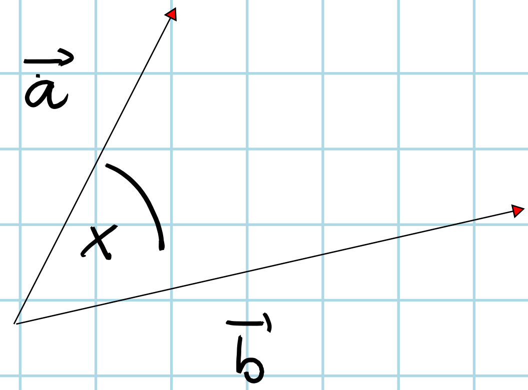
4. Vorlesung 27.10.10

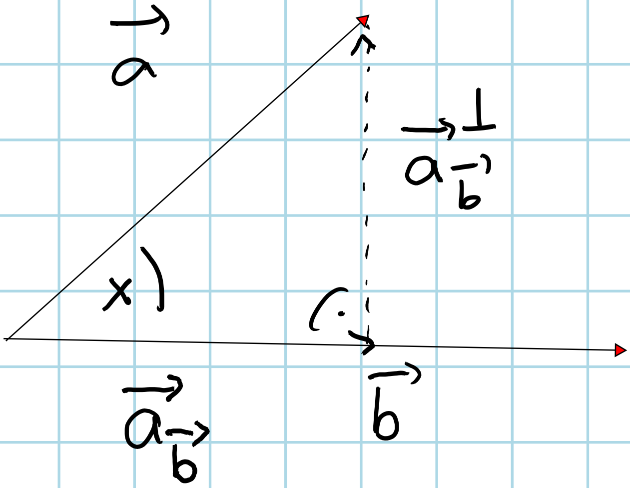
Skalarprodukt



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cdot\cos(x)$$

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\underbrace{|\cos(x)|}_{\in[0,1]}$$

$$\boxed{|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}| \quad \text{Cauchy-Schwarzsche Ungleichung}}$$



Anteil von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = |\vec{a}|\,|\cos(x)| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Orthogonale Zerlegung von $\vec{a}$ längs $\vec{b}$, falls $\vec{b} \neq 0$:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\vec{b}} + \vec{a}_{\vec{b}}^{\perp}$$

mit den Komponenten

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \left(\vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

in Richtung $\vec{b}$ und

$$\vec{a}_{\vec{b}}^{\perp} = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

orthogonal zu $\vec{b}$.

Das Vektorprodukt „$\times$" im Raum

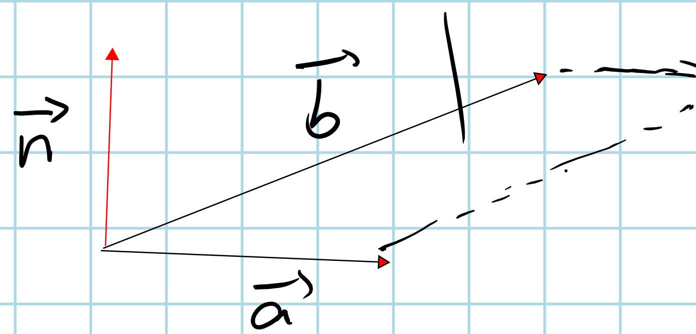
$$\vec{a} \times \vec{b}$$

Parallelogramm A

$\vec{n} \perp \vec{a}$

$\vec{n} \perp \vec{b}$

$|\vec{n}| = 1$



„rechte Handregel"

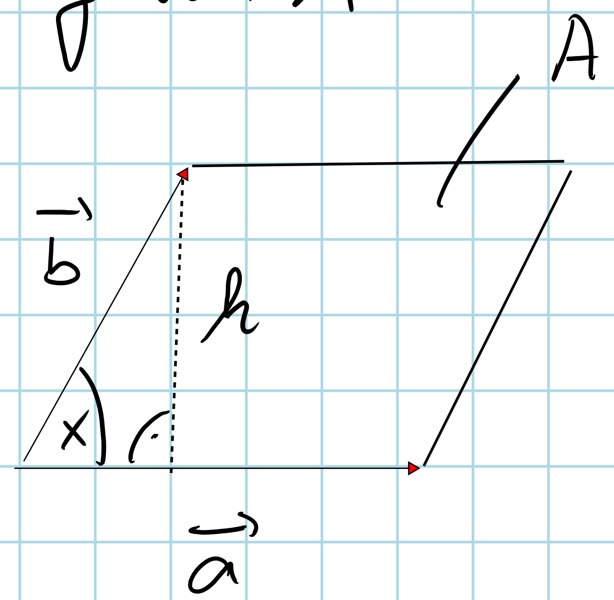
$$\vec{a} \times \vec{b} = |A| \quad \vec{n}$$

mit anderen Worten

(1) Es ist $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, falls $\vec{a} = 0$ oder $\vec{b} = 0$ oder $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$ ist.

(2) In allen anderen Fällen ist $\vec{a} \times \vec{b}$ der Vektor, der orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist, mit dem $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden und dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist.

zur Berechnung von A



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |A| = |\vec{a}| \cdot h$$

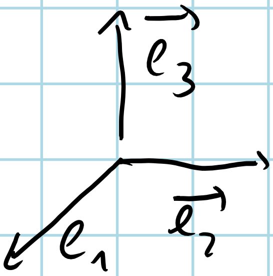
$$= |\vec{a}| \, \underbrace{|\sin(x)|}_{\sqrt{1-\cos^2(x)}} \, |\vec{b}|$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \left(1 - \cos^2(x)\right)$$
$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2(x)$$

$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\underbrace{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\alpha)}_{\vec{a}\cdot\vec{b}})^2$$

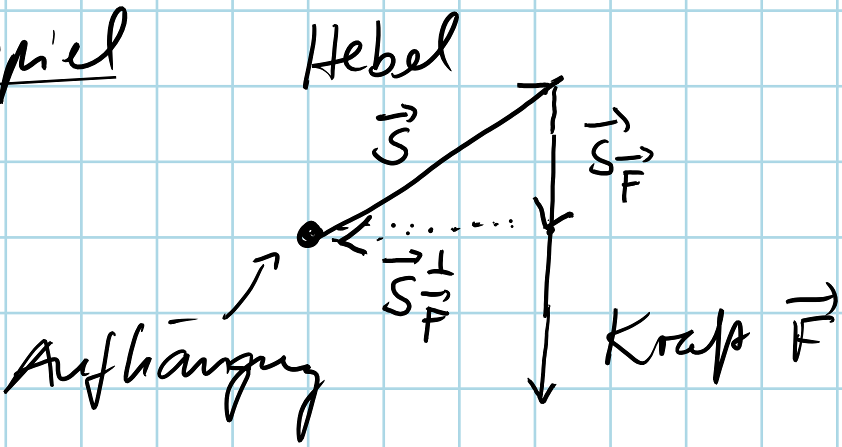
$$\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$$
$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$
$$\alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\times\vec{b}$$
$$= \vec{a}\times(\alpha\vec{b})$$
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c})$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{c}) + (\vec{b}\times\vec{c})$$
$$\vec{a}\times\vec{b} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0} \text{ oder } \vec{b} = 0 \text{ oder } \vec{a} \text{ parallel zu } \vec{b}$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

<u>Beispiel</u>



$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$$
$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

<u>Beispiel</u>



$$|\vec{M}| = |\vec{F}|\cdot|s_{\vec{F}}^{\perp}|$$
$$\vec{M} = \vec{F}\times\vec{s}$$

In Koordinaten

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ a_2 & & b_2 \end{matrix}$$

$$(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$$

$$= a_1 b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{\vec{e}_3} + a_1 b_3 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2} + a_2 b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}_{-\vec{e}_3} + a_2 b_3 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{\vec{e}_1}$$

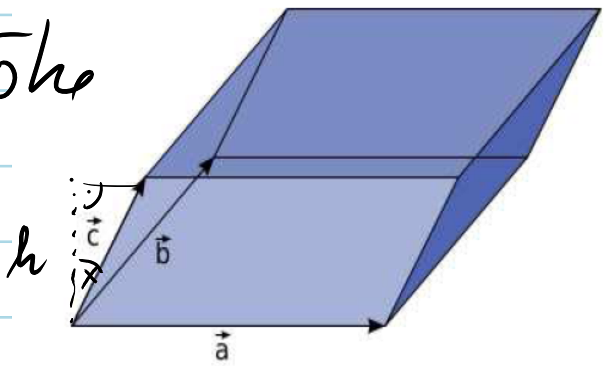
$$+ a_3 b_1 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{\vec{e}_2} + a_3 b_2 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}_{-\vec{e}_1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}). \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}^{\perp}_{\vec{b}} = \frac{1}{|b|^2}\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}).} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \times \left(\vec{a} \times \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

Das Spatprodukt

$V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$



$= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \underbrace{h}_{\cos(x) \cdot |\vec{c}|}$

$= \underbrace{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}_{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}$

Der von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannte SPAT (auch PARALLELFLÄCHE oder PARALLELEPIPED genannt) hat das Volumen

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.$$

$$\boxed{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right] = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

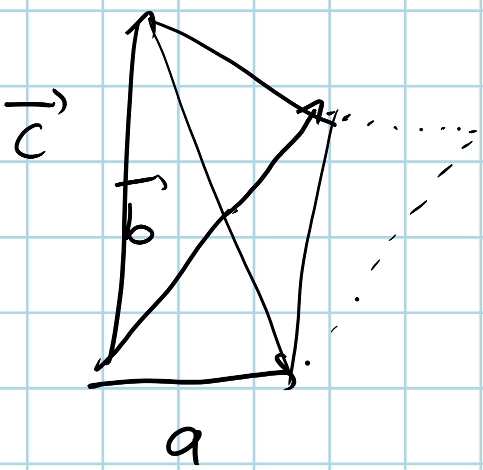
$+ \quad + \quad + \quad - \quad - \quad -$

<u>Beispiel</u> Tetraeder

$$V = \frac{1}{3} \cdot G_{\triangle} \, h$$

$$= \frac{1}{6} G_{\square} \cdot h$$

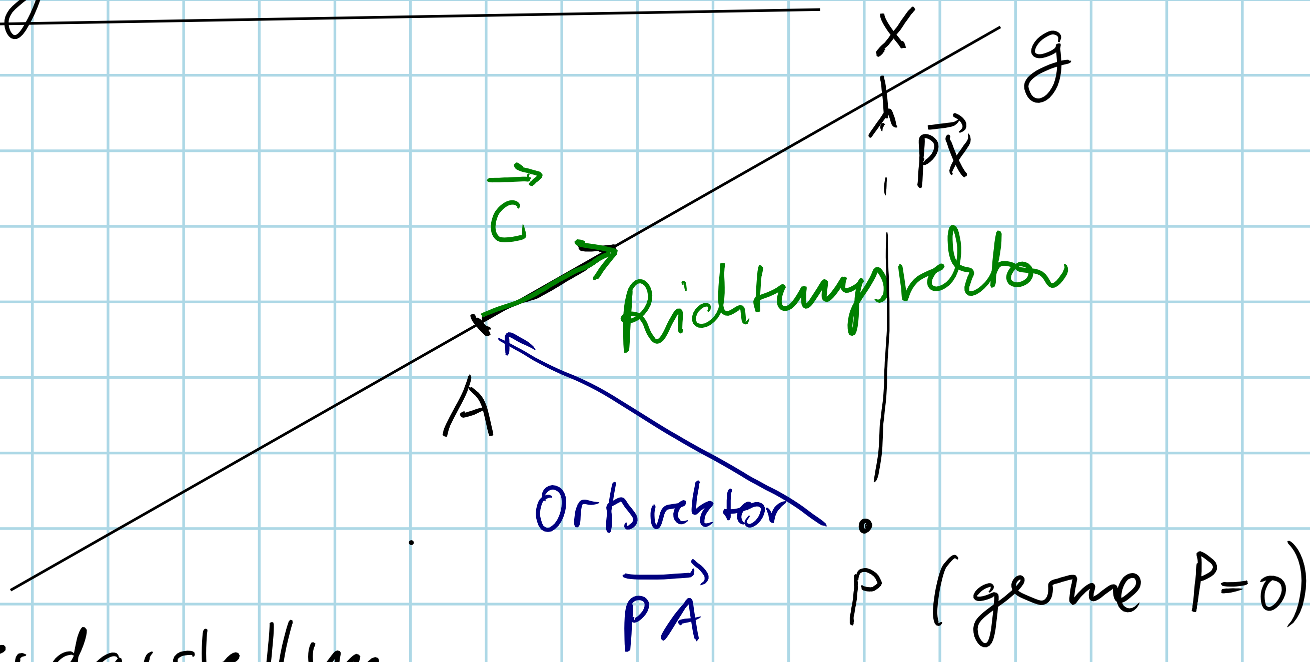
$$= \frac{1}{6} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 8, \quad V = \frac{4}{3}$$

1.5 Geraden und Ebenen



Parameterdarstellung

$$g = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{PX} = \vec{PA} + t \cdot \vec{c} \text{ für ein } t \in \mathbb{R} \}$$

<u>Beispiel</u>

$A = (0,-1,2)$
$B = (3,1,1)$
$R = (-6,-5,4)$

liegt R auf der Geraden durch A, B

(P=0)

$$\begin{pmatrix}-6\\-5\\+4\end{pmatrix} = \vec{OR} \overset{?}{=} \vec{OA} + t \cdot \overbrace{\vec{AB}}^{\text{Richtungsvektor}} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-6\\-4\\2\end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t \cdot 3\\t \cdot 2\\-t\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad -6 = 3t, \; -4 = 2t, \; -t = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad t = -2 \; \checkmark \quad \Big\} \; R \in g$$

Parameterdarstellung von Geraden:

Bezugspunkt $P = O$

PUNKT-RICHTUNGS-GLEICHUNG:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

ZWEI-PUNKTE-GLEICHUNG:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

$$\begin{array}{l|lll|l}
-a_1 & x_1 = & a_1 + & t(b_1 - a_1) & :(b_1 - a_1) \\
-a_2 & x_2 = & a_2 + & t(b_2 - a_2) & :(b_2 - a_2) \\
-a_3 & x_3 = & a_3 + & t(b_3 - a_3) & :(b_3 - a_3)
\end{array}$$

Koordinatengleichung einer Geraden:

3 (A) $\dfrac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \dfrac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \dfrac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3},$ falls $a_i \neq b_i,\ i = 1, 2, 3$

(B) $\dfrac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \dfrac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2},\ x_3 = a_3,$ falls $a_3 = b_3$

$\dfrac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \dfrac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3},\ x_2 = a_2,$ falls $a_2 = b_2$

$\dfrac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \dfrac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3},\ x_1 = a_1,$ falls $a_1 = b_1$

(C) $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,$ falls $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 \neq b_3$

$x_2 = a_2,\ x_3 = a_3,$ falls $a_2 = b_2,\ a_3 = b_3,\ a_1 \neq b_1$

$x_3 = a_3,\ x_1 = a_1,$ falls $a_1 = b_1,\ a_3 = b_3,\ a_2 \neq b_2$

Momentgleichung einer Geraden

> **Momentengleichung** bzgl. des Bezugspunktes P:
> $$\overrightarrow{PX} \times \vec{c} = \vec{m}_P \quad \text{mit } \vec{m}_P = \overrightarrow{PA} \times \vec{c}.$$

$$g = \{ X \mid \overrightarrow{PX} \times \vec{c} = \overrightarrow{PA} \times \vec{c} \}$$