:*

$$G_\varepsilon(t,t';\alpha)\varphi = e^{-\varepsilon|t-t'|}G_0(t-t')\varphi + \alpha\int_{-\infty}^0 e^{-\varepsilon|t-\tau|}G_0(t-\tau)BG_\varepsilon(\tau,t';\alpha)\varphi\,d\tau,$$
$$-\infty < t,t' \le 0,\ \ \alpha \in [0,1],\ \ \varphi \in \mathcal{H}. \quad (5.33)$$

Dabei ist G_0 *der freie zeitgeordnete Greensche Operator aus Satz 4.1.*

Beweis. Wir verwenden die Integralgleichung (2.33) aus Satz 2.42. Das notwendige Abfallverhalten für $t \to -\infty$ ist nach Lemma 5.16 erfüllt. Wir setzen in (2.33) $\gamma = i$ und $S_1 = -iB$ und erhalten:

$$\begin{aligned}&G_\varepsilon(t,t';\alpha)\varphi - e^{-\varepsilon|t|}G_0(t)G_\varepsilon(0,t';\alpha)\varphi\\ &\qquad = e^{-\varepsilon|t-t'|}G_0(t-t')\varphi + \alpha\int_{-\infty}^0 e^{-\varepsilon|t-\tau|}G_0(t-\tau)BG_\varepsilon(\tau,t';\alpha)\varphi\,d\tau,\ \ 0 < t,t' \le 0\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{H}$. Bis auf einen Summanden ist dies schon die gesuchte Integralgleichung. Dieser verschwindet aber aufgrund der Randbedingung (5.31):

$$G_0(t)G_\varepsilon(0,t';\alpha) = iU_0(t)PG_\varepsilon(0,t';\alpha) = 0,\ \ t' \le 0.$$

Das war zu zeigen. □

Satz 5.1 folgt nun, indem man die Sätze 5.13 und 5.18 miteinander kombiniert.

5.3 Lösungstheorie der Wiener-Hopf Gleichung

Wir untersuchen die Wiener-Hopf Gleichung (5.1). Im weiteren gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen von Satz 5.1.[3] Zur Abkürzung seien $U_{0,\varepsilon}(t) := U_\varepsilon(t,0)$ und $G_{0,\varepsilon}(t) := e^{-\varepsilon|t|}G_0(t)$. Zunächst zeigen wir, daß die homogene Geichung mit einem homogenen Randwertproblem in Beziehung steht.

Satz 5.19. *Sei $\varphi(\cdot)$ eine stetig differenzierbare Lösung der Integralgleichung:*

$$\varphi(t) = \alpha \int_{-\infty}^{0} G_{0,\varepsilon}(t-\tau)B\varphi(\tau)\,d\tau \tag{5.34}$$

mit $\int_{-\infty}^{0} \|\varphi(\tau)\|\,d\tau < \infty$ und $\lim_{t\to-\infty} \|\varphi(t)\| = 0$. Dann löst $\varphi(\cdot)$ auch das Randwertproblem:

$$i\frac{d}{dt}\varphi(t) = A_\varepsilon(\alpha)\varphi(t),\ P(0)\varphi(0) = 0,\ \varphi(-\infty) = 0. \tag{5.35}$$

Beweis. Wir spalten das Integral in (5.34) auf:

$$\begin{aligned} I(t) &:= \int_{-\infty}^{0} G_{0,\varepsilon}(t-\tau)B\varphi(\tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} iU_{0,\varepsilon}(t-\tau)[P(0)-\mathbb{1}]B\varphi(\tau)\,d\tau + \int_{t}^{0} iU_{0,\varepsilon}(t-\tau)P(0)B\varphi(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Wir haben $\varphi(\cdot)$ als stetig differenzierbar vorausgesetzt. Dann sind auch die Funktionen $\tau \mapsto [P(0)-\mathbb{1}]B\varphi(\tau)$ stetig differenzierbar, da $P(0)$ und B beschränkt sind. Aus Satz 2.26 folgt, daß $I(\cdot)$ stetig differenzierbar ist und $\varphi(\cdot)$ die Differentialgleichung (5.35) erfüllt. Da für alle $-\infty < \tau \leq 0$ nach 5.17 $P(0)G_0(-\tau) = iP(0)[P(0)-\mathbb{1}]U_0(-\tau) = 0$ ist, folgt auch die Randbedingung. □

Auf die Forderung, daß $\varphi(\cdot)$ stetig differenzierbar ist, kann im allgemeinen nicht verzichtet werden (vgl. Abschnitt 4.3 und [11], Abschnitt 4.2). Falls aber alle Operatoren beschränkt sind, lassen sich die Voraussetzungen abschwächen.

Korollar 5.20. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 5.1 sei $A_{0,\varepsilon}$ beschränkt. Sei $\varphi(\cdot)$ eine stetige, auf $]-\infty,0]$ integrierbare Lösung der Integralgleichung (5.34). Dann ist $\varphi(\cdot)$ differenzierbar und erfüllt das Randwertproblem (5.35).*

Beweis. Die Gruppe $U_{0,\varepsilon}(t)$ wird vom beschränkten Operator $-iA_{0,\varepsilon}$ generiert und ist deshalb bzgl. der Operatornorm differenzierbar (Satz 2.27). Dann folgt aus dem Beweis von Satz 5.19 die Behauptung. □

Der Satz 5.19 besitzt eine Umkehrung.

Satz 5.21. *Die Funktion $\varphi(\cdot) : t \mapsto \varphi(t) \in \mathcal{H}$ sei stetig differenzierbar, es gelte $\varphi(0) \in D(A_\varepsilon(\alpha))$ und $\int_{-\infty}^{0} \|\varphi(\tau)\|\,d\tau < \infty$. Ist $\varphi(\cdot)$ eine Lösung des Randwertproblems (5.35), dann erfüllt $\varphi(\cdot)$ auch die Integralgleichung (5.34).*

[3] Der Scharparameter α dürfte in diesem Abschnitt auch beliebige komplexe werte annehmen, was aber für unsere Fragestellung nicht notwendig ist.

Beweis. Sei $\varphi(\cdot)$ eine Lösung des Randwertproblems (5.35). Nach Satz 2.25 läßt sich $\varphi(t)$ als

$$\varphi(t) = U_\varepsilon(t,\alpha)\varphi(0)$$

schreiben. Hieraus folgt mit Satz 2.32:

$$\varphi(t) = U_{0,\varepsilon}(t)\varphi(0) + i\alpha \int_t^0 U_{0,\varepsilon}(t-\tau)B\varphi(\tau)\,d\tau \tag{5.36}$$

$$\varphi(t) = -i\alpha \int_{-\infty}^t U_{0,\varepsilon}(t-\tau)B\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{5.37}$$

Wir multiplizieren (5.36) mit $P(0)$ und (5.37) mit $\mathbb{1} - P(0)$ und beachten die Randbedingung (5.35). Dann erhält man:

$$P(0)\varphi(t) = 0 + i\alpha \int_t^0 P(0)U_{0,\varepsilon}(t-\tau)B\varphi(\tau)\,d\tau \tag{5.38}$$

$$(\mathbb{1} - P(0))\varphi(t) = i\alpha \int_{-\infty}^t (P(0) - \mathbb{1})U_{0,\varepsilon}(t-\tau)B\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{5.39}$$

Addition von (5.38) und (5.39) liefert die Behauptung. □

An dieser Stelle endet die Analogie mit Abschnitt 4.3; denn wir können die Lösbarkeitstheorie des Randwertproblems (5.35) nicht mit der Determinante $\det P(0)P_\varepsilon(\alpha)P(0)$ in Verbindung bringen. Das liegt daran, daß unser Randwertproblem streng genommen gar kein solches ist, da der zweite Rand fehlt. Könnte man aus dem Verschwinden der Lösung $\varphi(\cdot)$ im Unendlichen folgern, daß $\varphi(\cdot)$ die Form

$$\varphi(t) = U_\varepsilon(t,\alpha)\varphi(0) = P_\varepsilon(\alpha)U_\varepsilon(t,\alpha)\varphi(0)$$

hat, könnte man genau wie in Abschnitt 4.3 fortfahren. Leider ist das nicht ohne weiteres möglich, wenn $A_\varepsilon(\alpha)$ beispielsweise unbeschränkt ist und das Spektrum kontinuierliche Anteile besitzt. Hat $A_\varepsilon(\alpha)$ allerdings ein rein diskretes Spektrum aus einfachen Eigenwerten, dann lassen sich für den Anteil $U_\varepsilon(t,\alpha)(\mathbb{1} - P_\varepsilon(\alpha))$ mittels Entwicklung nach Eigenfunktionen ähnliche Abschätzungen beweisen wie für den Anteil $U_\varepsilon(t,\alpha)P_\varepsilon(\alpha)$ in Satz 5.10. Die Lösungstheorie stimmt dann mit der in Abschnitt 4.3 formal überein. Wir wollen darauf nicht näher eingehen.

6 Quantitative Aussagen

Seien $H : D(H) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator, $U(t)$ die von $-iH$ generierte Gruppe unitärer Operatoren (vgl. Korollar 2.24) und $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein orthogonaler Projektor mit N-dimensionalem Bild, $1 \leq N < \infty$. Weiter folge aus $\varphi \in D(H)$ auch $P\varphi \in D(H)$. Wir zerlegen H in einen Diagonalteil und einen Nebendiagonalteil bzgl. P:

$$H = H^{\|} + H^{\perp} \tag{6.1}$$

mit den Operatoren:

$$H^{\|} := PHP + (\mathbb{1} - P)H(\mathbb{1} - P),\ H^{\perp} := PH(\mathbb{1} - P) + (\mathbb{1} - P)HP. \tag{6.2}$$

Im weiteren setzen wir $H^{\|}$ als selbstadjungiert auf $D(H)$ und $H^{\perp}$ als beschränkt voraus. Es gilt:

$$PH^{\|} = H^{\|}P \text{ und } PH^{\perp}P = 0. \tag{6.3}$$

Mit $H(\alpha)$ bezeichnen wir die Operatoren:

$$H(\alpha) := H^{\|} + \alpha H^{\perp},\ \alpha \in [0, 1]. \tag{6.4}$$

Die $H(\alpha)$ sind auf $D(H)$ selbstadjungiert. $U(t, \alpha)$ sei die von $-iH(\alpha)$ generierte Gruppe (vgl. Korollar 2.24). Seien weiter $\mathcal{H}_1 := \operatorname{ran} P$ und $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_1^{\perp}$. Dann ist $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, und wir können H als Blockmatrix schreiben:

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix},\ H_{jk} : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_j,\ j, k = 1, 2. \tag{6.5}$$

Wir setzen voraus, daß die Spektren von H_{11} und H_{22} disjunkt sind.

6.1 Abschnittsdeterminanten unitärer Operatoren

Wir wollen $\det PU(T, \alpha)P$ untersuchen. Die einfachste Aussage ergibt sich aus der Hadamardschen Determinanten-Ungleichung.

Satz 6.1. *Sei $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein unitärer Operator. Die Abschnittsdeterminanten lassen sich abschätzen gemäß:*

$$|\det PUP| \leq 1.$$

Beweis. Seien u_j die Spaltenvektoren des endlichdimensionalen Operators $PUP : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$. Nach der Ungleichung von Hadamard ist:

$$|\det PUP| \leq \prod_{j=1}^{N} \|u_j\|.$$

Dabei ist $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{C}^N$. Die Spalten von U bilden ein Orthonormalsystem; deshalb ist $\|u_j\| \leq 1$. $\square$

Wir wollen die Ergebnisse aus Abschnitt 4 anwenden. Wir setzen in Korollar 4.12 $B = H^\perp$ und untersuchen, ob die homogene Integralgleichung

$$\varphi(t) = \alpha \int_0^T G_0(t-\tau)H^\perp \varphi(\tau)\, d\tau,\ \ t \in [0,T],\ \ \alpha \in [0,1], \tag{6.6}$$

nur die triviale Lösung hat. Dabei ist G_0 der freie zeitgeordnete Greensche Operator aus Satz 4.1 gebildet mit $A_0 = H^\parallel$. Das einfachste Lösbarkeitskriterium erhält man, falls $H^\perp$ klein ist.

Satz 6.2. *Die Funktion $\varphi(\cdot) : t \mapsto \varphi(t) \in \mathcal{H}$ sei stetig und löse die homogene Integralgleichung (6.6). Es gelte $T\|H^\perp\| < 1$. Dann folgt $\varphi(\cdot) \equiv 0$.*

Beweis. Sei $\varphi(\cdot)$ eine nichttriviale Lösung von (6.6). Nach Lemma 4.6 ist $\|G_0(t)\| \le 1$, da $H^\parallel$ selbstadjungiert ist. Wegen $\alpha \in [0,1]$ folgt:

$$\|\varphi(t)\| \le \int_0^T \|G_0(t-\tau)\|\|H^\perp\|\|\varphi(\tau)\|\, d\tau \le T\|H^\perp\| \sup_{\tau\in[0,T]} \|\varphi(\tau)\| < \sup_{\tau\in[0,T]} \|\varphi(\tau)\|.$$

Das liefert einen Widerspruch, so daß (6.6) nur die triviale Lösung hat. □

Wir ziehen eine einfache Folgerung.

Korollar 6.3. *In (6.6) gelte $T\|H^\perp\| < 1$. Dann ist $\det PU(T,\alpha)P \neq 0$ für alle $\alpha \in [0,1]$.*

Beweis. Satz 6.2 und Korollar 4.12. □

Das Beispiel in Abschnitt 4.1 suggeriert, daß es neben der Kleinheit von $H^\perp$ mehr auf eine Lücke zwischen den Diagonalelementen H_{11} und H_{22} ankommt. Vorab müssen wir ein Integral über den freien Greenschen Operator ausrechnen.

Lemma 6.4. *Für den freien Greenschen Operator G_0 gilt die Beziehung:*

$$\begin{aligned}&\int_0^T G_0(t-\tau)H^\perp G_0(\tau-t')\varphi\, d\tau \\ &\qquad = iG_0(t-T)XG_0(T-t')\varphi - iG_0(t)XG_0(-t')\varphi + XG_0(t-t')\varphi - G_0(t-t')X\varphi\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{H}$. X ist als Friedrichs-Integral erklärt:

$$X = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z\mathbb{1} - H^\parallel)^{-1}[H^\perp, P](z\mathbb{1} - H^\parallel)^{-1}\, dz.$$

Der Integrationsweg $\Gamma \in \rho(H^\parallel)$ umläuft dabei $\sigma(H_{11})$ aber keine Punkte aus $\sigma(H_{22})$.

Beweis. Wir haben verlangt, daß H_{11} und H_{22} disjunkte Spektren haben. Also ist X wohldefiniert. Nach Satz 2.19 ist $[X, H^\parallel] = [[H^\perp, P], P] = H^\perp$; deshalb gilt:

$$\int_0^T G_0(t-\tau)H^\perp G_0(\tau-t')\varphi\, d\tau = \int_0^T G_0(t-\tau)[X, H^\parallel]G_0(\tau-t')\varphi\, d\tau.$$

Sei $t \le t'$. Wir zerlegen das Integral:

$$\int_0^T = \int_0^t + \int_t^{t'} + \int_{t'}^T.$$

Für $t \neq 0$ ist $G_0(t)$ stark differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung

$$i\frac{d}{dt}G_0(t)\varphi = H^{\|}G_0(t)\varphi,\ \ \varphi \in \mathcal{H}$$

(Satz 2.41). Da $X\varphi \in D(H^{\|})$ ist (Lemma 2.19), ist auch die Funktion $\tau \mapsto G_0(t-\tau)XG_0(\tau-t')$ für $\tau \neq t, t'$ stark differenzierbar mit:

$$i\frac{d}{d\tau}G_0(t-\tau)XG_0(\tau-t')\varphi = G_0(t-\tau)[X, H^{\|}]G_0(\tau-t')\varphi,\ \ \tau \neq t, t'.$$

Damit erhalten wir (alle Gleichungen sind auf $\varphi \in D(H^{\|})$ angewendet zu denken):

$$\begin{aligned}
&\int_0^T G_0(t-\tau)H^{\perp}G_0(\tau-t')\,d\tau \\
&= i\left[G_0(t-\tau)XG_0(\tau-t')\right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&\quad + i\left[G_0(t-\tau)XG_0(\tau-t')\right]_{\tau=t}^{\tau=t'} \\
&\quad + i\left[G_0(t-\tau)XG_0(\tau-t')\right]_{\tau=t'}^{\tau=T} \\
&= i\big(G_0(+0)XG_0(t-t') - G_0(t)XG_0(-t') \\
&\quad + G_0(t-t')XG_0(-0) - G_0(-0)XG_0(t-t') \\
&\quad + G_0(t-T)XG_0(T-t') - G_0(t-t')XG_0(+0)\big) \\
&= i\big(i(P-\mathbb{1})XG_0(t-t') - G_0(t)XG_0(-t') \\
&\quad + iG_0(t-t')XP - iPXG_0(t-t') \\
&\quad + G_0(t-T)XG_0(T-t') - iG_0(t-t')X(P-\mathbb{1})\big) \\
&= i\left(-iXG_0(t-t') + iG_0(t-t')X + G_0(t-T)XG_0(T-t') - G_0(t)XG_0(-t')\right).
\end{aligned}$$

Da $D(H^{\|}) = D(H)$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt, folgt die Behauptung für $t \leq t'$. Für $t > t'$ rechnet man analog. □

Dies wenden wir auf die homogene Gleichung an:

Satz 6.5. *Die Funktion $\varphi(\cdot) : t \mapsto \varphi(t) \in \mathcal{H}$ sei stetig und löse die homogene Integralgleichung (6.6). Es gelte $4T\|X\|\|H^{\perp}\| < 1$. Dann folgt $\varphi(\cdot) \equiv 0$.*

Beweis. Sei $\varphi(\cdot)$ eine nichttriviale Lösung von (6.6). Wir iterieren (6.6) einmal:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \alpha^2 \int_0^T \int_0^T G_0(t-\tau_1)H^{\perp}G_0(\tau_1-\tau)H^{\perp}\varphi(\tau)\,d\tau_1\,d\tau \\
&= \alpha^2 \int_0^T \left(iG_0(t-T)XG_0(T-\tau) - iG_0(t-0)XG_0(t_0-\tau)\right. \\
&\qquad \left. + XG_0(t-\tau) - G_0(t-\tau)X\right) H^{\perp}\varphi(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Abschätzen liefert wegen $\|G_0(t)\| \leq 1$ (Lemma 4.6) und $\alpha \in [0, 1]$:

$$\|\varphi(t)\| \leq 4T\|X\|\|H^{\perp}\| \sup_{\tau\in[0,T]} \|\varphi(\tau)\| < \sup_{\tau\in[0,T]} \|\varphi(\tau)\|.$$

Das liefert einen Widerspruch, so daß (6.6) nur die triviale Lösung besitzt, was zu zeigen war. □

Eine einfache Folgerung ist:

Korollar 6.6. *In (6.6) gelte* $4T\|X\|\|H^{\perp}\| < 1$. *Dann ist* $\det PU(T,\alpha)P \neq 0$ *für alle* $\alpha \in [0,1]$.

Beweis. Satz 6.5 und Korollar 4.12. □

Wir geben konkrete Operatoren an, deren Spektrum die erforderlichen Eigenschaften hat, um das Friedrichs-Integral in Satz 6.5 zu bilden.

Satz 6.7. $H_0 : D(H_0) \to \mathcal{H}$ *sei selbstadjungiert und besitze ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenvektoren* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *mit den zugehörigen Eigenwerten:*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots .$$

Die orthogonalen Projektoren P_N *seien definiert durch:*

$$P_N = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j, \cdot)\varphi_j.$$

$V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *sei symmetrisch und beschränkt mit* $2\|V\| < \lambda_{N+1} - \lambda_N$ *für ein bestimmtes* N. *Schließlich sei* $H := H_0 + V$. *Dann sind die Spektren von* $H_1 := P_N H P_N : \operatorname{ran} P_N \to \operatorname{ran} P_N$ *und* $H_2 := (\mathbb{1} - P_N)H(\mathbb{1} - P_N) : \operatorname{ran}(\mathbb{1} - P_N) \to \operatorname{ran}(\mathbb{1} - P_N)$ *disjunkt.*

Beweis. Da die P_N die Spektralprojektoren (und damit die Riesz-Projektoren) von H sind, reicht es nach Satz 2.13, H_1 und H_2 auf den Räumen $\mathcal{H}_1 := \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ bzw. $\mathcal{H}_2 := \overline{\operatorname{span}}\{\varphi_{N+1}, \ldots\}$ zu untersuchen. Wir betrachten die quadratische Form:

$$(\varphi, H_1\varphi) = (\varphi, PH_0P\varphi) + (\varphi, PVP\varphi) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j |(\varphi_j, \varphi)|^2 + (\varphi, PVP\varphi) \leq \lambda_N \|\varphi\|^2 + \|V\|\|\varphi\|^2$$

für $\varphi \in \mathcal{H}_1$. Da H_1 selbstadjungiert ist, folgt daraus:

$$\sup_{\mu\in\sigma(H_1)} \mu \leq \lambda_N + \|V\|.$$

Entsprechende Rechnungen zeigen für H_2:

$$\inf_{\mu\in\sigma(H_2)} \mu \geq \lambda_{N+1} - \|V\|.$$

Das ergibt zusammen mit der Voraussetzung an $\|V\|$ die Behauptung. □

6.2 Störungsentwicklung der Riesz-Projektoren

Wir untersuchen die Riesz-Projektoren von $H(\alpha)$ mittels Störungstheorie. Dabei beschränken wir unsere Darstellung auf den rein formalen Charakter der Rechnungen und lassen Konvergenzfragen und ähnliches außer acht.[1] Wir definieren die Riesz-Projektoren wie üblich:

$$P(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z\mathbb{1} - H(\alpha))^{-1} \, dz. \tag{6.7}$$

[1] Dies ist umso mehr gerechtfertigt, als neuere Untersuchungen des Autors mittlerweile Methoden empfehlen, die nicht auf der Störungstheorie beruhen. Vgl. auch die diesbezügliche Fußnote 5 in der Einleitung.

Hierbei umläuft Γ das Spektrum von H_{11} aber nicht das Spektrum von H_{22}, was möglich ist, da wir die beiden Spektren als disjunkt vorausgesetzt haben. Wir nehmen an, daß auch für alle $\alpha \in [0,1]$ stets $\Gamma \subset \rho(H(\alpha))$ ist.[2] Es gilt $P(0) = P$. Wir sind an

$$P_{11}(\alpha) := PP(\alpha)P : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \tag{6.8}$$

interessiert. Dazu gehen wir aus von der Resolventengleichung:

$$(z\mathbb{1} - H(\alpha))^{-1} = (z\mathbb{1} - H^{\|})^{-1} + \alpha(z\mathbb{1} - H^{\|})^{-1}H^{\perp}(z\mathbb{1} - H(\alpha))^{-1}. \tag{6.9}$$

Iteriert man diese, so erhält man die Störungsentwicklung:

$$(z\mathbb{1} - H(\alpha))^{-1} = (z\mathbb{1} - H^{\|})^{-1} + (z\mathbb{1} - H^{\|})^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^j \left[H^{\perp}(z\mathbb{1} - H^{\|})^{-1}\right]^j. \tag{6.10}$$

Diese Reihe ist Grundlage der Störungstheorie und wurde in diesem Rahmen vielfach untersucht (vgl. beispielsweise [14] oder [10]). Wir multiplizieren (6.7) von links und rechts mit P und setzen die Reihe (6.10) ein. Vertauschung von Summation und Integration führt auf:

$$PP(\alpha)P = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha^j}{2\pi i}\int_\Gamma P(z\mathbb{1} - H^{\|})^{-1}\left[H^{\perp}(z\mathbb{1} - H^{\|})^{-1}\right]^j P\,dz. \tag{6.11}$$

Aus (6.3) folgt, daß in (6.11) nur jeder zweite Summand von Null verschieden ist; deshalb ist es für das folgende günstiger, mit den Operatoren H_{jk} aus (6.5) zu arbeiten:

$$P_{11}(\alpha) = \mathbb{1} + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha^{2j}I_j. \tag{6.12}$$

Dabei ist:

$$I_j := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z\mathbb{1} - H_{11})^{-1}Z(z\mathbb{1} - H_{11})^{-1}\,dz,\ j \in \mathbb{N}, \tag{6.13}$$

mit:

$$Z := H_{12}(z\mathbb{1} - H_{22})^{-1}H_{21}(z\mathbb{1} - H_{11})^{-1}H_{12}\cdots H_{12}(z\mathbb{1} - H_{22})^{-1}H_{21}.$$

In Z kommt $(z\mathbb{1} - H_{22})^{-1}$ genau j-mal vor. Wir wollen I_j abschätzen. Der Operator $(z\mathbb{1} - H_{11})^{-1} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ ist endlichdimensional, normal und somit diagonalisierbar. Seien $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ die Eigenwerte von H_{11} und $E_1, \ldots, E_N$ die zugehörigen Spektralprojektoren. Dann gilt:

$$(z\mathbb{1} - H_{11})^{-1} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{z - \varkappa_k}E_k. \tag{6.14}$$

Diese Zerlegung setzen wir in (6.13) ein:

$$\begin{aligned} I_j = \sum_{k_1=1}^{N}\cdots\sum_{k_{j+1}=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma &\frac{1}{(z - \varkappa_{k_1})\cdots(z - \varkappa_{k_{j+1}})} \\ &\times E_{k_1}H_{12}(z\mathbb{1} - H_{22})^{-1}H_{21}E_{k_2}H_{12}\cdots H_{12}(z\mathbb{1} - H_{22})^{-1}H_{21}E_{k_{j+1}}\,dz. \end{aligned} \tag{6.15}$$

[2] Eine hinreichende Bedingung, unter der dies erfüllt ist, läßt sich aus Satz 6.7 gewinnen.

Wir betrachten allgemein die folgenden Integrale:

$$I_{m,n} := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)} A_1 R(z) A_2 \cdots A_n R(z)\, dz,\ \ m,n \in \mathbb{N}, \tag{6.16}$$

$$I_{m,0} := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)} \mathbb{1},\ \ m \in \mathbb{N}. \tag{6.17}$$

Dabei ist $R(z) := (z\mathbb{1} - H_{22})^{-1}$, und $A_k : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ sind beschränkte Operatoren. Die Identität in (6.17) ist auf $\mathcal{H}_2$ erklärt. Die λ_k, $k \in \mathbb{N}$, sind beliebige komplexe Zahlen, die allesamt innerhalb von Γ liegen. Man erhält I_j wieder, indem man im wesentlichen $A_1 = \mathbb{1}$ sowie $A_2 = H_{21}E_{k_2}H_{12}$ u.s.w. setzt.[3] Aus der Resolventengleichung

$$R(z) - R(w) = (w-z)R(z)R(w) \tag{6.18}$$

erhält man eine Rekursionsformel für die $I_{m,n}$.

Lemma 6.8. *Für die $I_{m,n}$ gemäß (6.16) und (6.17) gilt:*

$$\begin{aligned} &I_{m,n} = I_{m,n-1}A_nR(\lambda_m) - I_{m-1,n}R(\lambda_m),\ \ m,n \geq 1,\\ &I_{m,0} = 0,\ \ m \geq 2,\ \ I_{1,n} = A_1R(\lambda_1)\cdots A_nR(\lambda_1),\ \ n \geq 1. \end{aligned}$$

Beweis. Für den Integranden von $I_{m,n}$ folgt aus (6.9):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)} A_1R(z)\cdots A_nR(z)\\ &= \frac{1}{(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)} A_1R(z)\cdots A_n(R(\lambda_m) - (z-\lambda_m)R(z)R(\lambda_m))\\ &= \frac{1}{(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)} A_1R(z)\cdots A_{n-1}R(z)A_nR(\lambda_m)\\ &\quad - \frac{1}{(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_{m-1})} A_1R(z)\cdots A_nR(z)R(\lambda_m). \end{aligned}$$

Integration liefert die behauptete Rekursionsformel.

Für $n = 0$ kommt $R(z)$ im Integranden von $I_{m,0}$ nicht vor. Die Funktion $\frac{1}{(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)}$ hat nur Pole innerhalb von Γ und verhält sich für $m \geq 2$ wenigstens wie $\frac{1}{|z|^2}$ für $|z| \to \infty$. Nach dem Residuensatz können wir Γ in einen Kreis um den Ursprung mit beliebig großem Radius r deformieren. $r \to \infty$ liefert dann $I_{m,0} = 0$ für $m \geq 2$.

Wiederum nach dem Residuensatz ist:

$$I_{1,n} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z-\lambda_1} A_1R(z)\cdots A_nR(z)\, dz = A_1R(\lambda_1)\cdots A_nR(\lambda_1).$$

Damit ist alles gezeigt. □

Da H_{22} selbstadjungiert ist, können wir $\|R(z)\|$ berechnen:

$$\|R(z)\| = \frac{1}{\inf\limits_{\mu \in \sigma(H_{22})} |z-\mu|}. \tag{6.19}$$

[3]Den Faktor A_1 haben wir nur hinzugefügt, um die Indizierung zu erleichtern.

Wir setzen:

$$\Lambda := \inf_{\substack{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N} \\ \mu\in\sigma(H_{22})}} |\lambda_k - \mu|. \tag{6.20}$$

Nach Voraussetzung ist $\Lambda > 0$, so daß wir aus (6.19) die Abschätzung

$$\|R(\lambda_k)\| \leq \frac{1}{\Lambda},\ k \in \mathbb{N}, \tag{6.21}$$

erhalten, die wir mithilfe der Rekursionsformel aus Lemma 6.8 auf $I_{m,n}$ anwenden können.

Lemma 6.9. *Sei Λ wie in (6.20) erklärt. Wir setzen $a_{n,j} := \|A_{j+1}\| \cdots \|A_n\|$ für $j < n$ und $a_{n,j} := 1$ für $n \leq j$. Dann gilt für alle $m \geq 2$, $n \geq 1$:*

$$\|I_{m,n}\| \leq \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{n,j}}{\Lambda^{n-j}} \|I_{m-1,j}\|.$$

Beweis. Wir führen vollständige Induktion nach n. Den Induktionsanfang $n = 1$ liest man direkt an der Rekursionsformel ab:

$$I_{m,1} = I_{m,0} A_1 R(\lambda_m) - I_{m-1,1} R(\lambda_m) = -I_{m-1,1} R(\lambda_m).$$

Also ist mit (6.21):

$$\|I_{m,1}\| \leq \frac{1}{\Lambda} \|I_{m-1,1}\| = \frac{a_{1,1}}{\Lambda} \|I_{m-1,1}\|.$$

Wir schließen von n auf $n+1$:

$$\begin{aligned}
\|I_{m,n+1}\| &\leq \frac{\|A_{n+1}\|}{\Lambda} \|I_{m,n}\| + \frac{1}{\Lambda} \|I_{m-1,n+1}\| \\
&\leq \frac{\|A_{n+1}\|}{\Lambda} \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{n,j}}{\Lambda^{n-j}} \|I_{m-1,j}\| + \frac{1}{\Lambda} \|I_{m-1,n+1}\| \\
&\leq \frac{1}{\Lambda} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{n+1,j}}{\Lambda^{n+1-j}} \|I_{m-1,j}\| + \|I_{m-1,n+1}\| \right] \\
&= \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{n+1,j}}{\Lambda^{n+1-j}} \|I_{m-1,j}\|.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Wir führen eine Vereinfachung durch.

Lemma 6.10. *Die $S_{m,n}$ seien wie folgt definiert:*

$$S_{1,n} = 1,\ n \geq 1,\ S_{m,n} = \sum_{j=1}^{n} S_{m-1,j},\ m \geq 2,\ n \geq 1.$$

Dann gilt für $m, n \geq 1$:

$$\|I_{m,n}\| \leq \frac{a_{n,0}}{\Lambda^{m+n-1}} S_{m,n}.$$

Beweis. Wir führen vollständige Induktion nach m. Für $m = 1$ ist nach Lemma 6.8 und (6.21):

$$\|I_{1,n}\| \leq \frac{a_{n,0}}{\Lambda^n} = \frac{a_{n,0}}{\Lambda^n} S_{1,n}.$$

Wir schließen von m auf $m+1$, wobei wir von Lemma 6.9 ausgehen und $a_{n,j}a_{j,0} = a_{n,0}$ beachten:

$$\begin{aligned}
\|I_{m+1,n}\| &\leq \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{n,j}}{\Lambda^{n-j}} \|I_{m,j}\| \\
&\leq \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{n,j}}{\Lambda^{n-j}} \frac{1}{\Lambda^{m-1}} \frac{a_{j,0}}{\Lambda^j} S_{m,j} \\
&\leq \frac{1}{\Lambda^m} \frac{a_{n,0}}{\Lambda^n} \sum_{j=1}^{n} S_{m,j} \\
&= \frac{a_{n,0}}{\Lambda^{m+n}} S_{m+1,n}.
\end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

Schließlich schätzen wir die $S_{m,n}$ ab.

Lemma 6.11. *Für $m, n \geq 1$ gilt:*

$$S_{m,n} \leq \frac{1}{(m-1)!}(m+n)^{m-1}.$$

Beweis. Wir führen vollständige Induktion nach m. Der Induktionsanfang $m = 1$ ist klar:

$$S_{1,n} = 1 = \frac{1}{0!}(1+n)^0.$$

Wir schließen von m auf $m+1$:

$$\begin{aligned}
S_{m+1,n} &= \sum_{j=1}^{n} S_{m,j} \\
&\leq \frac{1}{(m-1)!} \sum_{j=1}^{n} (m+j)^{m-1} \\
&\leq \frac{1}{(m-1)!} \int_1^{n+1} (x+m)^{m-1} \, dx \\
&= \frac{1}{m!} \left[(x+m)^m\right]_1^{n+1} \\
&\leq \frac{1}{m!}(m+1+n)^m.
\end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. □

Wir fassen die vorangehenden Lemmata zusammen.

Satz 6.12. *Die $I_{m,n}$, $m, n \geq 1$, seien wie in (6.16) und Λ wie in (6.20) erklärt. Weiter sei $a_n := \|A_1\| \cdots \|A_n\|$. Dann gilt:*

$$\|I_{m,n}\| \leq \frac{a_n}{\Lambda^{m+n-1}} \frac{1}{(m-1)!} (m+n)^{m-1}.$$

Beweis. Folgt sofort aus der Kombination der Lemmata 6.10 und 6.11 mit $a_n = a_{n,0}$. □

Diesen Satz können wir benutzen, um die Integrale I_j, die uns eigentlich interessieren, abzuschätzen. Wir erinnern daran, daß $N = \dim \mathcal{H}_1$ ist.

Korollar 6.13. *Die I_j seien gemäß (6.13) und Λ wie in (6.20) erklärt. Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}$:*

$$\|I_j\| \leq N^{j+1} \left(\frac{\|H_{12}\| \|H_{21}\|}{\Lambda^2} \right)^j \frac{1}{j!} (2j+1)^j.$$

Beweis. Die Mehrfachsumme in (6.15) besteht aus N^{j+1} Summanden. Jeder Summand hat die Form:

$$E_{k_1} H_{12} I_{j+1,j} H_{21} E_{k_{j+1}}, \tag{6.22}$$

wobei in $I_{j+1,j}$ die λ_l jeweils gemäß

$$\lambda_l = \varkappa_{k_l}, \ l = 1, \ldots, j+1,$$

zu wählen sind. Weiter ist $A_l = H_{21} E_{k_l} H_{12}$ für $l = 2, \ldots$ und $A_1 = \mathbb{1}$. Da die E_k orthogonale Projektoren sind und somit $\|E_k\| \leq 1$ ist, können wir in Satz 6.12 abschätzen:

$$a_j = \|A_1\| \cdots \|A_j\| \leq (\|H_{12}\| \|H_{21}\|)^{j-1}.$$

Beachten wir noch die zusätzlichen Faktoren $E_{k_1} H_{12}$ und $H_{21} E_{k_{j+1}}$ in (6.22), so folgt die Behauptung aus Satz 6.12. □

Schätzt man in Korollar 6.13 die Fakultät mit der Stirlingschen Formel ab, so erhält man:

$$\|I_j\| \leq C q^j$$

mit geeigneten $C, q \geq 0$. Für hinreichend kleine C, q (und α) folgt dann aus (6.12), daß $P_{11}(\alpha)$ invertierbar ist. Damit ist ein Zusammenhang mit Abschnitt 5 hergestellt.

Literaturverzeichnis

[1] Anderson, P.W., Infrared catastrophe in Fermi gases with local scattering potentials, Phys. Rev. Lett. **18**, No. 24, 1049-1051 (1967)

[2] Avron, J.E., Seiler, R., Yaffe, L.G., Adiabatic Theorems and Applications to the Quantum Hall Effect, Comm. Math. Phys. **110**, 33-49 (1987)

[3] Bart, H., Gohberg, I., Kaashoek, M.A., Convolution equations and linear systems, Int. Eq. Oper. Th. **5**, 283-338 (1982)

[4] Bart, H., Gohberg, I., Kaashoek, M.A., Fredholm theory of Wiener-Hopf equations in terms of realization of their symbols, Int. Eq. Oper. Th. **8**, 590-613 (1985)

[5] Bart, H., Gohberg, I., Kaashoek, M.A., Wiener-Hopf Factorization, Inverse Fourier Transforms and Exponentially Dichotomous Operators, Jour. Funct. Anal., **68**, 1-42 (1986)

[6] Baskakov, A.G., Dichotomy of the spectrum of non-self-adjoint operators, Sib. Math. Journ. **32**, No.3, 370-375 (1991); translation from Sib. Mat. Zh. **32**, No. 3 (187), 24-30 (1991).

[7] Dym, H., Ta'assan, S., An Abstract Version of a Limit Theorem of Szegö, Journ. Funct. Anal. **43**, 294-312 (1981)

[8] Hamann, D.R., Orthogonality Catastrophe in Metals, Phys. Rev. Lett. **26**, No. 17, 1030-1032 (1971)

[9] Hille, E., Phillips, R.S., Functional analysis and semi-groups, AMS colloquium publications XXXI

[10] Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer Verlag 1966

[11] Pazy, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer Verlag 1983

[12] Reed, M., Simon, B., Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis, Academic Press 1972

[13] Reed, M., Simon, B., Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness, Academic Press 1975

[14] Reed, M., Simon, B., Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators, Academic Press 1978

[15] Rivier, N., Simanek, E., Exact Calculation of the Orthogonality Catastrophe in Metals, Phys. Rev. Lett. **26**, No. 8, 435-438 (1971)

[16] Szegö, G., On certain Hermitian forms associated with the Fourier series of a positive function, Commun. du Séminaire Math. de l'Univ. de Lund, Festschrift Marcel Riesz, Lund, 228-238 (1952)

[17] Widom, H., Asymptotic Expansions of Determinants for Families of Trace Class Operators, Ind. Univ. Math. Journ. **27**, No. 3, 449-478 (1978)

[18] Yamada, K., Yosida, K., Orthogonality Catastrophe for a System of Interacting Electrons. II, Prog. Theo. Phys. **62**, No. 2, 363-369 (1979)

[19] Yamada, K., Yosida, K., Orthogonality Catastrophe for a System of Interacting Electrons. III, Prog. Theo. Phys. **68** No. 5, 1504-1517 (1982)

[20] Yosida, K., Functional analysis, Springer Verlag 1965

Lebenslauf

Name	Peter Otte
Geburtsdatum	02. August 1966
Geburtsort	Bad Lauterberg
Schulbildung	1973 - 1977 Grundschule Bad Lauterberg-Bartolfelde 1977 - 1986 Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium Herzberg 1986 Abitur
Wehrdienst	1986-1987 Grundwehrdienst beim Panzer-Grenadier-Bataillon 12 in Osterode
Studium	1987-1993 Diplomstudiengang Mathematik an der Universität Göttingen Ende SS 89 Diplomvorprüfung Ende WS 92/93 Diplomhauptprüfung seit 1993 Promotionsstudiengang Mathematik an der Universität Göttingen
wiss. Tätigkeit	seit Januar 1994 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen