

Mathematik II für ET/IT und ITE im SS 2026

Annett Püttmann

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM, 44780 BO-
CHUM

E-mail address: `annett.puettmann@rub.de`

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Differentialrechnung für Funktionen in mehreren Veränderlichen	5
1. Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$	5
2. Beispiele und Darstellungshilfen	7
3. Differenzierbarkeit	10
4. Partielle Ableitungen höherer Ordnung	17
5. Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ und Kettenregel	19
6. Mittelwertsatz, Poincarésches Lemma, Taylorpolynome	25
7. Implizite Funktionen	27
8. Extrema für Funktionen mehrerer Veränderlicher	32
Kapitel 2. Einführung in die numerische Mathematik	43
1. Fixpunktverfahren	43
2. Nullstellenberechnung, Newtonverfahren	45
3. Interpolation	47
4. Numerische Integration	49
5. Differenzenverfahren	51
Kapitel 3. Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher	53
1. Definition des Riemann-Integrals	53
2. Sätze von Fubini	56
3. Mittelwertsatz	60
4. Substitution, Koordinatenwechsel, Transformationsregel	60
5. Uneigentliche Integrale	63
Kapitel 4. Kurven, Flächen, Integralsätze	67
1. Kurvenlängen und Flächeninhalte	67
2. Vektorfelder	71
3. Kurvenintegral - Zirkulation eines Vektorfeldes entlang einer Kurve	72
4. Rotation und Gradientenfelder	74
5. Flächenintegrale - Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche	76
6. Integralsätze von Stokes und Green	77
7. Divergenz - Charakterisierung von Wirbelfeldern	79
8. Gaußscher Integralsatz	81
9. Anwendungen in der Elektrodynamik	82
Kapitel 5. Funktionentheorie	85
1. Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen	85
2. Komplexwertige Funktionen	87
3. Komplexe Kurven- und Flächenintegrale	95
4. Cauchysche Integralformel und Folgerungen	99

5. Isolierte Singularitäten und Residuensatz	104
6. Gebrochen lineare Abbildungen - Möbiustransformationen	114
Kapitel 6. Laplacetransformation	121
1. Integraltransformationen	121
2. Definition und erste Beispiele für Laplacetransformierte	122
3. Eigenschaften der Laplace-Transformation	123
4. Inverse der Laplace-Transformation	126
5. Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	128
6. δ -Distribution	128
7. $2L$ -periodische Funktionen	129
8. Faltung	129
Kapitel 7. Fouriertransformation	133
1. Motivation – unendlich ausgedehnte Probleme	133
2. Definition und Eigenschaften	134
3. Umkehrformel	137
4. Fouriertransformation mit Residuensatz	138
5. Lösung PDGL mit Hilfe der Fouriertransformation	139

KAPITEL 1

Differentialrechnung für Funktionen in mehreren Veränderlichen

Wir betrachten Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ wobei $m, n \in \mathbb{N}$ und D eine (offene) Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Funktionen, die von mehreren Veränderlichen abhängig sind, sind z.B. die Ladungsverteilung im Raum $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, oder die kinetische Energie, die von der Masse und der Geschwindigkeit abhängt.

Weiterhin muss man manchmal Funktionen mehrerer Veränderlicher betrachten, um Eigenschaften von Funktionen, die nur von einer Variablen abhängig sind, zu beweisen, z.B. die Assoziativität des Faltungsproduktes und die Aussage, dass $\sum_{j=0}^N \langle v, v_j \rangle v_j$ die beste Approximation eines Vektors v bezüglich eines Orthonormalsystems $\{v_j : j = 0, \dots, N\}$ ist.

Abbildungen nach $\mathbb{R}^m$ ($m > 1$) treten zum Beispiel auf, wenn man den Weg eines Teilchens (im $\mathbb{R}^3$) beschreiben will.

1. Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$

Der $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n -Tupel reeller Zahlen. Wir schreiben einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ als Spaltenvektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $x_j \in \mathbb{R}$. Der $\mathbb{R}^n$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ist ein reeller Vektorraum der Dimension n , $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n = n$. Die Standardbasis besteht aus den Einheitsvektoren $\vec{e}_j$, so dass $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $x_j \in \mathbb{R}$.

1.1. Skalarprodukt und Norm. Das Standardskalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad \text{für } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Die durch dieses Skalarprodukt definierte Norm ist die euklidische Norm $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Für $\varepsilon > 0$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist die ε -Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x})$ eines Punktes $\vec{x}$ definiert als $U_\varepsilon(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{y}\| < \varepsilon\}$.

1.2. Topologie.

DEFINITION 1. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, falls es zu jedem Punkt $\vec{x} \in D$ eine ε -Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x})$ gibt, die ganz in D liegt, also $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset D$.

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus D$ eine offene Menge ist.

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, falls es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\|\vec{x}\| \leq S$ für alle $\vec{x} \in D$.

Natürlich sind $\mathbb{R}^n$, ε -Umgebungen und die leere Menge $\emptyset$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Auch unendliche Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind wieder offen.

BEISPIEL 1 (offene Intervalle). Für $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ mit $a_j < b_j$ heißt die Teilmenge $\{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : a_j < x_j < b_j \forall j\}$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}^n$. Falls $n = 1$, so handelt es sich um das Intervall (a_1, b_1) . Falls $n = 2$, so ist das Intervall ein offenes Rechteck mit den Seitenlängen $b_1 - a_1$ und $b_2 - a_2$. Falle $n = 3$, so ist das Intervall ein offener Quader mit den Seitenlängen $b_j - a_j$ für $j = 1, 2, 3$.

BEISPIEL 2 (abgeschlossene Intervalle). Für $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ mit $a_j < b_j$ heißt die Teilmenge $\{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j \forall j\}$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}^n$.

1.3. Konvergenz.

SATZ 1 (Komponentenweise Konvergenz). *Eine Folge $\{\vec{x}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathbb{R}^n$ gegen $\vec{x}$, wenn die n Koeffizientenfolgen gegen die Koeffizienten von $\vec{x}$ konvergieren.*

BEWEIS. Mit den Bezeichnungen $\vec{x}_m = (x_{m,1}, \dots, x_{m,n})^T = \sum_{j=1}^n x_{m,j} \vec{e}_j$ und $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ erhalten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|x_{m,k} - x_k| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{m,j} - x_j)^2} = \|\vec{x}_m - \vec{x}\| \leq \sum_{j=1}^n \|x_{m,j} \vec{e}_j - x_j \vec{e}_j\| = \sum_{j=1}^n |x_{m,j} - x_j|.$$

□

FOLGERUNG 1. *Wenn $\{\vec{x}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, $\{\vec{y}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}^n$ und $\{\lambda_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m = \vec{x}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{y}_m = \vec{y}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \lambda$, dann gilt*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\vec{x}_m + \vec{y}_m) = \vec{x} + \vec{y}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m \vec{x}_m = \lambda \vec{x}$$

und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \vec{x}_m, \vec{y}_m \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|\vec{x}_m\| = \|\vec{x}\|.$$

BEWEIS. Mit $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$, $\vec{y} = \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j$, $\vec{x}_k = \sum_{j=1}^n x_{k,j} \vec{e}_j$, $\vec{y}_k = \sum_{j=1}^n y_{k,j} \vec{e}_j$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k + \vec{y}_k &= \sum_{j=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{k,j} + y_{k,j}) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^n (x_j + y_j) \vec{e}_j = \vec{x} + \vec{y}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \vec{x}_k &= \sum_{j=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_k x_{k,j}) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^n (\lambda x_j) \vec{e}_j = \lambda \vec{x}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \vec{x}_k, \vec{y}_k \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_{k,j} y_{k,j} = \sum_{j=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,j} y_{k,j} = \sum_{j=1}^n x_j y_j = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k\|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \vec{x}_k, \vec{x}_k \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2. \end{aligned}$$

□

FOLGERUNG 2. *Jede Folge in $\mathbb{R}^n$ hat höchstens einen Grenzwert. Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge. Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$ ist konvergent in $\mathbb{R}^n$.*

BEWEIS. Direkt aus den entsprechenden Resultaten für Folgen reeller Zahlen durch Übergang zu den Koordinatenfolgen. $\square$

2. Beispiele und Darstellungshilfen

Um Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besser zu verstehen, haben wir ihre Graphen $\{(x, y) \in \mathbb{R} : y = f(x)\}$ skizziert. Auch für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kann man den Graph definieren und betrachten $\{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(x_1, \dots, x_n)\}$. Aber dieser Graph ist (für $n > 1$) keine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ mehr und lässt sich deshalb schlecht skizzieren.

2.1. Kurven. Kurven sind Abbildungen $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T$. Statt des Graphen kann man sich das Bild der Kurve c anschauen, also die Menge $\{c(t) : t \in [a, b]\}$. Man nennt diese Bildmenge auch **Spur** der Kurve. Dies ist besonders hilfreich, wenn die Abbildung c injektiv ist und $n = 2, 3$. Kurven sind wichtig, um eindimensionale Unterobjekte zu beschreiben, z.B. den Weg eines Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit t .

BEISPIEL 3 (Geraden und Strecken). Die Spur der Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (a_1 t, a_2 t)$, mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Schränkt man den Definitionsbereich auf ein Intervall ein, so parametrisiert man Strecken. Besonders häufig braucht man eine Parametrisierung einer Geraden in der Nähe eines Punktes $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$. Sie ist durch $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x_1 + a_1 t, x_2 + a_2 t)$, mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

BEISPIEL 4 (Kreis). Die Spur der Kurve $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos t, \sin t)^T$, ist der Kreis mit Mittelpunkt $\vec{0}$ und Radius 1.

BEISPIEL 5 (Schraubenlinie). Für $h \in \mathbb{R}$ fest betrachten wir die Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c(t) = (\cos t, \sin t, ht)^T$.

Wir werden später, nach den notwendigen Definitionen, sehen, dass eine Kurve c genau dann stetig bzw. differenzierbar ist, wenn dies für alle ihre Komponentenfunktionen c_j der Fall ist.

2.2. Koordinatenlinien. Zu einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir die **partiellen Funktionen** entlang einer Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, d.h. die Funktion $f \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(c(t))$. Zum Beispiel beschreibt $f \circ c_j$ mit $c_j(t) = \vec{x} + t\vec{e}_j$ wie sich die Funktion f um den Punkt $\vec{x}$ in Richtung $\vec{e}_j$, also in Richtung der x_j -Koordinate verändert. Gerade bei rotationssymmetrischen Funktionen ist es sinnvoll, die Kurven $c_\phi : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c_\phi(t) = t(\cos \phi, \sin \phi)$, und die Funktionen $f \circ c_\phi$ zu betrachten.

BEISPIEL 6 (Nordhalbkugel). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ und $D = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Der Graph ist die Oberfläche der oberen Halbkugel.

Für $\vec{x} = (0, a_2)^T$ erhält man die partielle Funktion $f \circ c_1(t) = f(t, a_2) = \sqrt{1 - a_2^2 - t^2}$ für $|t| \leq \sqrt{1 - a_2^2}$ deren Graph ein Halbkreis um $(0, a_2)$ mit Radius $\sqrt{1 - a_2^2}$ ist. Für jeden Winkel ϕ ist $f \circ c_\phi(t) = \sqrt{1 - t^2}$ für $|t| \leq 1$ definiert. Der Graph von $f \circ c_\phi$ ist ein Halbkreis um den Koordinatenursprung.

Die Abbildung 1 zeigt den Graph der Abbildung f mit (r, ϕ) - und (x, y) -Koordinatenlinien.

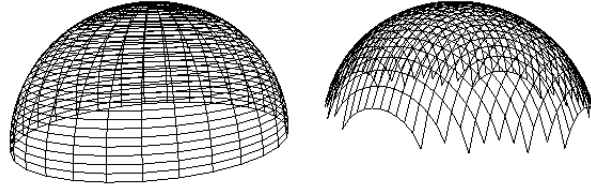


ABBILDUNG 1. Graph von $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ mit (r, ϕ) - und (x, y) -Koordinatenlinien

BEISPIEL 7 (Sattelfläche). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Für $\vec{x} = (a_1, a_2)^T$ erhält man die partielle Funktion $f \circ c_1(t) = f(a_1 + t, a_2) = a_1 a_2 + t a_2$, also eine lineare Funktion in t , deren Graph eine Gerade ist.

2.3. Höhenlinien. Zu einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir die **Höhenlinien**, d.h. die Menge $H_c = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = c\}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Die Gestalt und die Veränderung dieser Höhenlinien, wenn man c variiert, gibt uns einen Eindruck vom Verhalten der Funktion f .

BEISPIEL 8 (Nordhalbkugel). Für $f : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ und $D = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ wie in Beispiel 6 gilt $H_c = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 + x_2^2 = 1 - c^2\}$. Also ist die Höhenlinie H_c für $c > 0$ ein Kreis mit Radius $\sqrt{1 - c^2}$, für $c = 1$ ein Punkt und für $c < 0$ leer. In der Abbildung 2 sieht man links den Graph der Funktion f entlang der Höhenlinien.

BEISPIEL 9 (Sattelfläche). Für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ wie in Beispiel 7 gilt $H_c = \{(x_1, x_2)^T : x_1 x_2 = c\}$. Also ist die Höhenlinie H_c eine Hyperbel $\{(x_1, c/x_1)^T : x_1 \neq 0\}$ für $c \neq 0$ und die Vereinigung der beiden Geraden $\{x_1 = 0\}$ und $\{x_2 = 0\}$ für $c = 0$. In der Abbildung 2 sieht man rechts den Graph der Funktion f entlang der Höhenlinien.

2.4. Stetigkeit.

DEFINITION 2. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig in einem Punkt** $\vec{x} \in D$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(\vec{y}) - f(\vec{x})| < \varepsilon$ für alle $\vec{y}$ mit $\|\vec{y} - \vec{x}\| < \delta$.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig** in $\vec{x} \in D$, falls f in jedem Punkt $\vec{x} \in D$ stetig ist.

BEISPIEL 10 (Stetigkeit der Koordinatenfunktionen). Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto x_i$, ist stetig in jedem Punkt $\vec{x}$ für jedes $j = 1, \dots, n$, denn

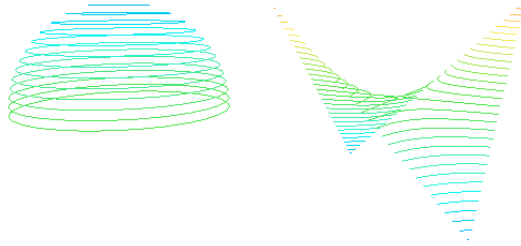


ABBILDUNG 2. Funktionsgraph eingeschränkt auf Höhenlinien für Beispiele Nordhalbkugel und Sattelfläche

zu jedem $\varepsilon > 0$ gilt für alle $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ mit $\|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon (= \delta)$

$$\begin{aligned} |f(\vec{y}) - f(\vec{x})| &= |y_j - x_j| = \sqrt{(y_j - x_j)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \|\vec{y} - \vec{x}\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

LEMMA 1 (Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit). *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $\vec{x} \in D$, wenn für jede Folge $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x})$.*

BEWEIS. Wenn f stetig in $\vec{x}$ ist und $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ eine gegen $\vec{x}$ konvergente Folge ist, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(\vec{x}_n) - f(\vec{x})| < \varepsilon$ für alle $\vec{x}_n$ mit $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \delta$. Da die Folge $\{\vec{x}_n\}$ aber konvergent ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Also $|f(\vec{x}_n) - f(\vec{x})| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und die Folge $\{f(\vec{x}_n)\}$ konvergiert gegen $f(\vec{x})$.

Wenn f in $\vec{x}$ nicht stetig ist, dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta_n = 1/n > 0$ ein $\vec{x}_n$ mit $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < 1/n$ und $|f(\vec{x}_n) - f(\vec{x})| \geq \varepsilon_0$ existiert. Die so gefundene Folge $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ konvergiert gegen $\vec{x}$ aber die Folge der Funktionswerte $\{f(\vec{x}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(\vec{x})$, denn $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_n)| \geq \varepsilon_0$ $\square$

LEMMA 2. *Wenn $f, g : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, so sind auch ihre Summe $f + g : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ und ihr Produkt $fg : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wenn zusätzlich $g(\vec{x}) \neq 0$, so ist auch der Quotient f/g stetig in $\vec{x} \in D$.*

Wenn $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \subset U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(D) \subset U$, dann ist auch $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$ stetig.

BEWEIS. Der Beweis verläuft wie im Fall von Funktionen einer Veränderlicher und basiert auf den Rechenregeln zur Grenzwertbildung. Wenn f und g stetig in $\vec{x}$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x})$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\vec{x}_n) = g(\vec{x})$ für jede gegen $\vec{x}$

konvergente Folge $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$. Also auch

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(\vec{x}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) + g(\vec{x}_n) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = (f + g)(\vec{x}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (fg)(\vec{x}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n)g(\vec{x}_n) = f(\vec{x})g(\vec{x}) = (fg)(\vec{x}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (f/g)(\vec{x}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n)/g(\vec{x}_n) = f(\vec{x})/g(\vec{x}) = (f/g)(\vec{x})\end{aligned}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(\vec{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(\vec{x}_n)) = g(f(\vec{x})) = (g \circ f)(\vec{x}).$$

□

BEISPIEL 11 (Polynome). Polynome in den Koordinatenfunktionen $x_1, \dots, x_n$ sind stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, da sie durch die Operationen Addition und Multiplikation aus den Koordinatenfunktionen in Beispiel 10 entstehen.

BEISPIEL 12. Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x_1, x_2) = x_1 \sin x_2$ ist stetig, denn h ist das Produkt der stetigen Koordinatenfunktion $(x_1, x_2)^T \mapsto x_1$ und der stetigen Funktion $h(x_1, x_2) = \sin x_2$. Dabei ist die Funktion h stetig, weil $h = \sin \circ g_1$ mit $g_1(x_1, x_2) = x_1$.

BEISPIEL 13 (Unstetige aber partiell stetige Funktion). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & , \text{ falls } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}.$$

Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ stetig, weil sie dort Quotient zweier Polynome ist. Die Funktion ist in $\vec{x} = (0, 0)^T = \vec{0}$ nicht stetig, da für die Folge $\{\vec{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\vec{x}_n = (1/n, 1/n)^T$ zwar $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{0}$ aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1/n^2 + 1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(\vec{0}).$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich auch nicht stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen, z.B. durch die Definition $f(\vec{0}) = 1/2$, da es auch gegen $\vec{0}$ konvergierende Folgen gibt, für die die Folge der Funktionswerte nicht gegen $1/2$ konvergiert, z.B. die Folge $\{\vec{y}_n = (0, 1/n)^T\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{y}_n) = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{y}_n = \vec{0}$. Abbildung 3 zeigt die Höhenlinien der Funktion f . Man erkennt, dass sich alle Höhenlinien in $\vec{0}$ „treffen“.

Warnung: Um die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n > 1$ zu beweisen, reicht es nicht, die Stetigkeit der partiellen Funktionen $f \circ c_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ c_j)(t) = f(\vec{x} + t\vec{e}_j)$, für alle $\vec{x}$ und j zu zeigen.

3. Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hieß differenzierbar in einem Punkt x_0 , wenn sie durch eine lineare Funktion $l(x) = c(x - x_0)$ in der Nähe des Punktes x_0 gut angenähert wurde. Dabei bedeutete „gut“, dass der Fehler $f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$ schneller gegen 0 konvergiert als der Abstand $|x - x_0|$, also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Diese Zahl c hängt vom Punkt x_0 ab und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

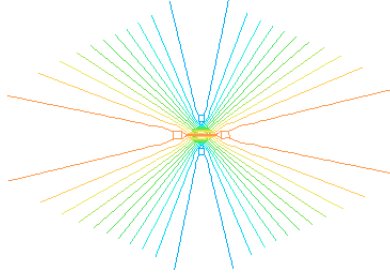


ABBILDUNG 3. Höhenlinien der Funktion $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soll differenzierbar in $\vec{x}_0$ heißen, wenn sie sich lokal, d.h. in der Nähe von $\vec{x}_0$, „gut“ durch eine lineare Funktion approximieren läßt. Eine lineare Funktion $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $l(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0)$ ist von Form

$$l(\vec{x}) = c_1(x_1 - x_{0,1}) + \dots + c_n(x_n - x_{0,n}) = \langle c, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle$$

mit $c = \sum_{j=1}^n c_j \vec{e}_j$, $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$, $\vec{x}_0 = \sum_{j=1}^n x_{0,j} \vec{e}_j$ und Konstanten $c_j \in \mathbb{R}$.

3.1. Totale Differenzierbarkeit.

DEFINITION 3. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar in einem Punkt** $\vec{x}_0$, falls es einen Vektor $c = \sum_{j=1}^n c_j \vec{e}_j$ gibt, so dass

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle c, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** in $D \subset \mathbb{R}^n$, wenn sie in jedem Punkt $\vec{x}_0 \in D$ differenzierbar ist.

Die Differenz $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle c, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle$ ist eine Funktion $r(\vec{x} - \vec{x}_0)$. Falls f in $\vec{x}_0$ differenzierbar ist, so kann man $r(\vec{x} - \vec{x}_0)/\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ stetig in $\vec{0}$ fortsetzen.

SATZ 2 (Stetigkeit). Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $\vec{x}_0$, so ist f auch stetig in $\vec{x}_0$.

BEWEIS. Aus der Dreiecksungleichung und der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| &= |\langle c, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + r(\vec{x} - \vec{x}_0)| \leq |\langle c, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle| + |r(\vec{x} - \vec{x}_0)| \\ &\leq \|c\| \|\vec{x} - \vec{x}_0\| + \left| \frac{r(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} \right| \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \end{aligned}$$

und damit die Stetigkeit, da $r(\vec{x} - \vec{x}_0)/\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ stetig in $\vec{0}$ ist. $\square$

3.2. Partielle Differenzierbarkeit.

SATZ 3 (Partielle Ableitungen). *Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar ist, dann gilt $c_j = h'_j(0)$ für alle j , wobei $h_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_j(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_j)$.*

BEWEIS. In der Definition der Differenzierbarkeit betrachten wir $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{e}_j$ mit $t \rightarrow 0$, also $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$. Wenn f differenzierbar ist, so gilt $\vec{x} - \vec{x}_0 = t\vec{e}_j$ und es gibt eine Funktion $r(t)$ mit $\lim_{t \rightarrow 0} r(t)/t = 0$ und

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_j) - f(\vec{x}_0) &= \langle c, t\vec{e}_j \rangle + r(t) \\ h_j(t) - h_j(0) &= tc_j + r(t) \\ \frac{h_j(t) - h_j(0)}{t} &= c_j + \frac{r(t)}{t} \\ h'_j(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_j(t) - h_j(0)}{t} = c_j + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} = c_j. \end{aligned}$$

□

DEFINITION 4. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **partiell differenzierbar in $\vec{x}_0$** , falls die partiellen Funktionen $h_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_j(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_j)$ für $t = 0$ differenzierbar sind. Wir benutzen die Bezeichnungen*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) := h'_j(0), \quad (\text{grad } f)_{\vec{x}_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right)^T.$$

Der Vektor $(\text{grad } f)_{\vec{x}_0}$ der partiellen Ableitungen $(\partial f / \partial x_j)(\vec{x}_0)$ heißt **Gradient von f in $\vec{x}_0$** . Falls f für alle $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar ist, so nennt man auch die Funktionen

$$f_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}),$$

partielle Ableitungen von f .

Wählt man in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ die Koordinatenfunktionen x, y, z , so schreibt man auch f_x, f_y und f_z für die entsprechenden partiellen Ableitungen.

BEISPIEL 14. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + \sin(x + 2y)$. Sie ist partiell differenzierbar, weil ihre partiellen Funktionen differenzierbar sind. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir $f_x(x, y) = 2x + \cos(x + 2y)$ und $f_y(x, y) = 2\cos(x + 2y)$, also

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} 2x + \cos(x + 2y) \\ 2\cos(x + 2y) \end{pmatrix}, \quad (\text{grad } f)_{(2, -1)^T} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

SATZ 4 (Hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit). *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $\vec{x}_0 \in D$ differenzierbar, wenn es eine offene Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset D$ gibt, auf der alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.*

BEWEIS. Für $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v} \in U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ betrachten wir die Differenz $\vec{x} - \vec{x}_0 = \vec{v} = \sum_{j=1}^n v_j \vec{e}_j$ und führen die Zwischenpunkte $\vec{x}_k = \vec{x}_0 + \sum_{j=1}^k v_j \vec{e}_j$ ein. Nun gilt mit

Hilfe des Mittelwertsatzes für $0 \leq t_j \leq 1$

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle (\text{grad } f)_{\vec{x}_0}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle &= \sum_{k=1}^n (f(\vec{x}_k) - f(\vec{x}_{k-1})) - \sum_{k=1}^n f_{x_k}(\vec{x}_0) v_k \\ &= \sum_{k=1}^n v_k f_{x_k}(\vec{x}_{k-1} + t_k v_k \vec{e}_k) - \sum_{k=1}^n f_{x_k}(\vec{x}_0) v_k \\ &= \sum_{k=1}^n (f_{x_k}(\vec{x}_{k-1} + t_k v_k \vec{e}_k) - f_{x_k}(\vec{x}_0)) v_k. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der partiellen Funktionen in $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ und $\lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} |v_k|/||\vec{v}|| = 0$, da $|v_k| \leq ||\vec{v}||$ folgt die Differenzierbarkeit von f in $\vec{x}_0$. $\square$

BEISPIEL 15. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + \sin(x + 2y)$, aus Beispiel 14 ist differenzierbar, da f_x und f_y überall stetig sind.

3.3. Richtungsableitung.

LEMMA 3 (Richtungsableitung). *Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar und $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ein normierter Vektor, d.h. $||\vec{a}|| = 1$. Dann gilt $\langle (\text{grad } f)_{\vec{x}_0}, \vec{a} \rangle = h'(0)$ für die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{a})$.*

BEWEIS. Der Beweis ähnelt dem Beweis des Satzes 3. In der Definition der Differenzierbarkeit setzen wir $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$ und erhalten, wegen $||\vec{a}|| = 1$,

$$\frac{r(t)}{t||\vec{a}||} = \frac{1}{t} (f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle (\text{grad } f)_{\vec{x}_0}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle) = \frac{h(t) - h(0)}{t} - \langle \text{grad } f_{\vec{x}_0}, \vec{a} \rangle.$$

Für $t \rightarrow 0$ und erhalten $h'(0) = \langle \text{grad } f_{\vec{x}_0}, \vec{a} \rangle$, da $\lim_{t \rightarrow 0} r(t)/|t| = 0$. $\square$

DEFINITION 5. *Es seien $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $||\vec{a}|| = 1$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\vec{x}_0$ ein Punkt. Falls die partielle Funktion $t \mapsto f(\vec{x}_0 + t\vec{a})$ in $t = 0$ differenzierbar ist, so nennt man*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{a}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

die **Richtungsableitung** von f in Richtung $\vec{a}$ im Punkt $\vec{x}_0$.

SATZ 5 (Geometrische Deutung des Gradienten). *Der Gradient einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $\vec{x}$ zeigt in die Richtung des größten Anstiegs und steht senkrecht auf der Höhenlinie durch $\vec{x}$.*

BEWEIS. Für jeden Richtungsvektor $\vec{a}$ (mit $||\vec{a}|| = 1$) gilt für den Winkel α zwischen $(\text{grad } f)_{\vec{x}}$ und $\vec{a}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}) = \langle (\text{grad } f)_{\vec{x}}, \vec{a} \rangle = ||(\text{grad } f)_{\vec{x}}|| ||\vec{a}|| \cos \alpha \leq ||(\text{grad } f)_{\vec{x}}||,$$

wobei das Maximum genau für $\alpha = 0$ angenommen wird.

Wenn $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $c(0) = \vec{x}$ und $(f \circ c)(t) = f(c(t)) = f(\vec{x})$ für alle t , dann gilt

$$0 = (f \circ c)'(0) = \sum_{j=1}^n f_{x_j}(c(0)) c'_j(0) = \langle (\text{grad } f)_{\vec{x}}, c'(0) \rangle.$$

$\square$

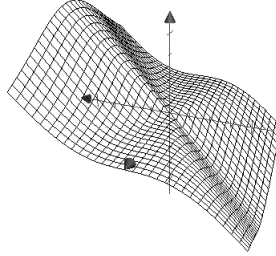


ABBILDUNG 4. Graph von $f(x, y) = x^3 / (x^2 + y^2)$

3.4. Beispiele.

BEISPIEL 16 (partielle Differenzierbarkeit ohne Stetigkeit). Wir betrachten die Funktion $f; \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } (x, y)^T \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y)^T = (0, 0) \end{cases}.$$

Aus Beispiel 13 wissen wir, dass f partiell stetig aber unstetig in $\vec{0}$ ist. Die Funktion f ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ differenzierbar, da dort die partiellen Ableitungen existieren und als Quotienten von Polynomen mit Nennern ohne Nullstellen auch stetig sind. Wir berechnen die partiellen Ableitungen in $\vec{0}$ existieren und $f_x(\vec{0}) = f_y(\vec{0}) = 0$, da $f(0, y) = f(x, 0) = 0$.

BEISPIEL 17 (partielle Differenzierbarkeit ohne totale Differenzierbarkeit). Wir betrachten die Funktion $f; \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } (x, y)^T \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y)^T = (0, 0) \end{cases}$$

und untersuchen f auf Differenzierbarkeit. Es gilt $f_x(\vec{0}) = 1$ und $f_y(\vec{0}) = 0$, da $f(x, 0) = x$ und $f(0, y) = 0$. Für $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt

$$f_x(\vec{x}) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(\vec{x}) = -\frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Die partiellen Ableitungen sind in $\vec{0}$ nicht stetig. Die Funktion f ist auch nicht differenzierbar in $\vec{0}$, denn

$$f(\vec{x}) - f(\vec{0}) - \langle (\text{grad } f)_{\vec{0}}, \vec{x} \rangle = \frac{x^3}{x^2 + y^2} - x = -\frac{xy^2}{x^2 + y^2} = r(x, y)$$

und $r(x, x)/\sqrt{2x^2} = -1/\sqrt{2}$, also $\lim_{x \rightarrow 0} r(x, x)/\|(x, x)^T\| \neq 0$.

Abbildung 4 zeigt den Graphen der Funktion f . Man erkennt, dass in $\vec{0}$ keine Tangentialebene existiert.

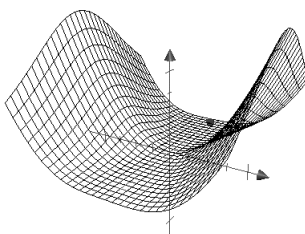


ABBILDUNG 5. Graph von $f(x, y) = x^4 / (x^2 + y^2)$

BEISPIEL 18 (partielle Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit). Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } (x, y)^T \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y)^T = (0, 0) \end{cases}$$

und untersuchen f auf Differenzierbarkeit. Es gilt $f_x(\vec{0}) = 0$ und $f_y(\vec{0}) = 0$, da $f(x, 0) = x^2$ und $f(0, y) = 0$. Für $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt

$$f_x(\vec{x}) = \frac{4x^3(x^2 + y^2) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(\vec{x}) = -\frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Die partiellen Ableitungen sind in $\vec{0}$ stetig, denn

$$|f_x(\vec{x})| = |x| \frac{2x^2(x^2 + 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|x|, \quad |f_y(\vec{x})| = |y| \frac{2x^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|y|.$$

Also sind die partiellen Ableitungen in einer Umgebung von $\vec{0}$ stetig und die Funktion f ist differenzierbar in $\vec{0}$. Man kann dies auch an der Definition direkt überprüfen

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{0}) - \langle \text{grad } f|_{\vec{0}}, \vec{x} \rangle| = \frac{x^4}{x^2 + y^2} \leq \|\vec{x}\|^2,$$

also $|r(\vec{x})|/\|\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\|$. Abbildung 5 zeigt den Graphen der Funktion f .

3.5. Ableitung von parameterabhängigen Integralen. Wir betrachten eine Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die durch bestimmte Integration einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \supset [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ nach der zweiten Variablen gegeben ist, $F(x) := \int_c^d f(x, y) dy$.

SATZ 6. Wenn f stetig auf dem Intervall $I = [a, b] \times [c, d]$ ist, so ist auch F stetig auf $[a, b]$. Wenn zusätzlich die partielle Ableitung f_x auf I existiert und stetig ist, so ist auch F auf $[a, b]$ differenzierbar und

$$F'(x) = \int_c^d f_x(x, y) dy.$$

BEWEIS. Wenn f auf I stetig ist, so ist f auf I gleichmäßig stetig, da I ein kompaktes Intervall ist. Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x+h, y) - f(x, y)| < \varepsilon$ für alle $|h| < \delta$ und alle $(x, y) \in I$. Nun folgt für $|h| < \delta$

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_c^d f(x+h, y) - f(x, y) dy \right| \leq \int_c^d |f(x+h, y) - f(x, y)| dy \\ &\leq \max_{y \in [c, d]} |f(x+h, y) - f(x, y)| (d-c) < \varepsilon (d-c) \end{aligned}$$

und damit die Stetigkeit von F .

Wenn f_x auf I existiert und stetig ist, wenden wir den Mittelwertsatz an und erhalten

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_c^d \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy = \int_c^d f_x(x+th, y) dy$$

für ein $t \in [0, 1]$. Aus der Stetigkeit der partiellen Ableitung folgt

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_c^d f_x(x, y) dy.$$

□

Nun betrachten wir eine Funktion $f : I = [a, b] \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und die Funktion $F(x) := \int_c^\infty f(x, y) dy$, die durch ein uneigentliches Integral definiert wird.

FOLGERUNG 3. Wenn f stetig auf I und das Integral $\int_c^\infty f(x, y) dy$ gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert, dann gilt für jedes $x_0 \in [a, b]$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \int_c^\infty f(x_0, y) dy.$$

Wenn zusätzlich f_x in I existiert und stetig ist und wenn

$$\int_c^\infty f_x(x, y) dy = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_c^d f_x(x, y) dy$$

gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert, dann gilt $F'(x) = \int_c^\infty f_x(x, y) dy$.

BEISPIEL 19 (Integraldarstellung der Ableitung). Wir betrachten die stetig differenzierbare Funktion $f(x, y) = \sin(x - y)$ und $F(x) = \int_0^1 \sin(x - y) dy$. Also gilt $F'(x) = \int_0^1 \cos(x - y) dy$. Ohne den Satz müssten wir

$$F(x) = \int_0^1 \sin(x - y) dy = [\cos(x - y)]_0^1 = \cos(x - 1) - \cos(x),$$

$F'(x) = -\sin(x - 1) - \sin x$ berechnen.

BEISPIEL 20 (Ableitung eines uneigentlichen Integrals, geschlossener Ausdruck für das Integral). Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = e^{-y^2} \cos(xy)$ auf $[a, b] \times [0, \infty)$ und die Funktion $F(x) = \int_0^\infty f(x, y) dy$.

Da $|f(x, y)| \leq e^{-y^2}$ für alle x und das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-y^2} dy$ existiert, konvergiert auch $F(x)$ gleichmäßig. Weiterhin ist $f_x(x, y) = -ye^{-y^2} \sin(xy)$

stetig, $|f_x(x, y)| \leq ye^{-y^2}$ für alle x und alle $y \in [0, \infty)$ und $\int_0^\infty ye^{-y^2} dy = [-e^{-y^2}/2]_0^\infty = 1/2$ existiert. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^\infty -ye^{-y^2} \sin(xy) dy \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{-y^2} \sin(xy) \right]_0^\infty - \frac{1}{2} \int_0^\infty xe^{-y^2} \cos(xy) dy \\ F'(x) &= -\frac{x}{2} F(x) \\ \frac{F'(x)}{F(x)} &= -\frac{x}{2} \\ \int \frac{F'(x)}{F(x)} dx &= -\int \frac{x}{2} dx \\ \ln |F(x)| &= -\frac{x^2}{4} + c_1 \\ F(x) &= e^{-x^2/4} c. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Konstante c als $c = F(0) = \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}/2$. Also gilt

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}.$$

4. Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$. Ist f in D partiell differenzierbar, so sind die partiellen Ableitungen $f_{x_1}, \dots, f_{x_n} : D \rightarrow \mathbb{R}$ wieder auf D definierte Funktionen. Sind diese Funktionen f_{x_j} wieder in D partiell differenzierbar, so können wir die partiellen Ableitungen $(f_{x_j})_{x_k}$ bilden, die wir auch mit $f_{x_j x_k}$ bezeichnen.

DEFINITION 6. Es sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, D eine offene Menge und $\vec{x}_0 \in D$. Existiert für Indizes $i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, n\}$ der Grenzwert

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_l}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{l-1}}} \left(\dots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f \right) \right) (\vec{x}_0),$$

so heißt er **l -te partielle Ableitung von f in $\vec{x}_0$ nach $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$** . Sie wird auch mit

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_l}}(\vec{x}_0), \text{ bzw. } \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}}(\vec{x}_0)$$

bezeichnet.

Existieren für f in D alle partiellen Ableitungen l -ter Ordnung und sind diese stetig in D , so heißt f **l -mal stetig partiell differenzierbar**. Die Menge aller l -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf D wird mit $C^l(D)$ bezeichnet.

BEISPIEL 21 (Polynome). Wir betrachten $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = 3xyz - 2x^2 + y$. Es gilt $f_x = 3yz - 4x$, $f_y = 3xz + 1$, $f_z = 3xy$, $f_{xy} = f_{yx} = 3z$, $f_{xz} = f_{zx} = 3y$, $f_{yz} = f_{zy} = 3x$, $f_{xx} = -4$, $f_{yy} = 0$. Alle andere partiellen Ableitungen, insbesondere die partiellen Ableitungen der Ordnung > 3 verschwinden. Es gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, d.h. f ist unendlich oft stetig partiell differenzierbar und die Reihenfolge der partiellen Ableitungen spielt keine Rolle.

SATZ 7 (Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen). Wenn $f \in \mathcal{C}^l(D)$ und $k \leq l$, dann ist jede k -te partielle Ableitung unabhängig von der Reihenfolge, d.h.

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}} = f_{x_{i_{\sigma(1)}} \dots x_{i_{\sigma(k)}}}$$

für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_k$.

BEWEIS. Die Aussage folgt mit vollständiger Induktion aus $f_{xy} = f_{yx}$ für $f \in \mathcal{C}^2(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$. Wir beweisen $f_{xy}(\vec{x}_0) = f_{yx}(\vec{x}_0)$ für alle $\vec{x}_0 \in D$ durch Anwendung des Mittelwertsatzes. Es gilt für $\vec{x} = \vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) &= f(\vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) - f(\vec{x}_0 + a_2 \vec{e}_2) + f(\vec{x}_0 + a_2 \vec{e}_2) - f(\vec{x}_0) \\ &= a_1 f_x(\vec{x}_0 + \delta_1 a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) + a_2 f_y(\vec{x}_0 + \xi_2 a_2 \vec{e}_2) \\ &= a_1 f_x(\vec{x}_0 + \delta_1 a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) - a_1 f_x(\vec{x}_0 + \delta_1 a_1 \vec{e}_1) \\ &\quad + a_1 f_x(\vec{x}_0 + \delta_1 a_1 \vec{e}_1) + a_2 f_y(\vec{x}_0 + \xi_2 a_2 \vec{e}_2) \\ &= a_2 a_1 f_{xy}(\vec{x}_0 + \delta_1 a_1 \vec{e}_1 + \delta_2 a_2 \vec{e}_2) \\ &\quad + a_1 f_x(\vec{x}_0 + \delta_1 a_1 \vec{e}_1) + a_2 f_y(\vec{x}_0 + \xi_2 a_2 \vec{e}_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) &= f(\vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) - f(\vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1) + f(\vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1) - f(\vec{x}_0) \\ &= a_2 f_y(\vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1 + \delta'_2 a_2 \vec{e}_2) + a_1 f_x(\vec{x}_0 + \xi_1 a_1 \vec{e}_1) \\ &= a_2 f_y(\vec{x}_0 + a_1 \vec{e}_1 + \delta'_2 a_2 \vec{e}_2) - a_2 f_y(\vec{x}_0 + \delta'_2 a_2 \vec{e}_2) \\ &\quad + a_2 f_y(\vec{x}_0 + \delta'_2 a_2 \vec{e}_2) + a_1 f_x(\vec{x}_0 + \xi_1 a_1 \vec{e}_1) \\ &= a_1 a_2 f_{yx}(\vec{x}_0 + \delta'_1 a_1 \vec{e}_1 + \delta'_2 a_2 \vec{e}_2) \\ &\quad + a_2 f_y(\vec{x}_0 + \delta'_2 a_2 \vec{e}_2) + a_1 f_x(\vec{x}_0 + \xi_1 a_1 \vec{e}_1) \end{aligned}$$

für $\delta_1, \delta_2, \delta'_1, \delta'_2, \xi_1, \xi_2 \in [0, 1]$. Für $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ erhalten wir, $f_{xy}(\vec{x}_0) = f_{yx}(\vec{x}_0)$, da f , f_x und f_y stetig sind. $\square$

BEISPIEL 22 (Keine Vertauschbarkeit partieller Ableitungen). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Es gilt $f_x(\vec{0}) = f_y(\vec{0}) = 0$, da $f(x, 0) = f(0, y) = 0$. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ berechnen wir

$$f_x(x, y) = \frac{y(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 2x^2 y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$f_x(x, y) = -\frac{y^4 x + 4y^2 x^3 - x^5}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Dann gilt $f_{xy}(\vec{0}) = -1$, da $f_x(0, y) = -y$, und $f_{yx}(\vec{0}) = 1$, da $f_y(x, 0) = x$.

Für die l -te partielle Ableitung $f_{x_i \dots x_i}$ schreibt man auch

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_i^l}.$$

5. Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ und Kettenregel

Es sei $\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

und $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, m$. Die Funktion f_i heißt i -te Koordinatenfunktion von $\vec{f}$. Man schreibt auch $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$. Man nennt $\vec{f}$ vektorwertige Funktion oder Abbildung, um zu unterstreichen, dass die Bilder keine reellen Zahlen sind ($m > 1$).

DEFINITION 7. Eine Funktion $\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **stetig** in $\vec{x}_0 \in D$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$ für alle $\vec{x}$ mit $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$. Die Funktion $\vec{f}$ heißt **stetig**, falls $\vec{f}$ in allen Punkten $\vec{x}$ des Definitionsbereiches D stetig ist.

Eine Funktion $\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar** in einem inneren Punkt $\vec{x}_0 \in D$, falls es eine (m, n) -Matrix A gibt, so dass

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0}.$$

Die Funktion $\vec{f}$ heißt **differenzierbar** in D , falls $\vec{f}$ in allen Punkten $\vec{x} \in D$ differenzierbar ist.

BEMERKUNG 1. Die Abbildung $\vec{x} \mapsto A(\vec{x} - \vec{x}_0)$ ist eine lineare vektorwertige Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, die in $\vec{x}_0$ den Wert $\vec{f}(\vec{x}_0)$ hat. Differenzierbarkeit bedeutet also wieder, dass lokal die Approximation durch eine lineare Funktion gut ist und der Fehler $\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0)$ für $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ schneller gegen $\vec{0}$ konvergiert, als der Abstand der Argumente $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$.

5.1. Reduktion auf Komponentenfunktionen.

SATZ 8. Es sei $\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$ und $\vec{x}_0 \in D$.

Die Funktion $\vec{f}$ ist genau dann stetig in $\vec{x}_0$, wenn alle Koordinatenfunktionen f_i in $\vec{x}_0$ stetig sind.

Die Funktion $\vec{f}$ ist genau dann differenzierbar in $\vec{x}_0$, wenn alle Koordinatenfunktionen f_i in $\vec{x}_0$ differenzierbar sind. Es gilt dann

$$A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} \text{ mit } a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0).$$

BEWEIS. Eine Folge in $\mathbb{R}^m$ ist genau dann konvergent, wenn alle ihre Komponentenfolgen konvergent sind. $\square$

5.2. Ableitungsmatrix.

DEFINITION 8. Es sei $\vec{f}: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$ und $\vec{x}_0 \in D$. Sind die Koordinatenfunktionen f_i in $\vec{x}_0$ partiell differenzierbar, so nennt man die

Matrix

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \right)_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Jacobimatrix oder **Funktionalmatrix** von $\vec{f}$ an der Stelle $\vec{x}_0$. Falls $n = m$, so nennt man die *Determinante*

$$\det \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) \right)$$

die **Jacobi-Determinante** oder **Funktionaldeterminante** von $\vec{f}$ im Punkt $\vec{x}_0$.

BEMERKUNG 2. Ist $m = 1$, so gilt $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = (\text{grad } f)^T$.

BEISPIEL 23. Wir betrachten die Funktion $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ e^y \end{pmatrix},$$

also $f_1(x, y) = x^2$, $f_2(x, y) = 2xy$ und $f_3(x, y) = e^y$. Es gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial (x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2x \\ 0 & e^y \end{pmatrix}.$$

BEISPIEL 24 (Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$). Wir betrachten die Abbildung $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{f}(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial (r, \phi)} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \det \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial (r, \phi)} \right) = r.$$

Die Funktionaldeterminante verschwindet auf $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}$ nicht.

BEISPIEL 25 (Kugelkoordinaten). Wir betrachten die Abbildung

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \psi \\ r \sin \phi \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial (r, \phi, \psi)} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi & -r \sin \phi \cos \psi & -r \cos \phi \sin \psi \\ \sin \phi \cos \psi & r \cos \phi \cos \psi & -r \sin \phi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix},$$

$$\det \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial (r, \phi, \psi)} \right) = r^2 \sin^2 \psi \cos \psi + r^2 \cos^3 \psi = r^2 \cos \psi.$$

Die Funktionaldeterminante verschwindet auf $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ nicht.

BEISPIEL 26 (Zylinderkoordinaten). Wir betrachten die Abbildung

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial(r, \phi, z)} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial(r, \phi, z)} \right) = r.$$

Die Funktionaldeterminante verschwindet auf $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^2$ nicht.

5.3. Kettenregel. Die Ableitung der Verknüpfung differenzierbarer Funktionen läßt sich mit der Kettenregel berechnen. Wenn klar ist, welche Koordinaten im Definitionsbereich benutzt werden, so schreibt man auch kurz $D\vec{f}_{\vec{x}_0}$ für die Ableitung der Funktion $\vec{f}$ im Punkt $\vec{x}_0$.

SATZ 9 (Kettenregel). Es seien $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\vec{g}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Wenn $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ und $\vec{g}$ in $\vec{f}(\vec{x}_0)$ differenzierbar ist, dann ist die Funktion $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar und

$$D\vec{h}_{\vec{x}_0} = D\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)} D\vec{f}_{\vec{x}_0}.$$

BEMERKUNG 3. Die Kettenregel besagt, dass die Ableitung der Verknüpfung $\vec{g} \circ \vec{f}$ das Matrixprodukt der Ableitungen der Funktionen $\vec{g}$ und $\vec{f}$ ist. Hier ist die Reihenfolge der Faktoren entscheidend, da $D\vec{g}$ eine (k, m) -Matrix und $D\vec{f}$ eine (m, n) -Matrix ist. Weiterhin muß man beachten, dass $D\vec{g}$ im Punkt $\vec{f}(\vec{x}_0)$ ausgewertet wird.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Kettenregel auszudrücken. Zum Beispiel

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) = AB \text{ mit } A = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{f}(\vec{x}_0)), B = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0),$$

wobei $\vec{y}$ die Koordinaten in $\mathbb{R}^m$ sind, oder noch suggestiver als „Kürzungsregel“

$$\frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{y}}(\vec{y}_0) \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0)$$

mit $\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0)$. Dabei sieht man $\vec{z}$ als Größe, die von den Parametern $\vec{y}$ abhängt, $\vec{z} = \vec{g}(\vec{y})$, wobei $\vec{y}$ wieder von den Variablen $\vec{x}$ abhängig ist, $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$. Die Kettenregel beschreibt, wie sich die Ableitung ändert, wenn man die Menge der Variablen wechselt.

BEWEIS. Da $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar ist und $\vec{g}$ in $\vec{f}(\vec{x}_0)$ differenzierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} \vec{h}(\vec{x}) - \vec{h}(\vec{x}_0) &= \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)) = D\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)}(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)) + \vec{r}_2(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)) \\ &= D\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)}(D\vec{f}_{\vec{x}_0}(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{r}_1(\vec{x} - \vec{x}_0)) + \vec{r}_2(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)) \\ &= D\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)}D\vec{f}_{\vec{x}_0}(\vec{x} - \vec{x}_0) + D\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)}\vec{r}_1(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{r}_2(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)) \end{aligned}$$

mit Funktionen $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, die die Eigenschaft

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{r}_1(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0}, \quad \lim_{\vec{f}(\vec{x}) \rightarrow \vec{f}(\vec{x}_0)} \frac{\vec{r}_2(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0))}{\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\|} = \vec{0}$$

haben. Da $\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) = D\vec{f}_{\vec{x}_0}(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{r}_1(\vec{x} - \vec{x}_0)$ erhalten wir auch

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{r}_2(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0))}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{r}_2(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)) \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\|}{\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\| \|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0}.$$

□

BEMERKUNG 4. Wenn $n = k = 1$, dann $D\vec{h}_{\vec{x}_0} = (\text{grad } g)_{\vec{f}(\vec{x}_0)}^T D\vec{f}_{\vec{x}_0}$. Für eine differenzierbare Kurve $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt deshalb

$$D(f \circ \vec{c})_{\vec{x}_0} = \langle (\text{grad } f)_{\vec{c}(\vec{x}_0)}, D\vec{c}_{\vec{x}_0} \rangle = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{c}(\vec{x}_0)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{c}(\vec{x}_0)) \right) \begin{pmatrix} c'_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ c'_n(\vec{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $D\vec{c}_{\vec{x}_0}$ heißt **Tangentialvektor** an die Kurve $\vec{c}$ im Punkt $\vec{c}(\vec{x}_0)$. Wir sehen, dass der Tangentialvektor $D\vec{c}_{\vec{x}_0}$ senkrecht auf dem Gradienten $(\text{grad } f)_{\vec{c}(\vec{x}_0)}$ steht, falls $f \circ \vec{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konstante Funktion ist, die Spur der Kurve $\vec{c}$ also eine Höhenlinie beschreibt.

FOLGERUNG 4. Wenn $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \vec{f}(x_1, \dots, x_n)$, und $\vec{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, $(y_1, \dots, y_m) \mapsto \vec{g}(y_1, \dots, y_m)$ und $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$, dann gilt für $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \sum_{l=1}^m \frac{\partial \vec{g}}{\partial y_l}(\vec{f}(\vec{x}_0)) \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(\vec{x}_0).$$

BEISPIEL 27. Wir betrachten die Funktion $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{g}(x, y) = (x^2, xy, y^2)^T$ und die Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\vec{f}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T$ (Polarkoordinaten). Es gilt $\vec{h}(r, \phi) = \vec{g}(\vec{f}(r, \phi)) = (r^2 \cos^2 \phi, r^2 \cos \phi \sin \phi, r^2 \sin^2 \phi)^T$. Nun berechnen wir $D\vec{h}$ einmal direkt und einmal mit Hilfe der Kettenregel. Es gilt

$$D\vec{h} = \frac{\partial \vec{h}}{\partial(r, \phi)} = \begin{pmatrix} 2r \cos^2 \phi & -2r^2 \cos \phi \sin \phi \\ 2r \sin \phi \cos \phi & 2r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ 2r \sin^2 \phi & 2r^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} D\vec{g}D\vec{f} &= \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x \cos \phi & -2xr \sin \phi \\ y \cos \phi + x \sin \phi & -ry \sin \phi + rx \cos \phi \\ 2y \sin \phi & 2yr \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2r \cos^2 \phi & -2r^2 \cos \phi \sin \phi \\ 2r \sin \phi \cos \phi & 2r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ 2r \sin^2 \phi & 2r^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $x = r \cos \phi$ und $y = r \sin \phi$.

5.3.1. Laplaceoperator in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten.

BEISPIEL 28 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten). Für $g \in \mathcal{C}^2(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$ drücken wir $g_{xx} + g_{yy}$ in Polarkoordinaten $(x, y) = \vec{f}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ aus. Für $\vec{h} = g \circ \vec{f}$ gilt

$$\begin{aligned} (h_r, h_\phi) &= (g_x, g_y) D\vec{f} = (g_x, g_y) \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= (g_x \cos \phi + g_y \sin \phi, -rg_x \sin \phi + rg_y \cos \phi) \\ h_{rr} &= (g_x \cos \phi + g_y \sin \phi)_r = \cos \phi \frac{\partial g_x}{\partial r} + \sin \phi \frac{\partial g_y}{\partial r} \\ &= \cos \phi (g_{xx} \cos \phi + g_{xy} \sin \phi) + \sin \phi (g_{yx} \cos \phi + g_{yy} \sin \phi) \\ &= g_{xx} \cos^2 \phi + 2g_{xy} \sin \phi \cos \phi + g_{yy} \sin^2 \phi \\ h_{\phi\phi} &= -rg_x \cos \phi - rg_y \sin \phi - r \sin \phi \frac{\partial g_x}{\partial \phi} + r \cos \phi \frac{\partial g_y}{\partial \phi} \\ &= -r(g_x \cos \phi + g_y \sin \phi) \\ &\quad - r \sin \phi (-rg_{xx} \sin \phi + rg_{xy} \cos \phi) + r \cos \phi (-rg_{yx} \sin \phi + rg_{yy} \cos \phi) \\ &= -r(g_x \cos \phi + g_y \sin \phi) + r^2 g_{xx} \sin^2 \phi - 2r^2 g_{xy} \sin \phi \cos \phi + r^2 g_{yy} \cos^2 \phi, \end{aligned}$$

da $g_{xy} = g_{yx}$ und wir überprüfen

$$\begin{aligned} h_{rr} + \frac{1}{r} h_r + \frac{1}{r^2} h_{\phi\phi} &= g_{xx} \cos^2 \phi + 2g_{xy} \sin \phi \cos \phi + g_{yy} \sin^2 \phi \\ &\quad + \frac{1}{r} (g_x \cos \phi + g_y \sin \phi) \\ &\quad - \frac{g_x \cos \phi + g_y \sin \phi}{r} + g_{xx} \sin^2 \phi - 2g_{xy} \sin \phi \cos \phi + g_{yy} \cos^2 \phi \\ &= g_{xx} + g_{yy}, \end{aligned}$$

da $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$.

BEISPIEL 29 (Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten). Für $g \in \mathcal{C}^2(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^3$ drücken wir $g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}$ in Zylinderkoordinaten $\vec{f}(r, \phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$ aus. Das Resultat folgt sofort aus dem Laplaceoperator in Polarkoordinaten, da

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$h_{rr} + \frac{1}{r} h_r + \frac{1}{r^2} h_{\phi\phi} + h_{zz} = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}.$$

BEISPIEL 30 (Laplace-Operator in Kugelkoordinaten). Für $g \in \mathcal{C}^2(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^3$ drücken wir $g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}$ in Kugelkoordinaten

$$\vec{f}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \psi \\ r \sin \phi \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}$$

aus. Wir könnten versuchen, zur Berechnung die Funktionalmatrix von $\vec{f}$, die in Beispiel 25 bestimmt wurde, zu benutzen. Es ist aber bequemer, die Kugelkoordinaten

als Verknüpfung von Polarkoordinaten in der (x, z) -Ebene mit Zylinderkoordinaten zu schreiben. Also

$$\vec{f} = \vec{\Phi} \circ \vec{\Psi}, \text{ mit } \vec{\Psi}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \psi \\ \phi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}, \quad \vec{\Phi}(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix}.$$

Der Laplace-Operator von $g \circ \vec{\Phi}$ in (ρ, ϕ, z) -Koordinaten ist

$$(g \circ \vec{\Phi})_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}(g \circ \vec{\Phi})_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}(g \circ \vec{\Phi})_{\phi\phi} + (g \circ \vec{\Phi})_{zz}.$$

Da sich die Koordinate ϕ unter der Abbildung $\vec{\Psi}$ nicht ändert, gilt $(g \circ \vec{\Phi})_{\phi\phi} = (g \circ \vec{\Phi} \circ \vec{\Psi})_{\phi\phi}$. Nun schreiben wir den Laplace-Operator von $g \circ \vec{\Phi}$ bezüglich (ρ, z) -Koordinaten in Polarkoordinaten, die durch $\vec{\Psi}$ gegeben sind, also mit $h = g \circ \vec{\Phi} \circ \vec{\Psi}$

$$(g \circ \vec{\Phi})_{\rho\rho} + (g \circ \vec{\Phi})_{zz} = h_{rr} + \frac{1}{r}h_r + \frac{1}{r^2}h_{\psi\psi}.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}h_r - \frac{\tan \psi}{r^2}h_{\psi} &= \frac{1}{r}((g \circ \vec{\Phi})_{\rho} \cos \psi + (g \circ \vec{\Phi})_z \sin \psi) \\ &\quad - \frac{\tan \psi}{r^2}(-r(g \circ \vec{\Phi})_{\rho}) \sin \psi + r(g \circ \vec{\Phi})_z \cos \psi \\ &= \frac{1}{r}(g \circ \vec{\Phi})_{\rho} \cos \psi + \frac{\tan \psi}{r^2}r(g \circ \vec{\Phi})_{\rho} \sin \psi \\ &= \frac{\cos \psi}{\rho}(g \circ \vec{\Phi})_{\rho} \cos \psi + \frac{\cos \psi \tan \psi}{\rho}(g \circ \vec{\Phi})_{\rho} \sin \psi \\ &= \frac{1}{\rho}(g \circ \vec{\Phi})_{\rho}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} = h_{rr} + \frac{2}{r}h_r + \frac{1}{r^2}h_{\psi\psi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi}h_{\phi\phi} - \frac{\tan \psi}{r^2}h_{\psi}.$$

5.3.2. Parameterabhängige Integrale.

FOLGERUNG 5 (Integrale mit parameterabhängigen Integrationsgrenzen und Integranden). *Seien $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\phi(x) < \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und $f \in C^1(D)$ mit $D = \{(x, y)^T : x \in [a, b], \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Dann ist die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

auf $[a, b]$ differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y) dy + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \phi(x))\phi'(x).$$

BEWEIS. Wir benutzen die Substitution $y = \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x))$, das bedeutet $dy = (\psi(x) - \phi(x)) dt$, und erhalten

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_0^1 f(x, \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x))(\psi(x) - \phi(x)) dt \\ &= (\psi(x) - \phi(x)) \int_0^1 f(x, \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x)) dt \\ &= (\psi(x) - \phi(x)) \int_0^1 g(x, t) dt \end{aligned}$$

mit $g(x, t) = f(x, \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x)))$. Da jetzt die Integrationsgrenzen nicht mehr von x abhängen und $g(x, t)$ stetig diffenzierbar ist, gilt mit der Funktion $y(x, t) = \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x))$

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\psi'(x) - \phi'(x)) \int_0^1 g(x, t) dt + (\psi(x) - \phi(x)) \int_0^1 g_x(x, t) dt \\ &= (\psi'(x) - \phi'(x)) \int_0^1 g(x, t) dt \\ &\quad + (\psi(x) - \phi(x)) \int_0^1 f_x(x, y(x, t)) + f_y(x, y(x, t)) y_x(x, t) dt \\ &= (\psi'(x) - \phi'(x)) \int_0^1 g(x, t) dt + (\psi(x) - \phi(x)) \int_0^1 f_x(x, y(x, t)) dt \\ &\quad + (\psi(x) - \phi(x)) \int_0^1 f_y(x, y(x, t)) y_x(x, t) dt \\ &= (\psi'(x) - \phi'(x)) \int_0^1 g(x, t) dt + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y) dy + \int_0^1 g_t(x, t) y_x(x, t) dt \\ &= (\psi'(x) - \phi'(x)) \int_0^1 g(x, t) + t g_t(x, t) dt + \phi'(x) \int_0^1 g_t(x, t) dt \\ &\quad + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y) dy \\ &= (\psi'(x) - \phi'(x)) [t g(x, t)]_0^1 + \phi'(x) (g(x, 1) - g(x, 0)) + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y) dy \\ &= \psi'(x) f(x, \psi(x)) - \phi'(x) f(x, \phi(x)) + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y) dy \end{aligned}$$

da $g_t(x, t) = f_y(x, y(x, t))(\psi(x) - \phi(x))$ und $(tg)_t = g + t g_t$. $\square$

BEMERKUNG 5. Für $\phi(x) \equiv x_0$, $\psi(x) = x$ und $f(x, y) = f(y)$ erhält man die Aussage, dass die Integration $F(x) = \int_{x_0}^x f(y) dy$ eine Stammfunktion liefert, also $F'(x) = f(x)$, da $f_x = \phi' \equiv 0$ und $\psi' \equiv 1$.

6. Mittelwertsatz, Poincarésches Lemma, Taylorpolynome

In diesem Abschnitt betrachten wir wieder Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Anwendung der Resultate aus diesem Abschnitt auf die Komponentenfunktionen einer vektorwertigen Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ liefern die entsprechenden Aussagen für vektorwertige Funktionen.

Als einfache Folgerung aus dem Mittelwertsatz für Funktionen einer Variablen erhalten wir den Mittelwertsatz für Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn mit je zwei Punkten $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in D$ auch ihre Verbindungsstrecke $\{\vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) : t \in [0, 1]\}$ in D enthalten ist.

SATZ 10 (Mittelwertsatz). *Es sei $f \in \mathcal{C}^1(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Dann existiert zu $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in D$ ein $\delta \in [0, 1]$, so dass*

$$f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_0))(\vec{x}_1 - \vec{x}_0).$$

BEWEIS. Die Funktion $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(t) = f(\vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0))$ ist auf $[0, 1]$ stetig differenzierbar. Außerdem ist $h = f \circ \vec{c}$ für die Kurve $\vec{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\vec{c}(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$. Da $D\vec{c}_t = \vec{x}_1 - \vec{x}_0$ für alle $t \in [0, 1]$ erhalten wir mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} h(1) - h(0) &= h'(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_0))1 = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)) \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}(\delta) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_0))(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \end{aligned}$$

für ein $\delta \in [0, 1]$. □

BEMERKUNG 6. Der Vektor $(\partial f)/(\partial \vec{x})(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_0))$ ist ein Zeilenvektor und $\vec{x}_1 - \vec{x}_0$ ist ein Spaltenvektor. Ihr Produkt ist deshalb eine (reelle) Zahl.

Eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend**, wenn aus $D = D_1 \cup D_2$ und $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ für zwei offene Mengen D_1, D_2 folgt, dass $D_1 = \emptyset$ oder $D_2 = \emptyset$. Eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend, wenn man je zwei Punkte in D durch einen Polygonzug, also eine Aneinanderreihung von Strecken, verbinden kann, der ganz in D enthalten ist. Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Gebiet**, wenn G offen und zusammenhängend ist. Als Folgerung aus dem Mittelwertsatz können wir jetzt das Poincarésche Lemma formulieren.

FOLGERUNG 6 (0. Poincarésches Lemma). *Es seien G ein Gebiet und $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Die Funktion f ist genau dann konstant in G , wenn $(Df)_{\vec{x}} = \vec{0}$ für alle $\vec{x} \in G$.*

BEWEIS. Wir verbinden die zwei Punkte $\vec{x}$ und $\vec{x}_0$ durch einen Streckenzug, der ganz in D liegt, und wenden auf jede Strecke den Mittelwertsatz an. □

BEMERKUNG 7. Dieses Lemma wird uns später sichern, dass das Potential eines Vektorfeldes, falls es existiert, bis auf eine Konstante auf einem Gebiet eindeutig bestimmt ist.

BEISPIEL 31. Wir betrachten das Gebiet $G = \{(x, y) : x > 0 \text{ und } y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ und die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \arctan(y/x) + \arctan(x/y)$. Es gilt

$$f_x(x, y) = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{-y}{x^2} + \frac{1}{1 + (x/y)^2} \frac{1}{y} = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$$

und aus Symmetriegründen auch $f_y(x, y) = 0$. Da G ein Gebiet ist, ist f auf G konstant. Wir berechnen diese Konstante dadurch, dass wir einen Funktionswert bestimmen. Es gilt $f(1, 1) = 2 \arctan(1) = 2\pi/4 = \pi/2$. Wir haben folgendes „Additionstheorem“ bewiesen:

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Die Approximation von Funktionen einer Variablen durch Taylorpolynome lässt sich wiederum durch die Betrachtung der Verkettung $f \circ \vec{c}$ von f mit der Kurve $\vec{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{c}(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0)$, zu einer Aussage für Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ verallgemeinern. Hier benutzen wir die Notation

$$\langle \vec{h}, \text{grad} \rangle = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \langle \vec{h}, \text{grad} \rangle^k = \sum_{j_k=1}^n \cdots \sum_{j_1=1}^n h_{j_1} \cdots h_{j_k} \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}}$$

für $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

SATZ 11 (Satz von Taylor). *Es seien D eine offene konvexe Menge und $f \in \mathcal{C}^{m+1}(D)$. Für beliebige $\vec{x}, \vec{x}_0 \in D$ gilt*

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \langle \vec{x} - \vec{x}_0, \text{grad} \rangle^k f(\vec{x}_0) + R_{m, \vec{x}_0}(\vec{x}),$$

mit dem Restglied

$$R_{m, \vec{x}_0}(\vec{x}) = \frac{1}{(m+1)!} \langle \vec{x} - \vec{x}_0, \text{grad} \rangle^{m+1} f(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x} - \vec{x}_0))$$

für ein $\delta \in [0, 1]$.

BEMERKUNG 8. Für $m = 0$ ist der Satz von Taylor gerade der Mittelwertsatz.

BEMERKUNG 9. Der Satz von Taylor (und der Mittelwertsatz) können für die Fehlerrechnung benutzt werden, wenn es möglich ist, das Restglied abzuschätzen.

7. Implizite Funktionen

Manchmal ist eine Funktion f nicht nur durch eine explizite Berechnungsvorschrift wie zum Beispiel $f(x) = x^2$ gegeben, sondern implizit durch eine Gleichung.

BEISPIEL 32 (Parametrisierung einer Niveaumenge). Wir betrachten die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = y^2 + 2y + 4 - x^2$ und ihre Nullstellen Menge, also die Höhenlinie $H_0 = \{(x, y)^T : g(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Wie ein Blick auf die Abbildung 6 zeigt, ist die Menge H_0 weder der Graph einer Funktion $y(x)$ noch der Graph einer Funktion $x(y)$, da es in H_0 mindestens zwei Punkte mit gleicher x -Koordinate und mindestens zwei Punkte mit gleicher y -Koordinate gibt. Da $g(2, 0) = g(\sqrt{3}, -1) = 0$, sind die Punkte $P = (2, 0)^T$ und $Q = (\sqrt{3}, -1)^T$ in der Menge H_0 . Können wir die Menge H_0 in der Nähe dieser Punkte als Graph einer Funktion schreiben?

Durch Auflösung der Gleichung $g(x, y) = 0$ nach y erhalten wir $y = -1 \pm \sqrt{x^2 - 3}$. In der Nähe des Punktes P müssen wir $y(x) = -1 + \sqrt{x^2 - 3}$ wählen, denn $0 = -1 + \sqrt{2^2 - 3}$. Jedoch ist die Funktion $y(x)$ nur für $x \geq \sqrt{3}$ definiert und die Spur der Kurve $x \mapsto (x, y(x))$ ist nur ein Teil der Höhenlinie (in Abbildung 6 rot).

In der Nähe des Punktes Q bringt uns die Auflösung der Gleichung $g(x, y) = 0$ nach y nicht weiter, da keine Wahl des Vorzeichens eine Funktion $y(x)$ in einem offenen Intervall um $-\sqrt{3}$ definiert. Der Grund dafür ist, dass die Linearisierung von H_0 um den Punkt Q eine Parallele zur y -Achse ist, die erste Komponente des Tangentialvektors an H_0 in Q also verschwindet.

Hier kann y als Parameter benutzt werden. Umstellen der Gleichung $g(x, y) = 0$ nach x liefert $x = \pm \sqrt{y^2 + 2y + 4}$. In der Nähe des Punktes Q müssen wir

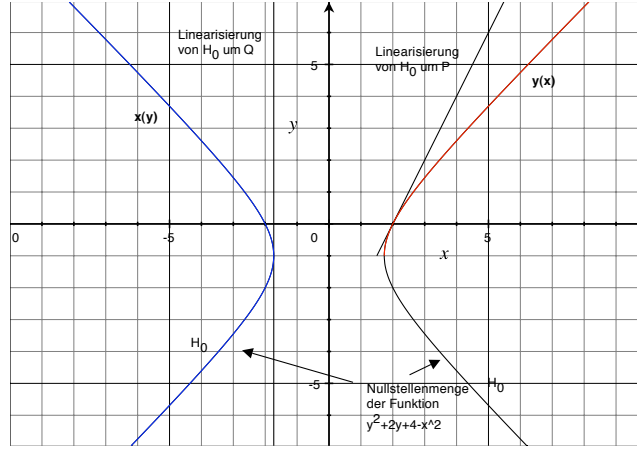


ABBILDUNG 6. Parametrisierung einer Höhenlinie

$x(y) = -\sqrt{y^2 + 2y + 4}$ wählen, denn $-\sqrt{3} = -\sqrt{(-1)^2 - 2 + 4}$. Die Kurve $y \mapsto (-\sqrt{y^2 + 2y + 4}, y)^T$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert. Ihre Spur ist ebenfalls eine Teilmenge der Höhenlinie (in Abbildung 6 blau).

Das Beispiel beschreibt einen Aspekt der allgemeinen Situation sehr gut. Eine Niveaumenge N lässt sich in der Nähe eines Punktes P als Graph einer Funktion darstellen, wenn man in der Linearisierung von N in P , dies ist ein lineares Gleichungssystem, die anderen Variablen eliminieren kann.

SATZ 12 (Satz über implizite Funktionen). *Es seien $\vec{g} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $\vec{g}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0$. Wenn $\vec{g} \in \mathcal{C}^1(U)$ für eine Umgebung U des Punktes $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ und*

$$\det \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial (y_1, \dots, y_m)}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \right) \neq 0,$$

dann gibt es eine Umgebung U_0 von $\vec{x}_0$, eine Umgebung V_0 von $\vec{y}_0$ und eine Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^n \supset U_0 \rightarrow V_0 \subset \mathbb{R}^m$, so dass $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$ und für $(\vec{x}, \vec{y}) \in U_0 \times V_0$ genau dann $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ gilt, wenn $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.

BEMERKUNG 10. Das lineare Gleichungssystem

$$D\vec{g}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}^T \begin{pmatrix} \vec{x} - \vec{x}_0 \\ \vec{y} - \vec{y}_0 \end{pmatrix} = 0$$

ist die Linearisierung des Gleichungssystems $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ um den Punkt $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)^T$. Die Bedingung des Satzes über implizite Funktionen bedeutet, dass man die (m, m) -Untermatrix aus den letzten m Spalten invertierbar ist und die letzten m Variablen $y_1, \dots, y_m$ durch die ersten n , also $x_1, \dots, x_n$, ausgedrückt werden können:

$$-\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial (y_1, \dots, y_m)}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \right)^{-1} \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \right) (\vec{x} - \vec{x}_0) = (\vec{y} - \vec{y}_0).$$

BEWEIS. Wir betrachten die Komponentenfunktionen $\vec{g} = (g_1, \dots, g_m)^T$. Durch Permutation der Variablen $y_1, \dots, y_m$ können wir immer erreichen, dass

$$\frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$$

gilt. Es gibt ein offenes Intervall U_m um $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)^T$, so dass

$$\frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0 \quad \forall (\vec{x}, \vec{y})^T \in U_m.$$

Wir definieren eine neue Variable $\eta_m = g_m(\vec{x}, \vec{y})$. Da η_m als Funktion von y_m mit Konstanten $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}$ streng monoton und stetig ist, gibt es eine Umkehrfunktion f_m mit $y_m = f_m(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}, \eta_m)$. Für alle $(\vec{x}, \vec{y})^T \in U_m$

$$g_m(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{y} = (y_1, \dots, y_{m-1}, f_m(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}, 0))^T.$$

Statt der verbleibenden $m - 1$ Gleichungen $g_1(\vec{x}, \vec{y}) = \dots = g_{m-1}(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ betrachten wir nun die Abbildung $\vec{\gamma} : \mathbb{R}^{n+m-1} \supset D \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ mit

$$\vec{\gamma}(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}, f_m(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}, 0)) \\ \vdots \\ g_{m-1}(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}, f_m(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}, 0)) \end{pmatrix}$$

und $D = \{(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}) : \exists y_m : (\vec{x}, y_1, \dots, y_m) \in U_m\}$. Da für alle $(\vec{x}, \vec{y}) \in U_m \cap \{g_m = 0\}$ und für alle $j = 1, \dots, m - 1$ gilt

$$\frac{\partial g_m}{\partial y_j}(\vec{x}, \vec{y}) = 0,$$

folgt aus der Bedingung

$$\det \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) \right) \neq 0$$

für $(\vec{x}, \vec{y})^T \in U_m$ sofort

$$\det \left(\frac{\partial \vec{\gamma}}{\partial (y_1, \dots, y_{m-1})}(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1}) \right) \neq 0$$

für alle $(\vec{x}, y_1, \dots, y_{m-1})^T \in D$. Mit vollständiger Induktion über die Anzahl m der Gleichungen folgt die Aussage des Satzes. $\square$

BEISPIEL 33. Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = y^2 + 2y + 4 - x^2$ wie in Beispiel 32. Es gilt $Dg_{(2,0)^T} = (-2x, 2y+2)_{(2,0)^T} = (-4, 2)$. Also kann man die Gleichung $g(x, y) = 0$ in der Nähe des Punktes $(2, 0)^T$ nach y auflösen. Aber es gilt $Dg_{(\sqrt{3}, -1)^T} = (-2x, 2y+2)_{(\sqrt{3}, -1)^T} = (-2\sqrt{3}, 0)$. Deshalb kann man die Gleichung $g(x, y) = 0$ in der Nähe des Punktes $(\sqrt{3}, -1)^T$ nicht nach y auflösen. Jedoch kann man sie dort nach x auflösen.

7.1. Implizites Differenzieren. Wenn $\vec{h}(\vec{x}) := \vec{g}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \equiv 0$, $\vec{g} \in \mathcal{C}^1$ und

$$\det \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \right) \neq 0,$$

so folgt aus der Kettenregel

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) + \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Insbesondere ist $\vec{f}$ partiell differenzierbar. Durch Umstellung dieser Gleichung nach der partiellen Ableitung von $\vec{f}$ erhält man

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x}) = - \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \right)^{-1} \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})).$$

Diese Formel eignet sich, um die Ableitungen von $\vec{f}$ im Punkt $\vec{x}_0$ auszurechnen, da der Funktionswert $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$ bekannt ist.

BEISPIEL 34. Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = y^2 + 2y + 4 - x^2$ wie in Beispiel 32 und den Punkt $(x_0, y_0)^T = (2, 0)^T$. Da $g_x(x, y) = -2x$ und $g_y(x, y) = 2y + 2$, folgt aus $g(x, f(x)) \equiv 0$ um $x_0 = 2$ und $f(2) = 0$, dass

$$f'(2) = -(g_y(2, 0))^{-1}(g_x(2, 0)) = -\frac{1}{2}(-4) = 2.$$

Dies ist einfacher als erst die Auflösung $y = f(x) = -1 + \sqrt{x^2 - 3}$ konkret zu bestimmen und dann diese explizit gegebene Funktion abzuleiten:

$$f'(x) = x(x^2 - 3)^{-1/2}, \quad f'(2) = 2 \frac{1}{\sqrt{4 - 3}} = 2.$$

BEISPIEL 35 (Zwei Gleichungen). Wir betrachten die Abbildung $\vec{g} : \mathbb{R}^{2+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{g}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2 y_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\vec{g}(0, x_2, 0, 0) = \vec{0}$ für alle $x_2 \in \mathbb{R}$ und

$$D\vec{g} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -y_2 & 0 & -x_2 \\ y_2 & -y_1 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad \det \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial (y_1, y_2)} \right) = -x_2^2.$$

Also ist die Gleichung $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ auf $\{x_2 \neq 0\}$ nach $\vec{y}$ auflösbar. Explizit lautet diese Auflösung $y_2 = x_1^2/x_2$ und $y_1 = x_1 y_2/x_2 = x_1^3/x_2^2$ also

$$\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3/x_2^2 \\ x_1^2/x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Ableitungsmatrix $D\vec{f}$ einmal explizit und einmal implizit:

$$\begin{aligned} D\vec{f} &= \begin{pmatrix} 3x_1^2/x_2^2 & -2x_1^3/x_2^3 \\ 2x_1/x_2 & -x_1^2/x_2^2 \end{pmatrix} \\ D\vec{f} &= - \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \right)^{-1} \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = - \begin{pmatrix} 0 & -x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x_1 & -y_2 \\ y_2 & -y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_2^2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 & -y_2 \\ y_2 & -y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_2^2} \begin{pmatrix} 2x_1^2 + x_2 y_2 & -x_1 y_2 - y_1 x_2 \\ 2x_1 x_2 & -x_2 y_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_2^2} \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -2x_1 y_2 \\ 2x_1 x_2 & -x_1^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_2^2} \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -2x_1^3/x_2 \\ 2x_1 x_2 & -x_1^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da $x_2 y_2 = x_1^2$, $y_1 x_2 = x_1 y_2$, wenn $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ und $x_2 \neq 0$.

Im Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ ist die Gleichung $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ nicht nach zwei der vier Variablen auflösbar, weil in dem Punkt keine $(2, 2)$ -Untermatrix von $D\vec{g}$ invertierbar ist.

7.2. Umkehrabbildungen. Wir betrachten eine Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und wollen wissen, ob eine **Umkehrabbildung**, also eine Abbildung $\vec{f}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\vec{f}^{-1}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, existiert. Diese Frage ist im Allgemeinen schwer zu beantworten. Zum Beispiel müsste man entscheiden können, ob die Abbildung injektiv ist und die Bildmenge $\vec{f}(\mathbb{R}^n)$ gut beschreiben können. Wenn uns die Abbildung $\vec{f}$ aber nur in der Nähe eines Punktes $\vec{x}_0$ interessiert und wir nur nach einer Umkehrabbildung in der Nähe des Bildpunktes $\vec{f}(\vec{x}_0)$ suchen, so gibt uns die Differentialrechnung ein handliches Kriterium.

SATZ 13 (Lokale Umkehrabbildung). *Es seien $\vec{f} \in \mathcal{C}^1(U)$ mit $U \supset \mathbb{R}^n$ und $\vec{x}_0 \in U$. Wenn $\det(D\vec{f}_{\vec{x}_0}) \neq 0$, dann existieren eine offene Umgebung V_0 von $\vec{f}(\vec{x}_0)$, eine offene Umgebung U_0 von $\vec{x}_0$ und eine Abbildung $\vec{h} : V_0 \rightarrow U_0$, so dass $\vec{h}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in U_0$.*

Die lokale Umkehrabbildung $\vec{h}$ ist stetig differenzierbar. Die Jacobi-Matrix der Umkehrabbildung $\vec{h}$ ist die Inverse der Jacobi-Matrix von $\vec{f}$, genauer:

$$D\vec{h}_{\vec{y}} = (D\vec{f}_{\vec{h}(\vec{y})})^{-1}.$$

BEWEIS. Wir wenden den Satz über implizite Funktionen auf die Funktion $\vec{g} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} - \vec{f}(\vec{x})$ und den Punkt $(\vec{x}_0, \vec{f}(\vec{x}_0))^T$ an. Da

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}},$$

ist die Gleichung $\vec{y} - \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ in der Nähe des Punktes $(\vec{x}_0, \vec{f}(\vec{x}_0))^T$ nach $\vec{x}$ auflösbar. Also $\vec{y} - \vec{f}(\vec{h}(\vec{y})) = \vec{0}$. Da $\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}} = \text{Id}$, die Einheitsmatrix, ist, folgt sofort

$$D\vec{h} = -\left(-\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)^{-1} \text{Id} = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)^{-1}.$$

□

BEISPIEL 36 (Polarkoordinaten). Die Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{f}(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$$

hat die Funktionaldeterminante $\det(D\vec{f}) = r$ (siehe Beispiel 24). Deshalb ist die Abbildung für $r > 0$ lokal umkehrbar. Obwohl $\vec{f}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, existiert keine Umkehrabbildung, die auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist. Ein maximales Definitionsgebiet für eine lokale Umkehrabbildung ist zum Beispiel $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$. Dort wird durch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \begin{cases} \arctan(y/x) & x > 0 \\ \text{arccot}(x/y) & y > 0 \\ -\pi + \text{arccot}(x/y) & y < 0 \end{cases}$$

eine Abbildung definiert. Es gilt $\lim_{y \rightarrow 0^+} \phi(-1, y) = \pi$ und $\lim_{y \rightarrow 0^-} \phi(-1, y) = -\pi$.

BEISPIEL 37 (Kugelkoordinaten). Die Abbildung

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \psi \\ r \sin \phi \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix},$$

hat die Funktionaldeterminante $\det(D\vec{f}) = r^2 \cos \psi$ (siehe Beispiel 25). Die Funktionaldeterminante verschwindet auf $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ nicht. Dort ist $\vec{f}$ lokal umkehrbar. Die Umkehrabbildung auf $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^2$ ist durch

$$\vec{f}^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arctan(y/x) \\ \arcsin(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \end{pmatrix}$$

gegeben.

BEMERKUNG 11. Wenn $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ eine Umkehrabbildung besitzt, so kann man statt der Koordinaten $\vec{x}$ auch die Koordinaten $\vec{y}$ benutzen und verliert keine Informationen.

8. Extrema für Funktionen mehrerer Veränderlicher

Wir wollen die Extremwerte und Extremstellen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmen. Wir benutzen die Differentialrechnung, um lokale Extremstellen zu bestimmen, die innere Punkte des Definitionsbereiches sind. Durch Vergleich der lokalen Extremwerte untereinander und mit den Funktionswerten von f in nicht inneren Punkten, z.B. Randpunkten eines abgeschlossenen Intervalls, kann man dann eventuell die globalen Extremwerte von f bestimmen. Jedoch ist die Bestimmung globaler Extremwerte ungleich komplizierter als bei Funktionen einer Veränderlicher.

8.1. Lokale Extremwerte.

DEFINITION 9. Ein Punkt $\vec{x}_0 \in D$ heißt **lokales Maximum (Minimum)** von f , wenn es eine offene Umgebung $U \subset D$ von $\vec{x}_0$ gibt, so dass $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ (bzw. $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$) für alle $\vec{x} \in U$.

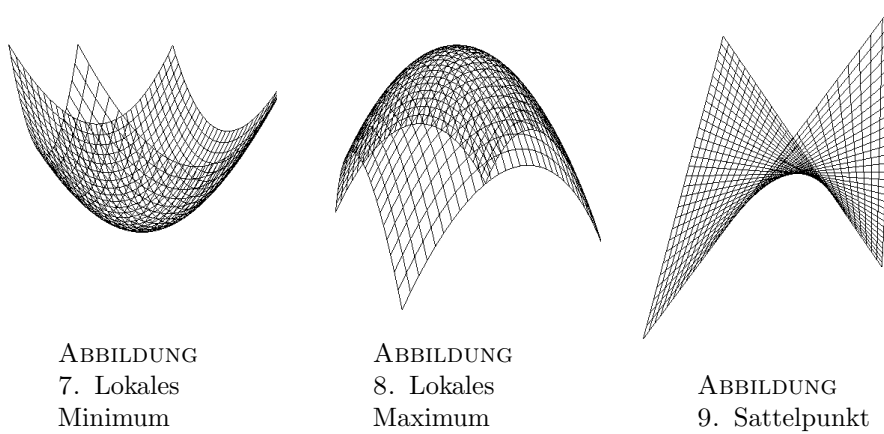
Ein Punkt $\vec{x}_0 \in D$ heißt **strenges lokales Maximum (Minimum)** von f , wenn es eine offene Umgebung $U \subset D$ von $\vec{x}_0$ gibt, so dass für alle $\vec{x} \in U$ mit $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ die echte Ungleichung $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ (bzw. $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$) gilt.

Manchmal nennt man lokale Extremstellen auch **relative** Extremstellen. Ein Punkt $\vec{x}_0 \in D$ ist genau dann ein lokales Minimum (Maximum), wenn für alle Kurven $c : \mathbb{R} \rightarrow D$ mit $c(0) = \vec{x}_0$ die Funktion $f \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $t = 0$ ein lokales Minimum (Maximum) hat. Natürlich kann man nicht alle Verknüpfungen mit Kurven testen, aber wenn f genügend oft stetig differenzierbar ist, reicht es, die partiellen Funktionen f_j mit $f_j(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_j)$ zu untersuchen.

SATZ 14 (Notwendiges Kriterium für ein lokales Extremum). Wenn $f \in \mathcal{C}^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\vec{x}_0 \in D$ lokales Extremum, dann gilt $(\text{grad } f)_{\vec{x}_0} = \vec{0}$.

BEWEIS. Da die partiellen Funktionen $f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_j)$ in $t = 0$ ein relatives Extremum haben, gilt $f_{x_j}(\vec{x}_0) = 0$ für alle j . $\square$

Wenn im Punkt $\vec{x}_0$ alle partiellen Ableitungen verschwinden, also $Df_{\vec{x}_0} = \vec{0}$, dann nennt man $\vec{x}_0$ einen **kritischen Punkt** oder einen **stationären Punkt**.



8.1.1. *Drei grundlegende Beispiele.* Wir betrachten die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2, \quad h(x, y) = xy.$$

Es gilt $Df = (2x, 2y)$, $Dg = (-2x, -2y)$ und $Dh = (y, x)$. Also ist $\vec{0}$ der einzige kritische Punkt der Funktionen.

Hier können wir leicht überprüfen, dass $\vec{0}$ ein lokales Minimum von f und ein lokales Maximum von g ist, denn $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ und $f(x, y) > 0$ und $g(x, y) < 0$, wenn $x \neq 0$ oder $y \neq 0$. (In diesem Fall ist der Punkt $\vec{0}$ sogar ein globales Extremum der Funktionen f und g .) Es gilt

$$H_f := \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_g := \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen H_f und H_g sind symmetrisch, weil f und g zweimal stetig differenzierbar sind. Die durch H_f und H_g definierten quadratischen Formen sind positiv definit bzw. negativ definit, d.h. $v^T H_f v > 0$ und $v^T H_g v < 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$.

Obwohl $\vec{0}$ ein kritischer Punkt ist, hat die Funktion h im Punkt $\vec{0}$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum, denn $h(t, t) = t^2 > 0$ für alle $t \neq 0$ und $h(t, -t) = -t^2 < 0$ für alle $t \neq 0$. Es gilt

$$H_h := \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Auch die Matrix H_h ist symmetrisch. Die durch H_h definierte quadratische Form ist jedoch indefinit, weil die Matrix H_h den positive und negative Eigenwerte hat ($\lambda = \pm 1$). Die Abbildungen 7, 8 und 9 zeigen die Graphen der Funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = -x^2 - y^2$ und $h(x, y) = xy$ in der Nähe des kritischen Punktes $(0, 0)^T$.

8.1.2. *Die Hessematrix.*

DEFINITION 10. Es seien $f \in C^2(D)$ und $\vec{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. Die (n, n) -Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$H_f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

heißt **Hesse-Matrix** der Funktion f im Punkt $\vec{x}_0$.

Wenn $f \in \mathcal{C}^2(D)$, dann ist die Hesse-Matrix H_f eine symmetrische Matrix und definiert eine quadratische Form $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch $q(v) = v^T H_f v$. Der Wert $v^T H_f(\vec{x}_0) v$ ist die zweite Ableitung der Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(t) = f(\vec{x}_0 + tv)$ in $t = 0$. Wenn $\vec{x}_0$ ein kritischer Punkt ist, so gilt $h'(0) = 0$ und mit Hilfe dieser zweiten Ableitung $h''(0) = v^T H_f(\vec{x}_0) v$ kann man (oft) entscheiden, ob h in $t = 0$ ein lokales Extremum hat. Zur Untersuchung der Funktion f muss man nun $v^T H_f(\vec{x}_0) v$ für alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ kontrollieren können.

DEFINITION 11. Eine symmetrische Matrix H (quadratische Form) heißt

- (1) **positiv definit**, wenn $v^T H v > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- (2) **negativ definit**, wenn $v^T H v < 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- (3) **positiv semidefinit**, wenn H nicht positiv definit aber $v^T H v \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$,
- (4) **negativ semidefinit**, wenn H nicht negativ definit aber $v^T H v \leq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$,
- (5) **indefinit** sonst.

Es ist nicht möglich, alle Werte $v^T H v$ zu testen. Doch dies ist auch nicht nötig. Wir können mit Hilfe der reellen Eigenwerte oder durch Berechnung von Hauptunterdeterminanten entscheiden, ob eine symmetrische Matrix H positiv oder negativ (semi-)definit ist. Zu einer symmetrischen Matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ sei $H_m = (h_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ die Untermatrix, die man durch Streichen der letzten $n - m$ Zeilen und Spalten erhält. Sie heißt **m -te Hauptuntermatrix**.

SATZ 15. Es sei H eine symmetrische Matrix.

- (1) H ist positiv definit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von H sind positiv. $\Leftrightarrow$ Für alle m gilt $\det H_m > 0$.
- (2) H ist negativ definit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von H sind negativ. $\Leftrightarrow$ Für alle m gilt $(-1)^m (\det H_m) > 0$.
- (3) H ist positiv semidefinit und nicht positiv definit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von H sind nicht negativ und mindestens ein Eigenwert ist 0. $\Rightarrow$ Für alle m gilt $\det H_m \geq 0$ und $\det H = 0$.
- (4) H ist negativ semidefinit und nicht negativ definit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von H sind nicht positiv und mindestens ein Eigenwert ist 0. $\Rightarrow$ Für alle m gilt $(-1)^m \det H_m \geq 0$ und $\det H = 0$.
- (5) H ist indefinit $\Leftrightarrow$ Die Matrix H hat positive und negative Eigenwerte

SATZ 16 (Hinreichendes Kriterium für ein lokales Extremum). Es seien $f \in \mathcal{C}^2(D)$ und $\vec{x}_0 \in D$ ein kritischer Punkt. Ist die Hesse-Matrix $H_f(\vec{x}_0)$ von f im Punkt $\vec{x}_0$

- (1) positiv definit, so hat f in $\vec{x}_0$ ein lokales Minimum.
- (2) negativ definit, so hat f in $\vec{x}_0$ ein lokales Maximum.
- (3) indefinit, so hat f in $\vec{x}_0$ kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

BEWEIS. Mit Hilfe der Taylorformel kann man $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ für $\vec{x}$ in einer kleinen Umgebung von $\vec{x}_0$ abschätzen. $\square$

BEMERKUNG 12. Ist die Hessematrix in einem kritischen Punkt nur semidefinit, so kann man ohne weitere Untersuchung der Funktion nicht entscheiden, ob sie ein lokales Extremum in diesem Punkt hat oder nicht.

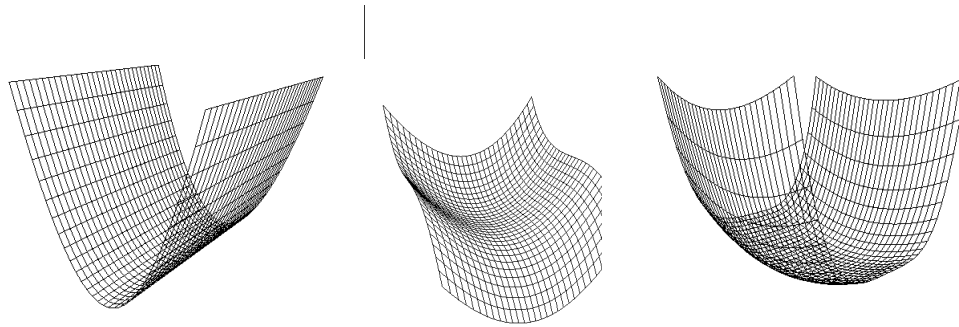


ABBILDUNG
10. Lokales
Minimum

ABBILDUNG
11. semidefiniter
Sattel

ABBILDUNG
12. Strenges
Minimum

8.1.3. Beispiele.

BEISPIEL 38 (Semidefinite Hesse-Matrix). Wir betrachten die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2$, $g(x, y) = x^2 + y^3$ und $h(x, y) = x^2 + y^4$. Es gilt $Df = (2x, 0)$, $Dg = (2x, 3y^2)$ und $Dh = (2x, 4y^3)$. Also ist $\vec{0}$ der einzige kritische Punkt der drei Funktionen f, g und h . Wir berechnen die Hesse-Matrizen:

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}, H_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Da

$$H_f(\vec{0}) = H_g(\vec{0}) = H_h(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ist die Hesse-Matrix der Funktionen f, g und h in $\vec{0}$ positiv semidefinit. Sie hat die Eigenwerte 2 und 0.

Die Funktion f hat in $\vec{0}$ ein lokales Minimum, das allerdings kein strenges lokales Maximum ist, da $f(0, y) = f(0, 0) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Die Funktion g hat im kritischen Punkt $\vec{0}$ kein Extremum sondern einen Sattelpunkt, denn $f(0, y) = y^3$ und y^3 hat in $y = 0$ kein Extremum. Die Funktion h hat im kritischen Punkt $\vec{0}$ ein strenges (globales) Minimum, denn $f(x, y) = x^2 + y^4 \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $x^2 + y^4 = 0$ genau dann, wenn $x = y = 0$. Die Abbildungen 10, 11 und 12 zeigen die Graphen der Funktionen $f(x, y) = x^2$, $g(x, y) = x^2 + y^3$ und $h(x, y) = x^2 + y^4$ in der Nähe des kritischen Punktes $(0, 0)^T$.

BEISPIEL 39 (Mehrere kritische Punkte, Sattelpunkte und lokales Maximum). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy(6 - x - y)$. Als Polynom ist $f \in \mathcal{C}^2$. Es gilt $Df = (y(6 - x - y) - xy, x(6 - x - y) - xy)$. Ein kritischer Punkt (x, y) erfüllt die Gleichungen $xy = y(6 - x - y)$ und $xy = x(6 - x - y)$. Falls $y = 0$, so ist die erste Gleichung erfüllt und die zweite wird zu $0 = x(6 - x)$. Also sind $P_1 = (0, 0)^T$ und $P_2 = (6, 0)^T$ kritische Punkte. Falls $y \neq 0$, so erhält man aus der ersten Gleichung $y = 6 - 2x$ und dann aus der zweiten $x^2 = x(6 - 2x)$, also $x = 0$ oder $x = 2$. Damit sind auch $P_3 = (0, 6)^T$ und $P_4 = (2, 2)^T$ kritische Punkte.

Wir berechnen die Hessematrix:

$$H_f = \begin{pmatrix} -2y & 6 - 2x - 2y \\ 6 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix},$$

und

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \text{ indefinit, denn Eigenwerte } \pm 6$$

$$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}, \text{ indefinit, denn Eigenwerte } -6 \pm 6\sqrt{2}$$

$$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \text{ indefinit, denn Eigenwerte } -6 \pm 6\sqrt{2}$$

$$H_f(P_4) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \text{ negativ definit, denn } \det H_1 = -4 \text{ und } \det H_2 = 12.$$

Nur im kritischen Punkt P_4 hat f ein lokales Extremum. Die Funktion f hat im Punkt ein strenges lokales Maximum mit $f(P_4) = 8$.

BEISPIEL 40 (Funktion von drei Veränderlichen). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^2 + xz + yz$. Als Polynom ist $f \in \mathcal{C}^2$. Es gilt $Df = (2x + z, z, x + y) = 0$ genau dann, wenn $z = 0$, $x = 0$ und $y = 0$. Das bedeutet, dass $\vec{0}$ der einzige kritische Punkt von f ist. Wir berechnen die Hesse-Matrix:

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: H.$$

Da $\det H_1 = 2 > 0$, $\det H_2 = 0 \geq 0$ und $\det H_3 = \det H = -2 \not\geq 0$, ist H weder positiv noch negativ (semi-)definit. Also ist H indefinit. Deshalb hat f in $\vec{0}$ kein lokales Extremum.

8.2. Globale Extremwerte. Nur

wenn $\vec{x}$ ein innerer Punkt des Definitionsbereiches D einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist, folgt aus der Tatsache, dass $\vec{x}$ eine Extremstelle ist auch $(Df)_{\vec{x}} = 0$. Das bedeutet, dass zum Beispiel Extremstellen im Rand des Definitionsbereiches D im Allgemeinen keine kritischen Punkte sind und durch die Methoden des Abschnitts 8.1 nicht entdeckt werden. Zur Bestimmung der globalen Extremwerte einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ muss man also noch das Verhalten dieser Funktion auf dem Rand von D genauer untersuchen. Diese zusätzliche Arbeit trat auch bei Extremwertuntersuchungen von Funktionen einer Variablen auf.

Aber selbst wenn D keine Randpunkte hat, z.B. wenn $D = \mathbb{R}^n$, dann erfordert es weitere Argumente, um aus der Kenntnis der lokalen Extremstellen und -werte die globalen Extrema einer Funktion zu bestimmen. Der Grund

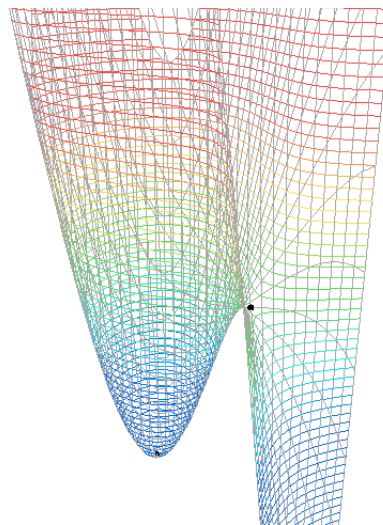


ABBILDUNG 13. Lokales Minimum jedoch keine globalen Extrema

dafür ist, dass zwar für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus $f(x_0) = f(x_1)$ folgt, dass zwischen x_0 und x_1 eine lokale Extremstelle liegt, dies aber für Funktionen von mehr als einer Veränderlichen nicht mehr gilt. Dort folgt aus $f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_1)$ nur, dass es auf der Strecke $\{\vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) : t \in [0, 1]\}$ einen Punkt gibt, in dem eine Richtungsableitung verschwindet.

BEISPIEL 41 (Funktion ist beschränkt). Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = \cos(x + y)e^{-z^2}$. Es gilt

$$Df = (-\sin(x + y)e^{-z^2}, -\sin(x + y)e^{-z^2}, -2z \cos(x + y)e^{-z^2}).$$

Da $e^{-z^2} > 0$, ist $(x, y, z)^T$ genau dann ein kritischer Punkt, wenn $\sin(x + y) = 0$ und $z = 0$. Wir berechnen die Hesse-Matrix

$$H_f = \begin{pmatrix} -\cos(x + y)e^{-z^2} & -\cos(x + y)e^{-z^2} & 2z \sin(x + y)e^{-z^2} \\ -\cos(x + y)e^{-z^2} & -\cos(x + y)e^{-z^2} & 2z \sin(x + y)e^{-z^2} \\ 2z \sin(x + y)e^{-z^2} & 2z \sin(x + y)e^{-z^2} & (4z^2 - 2) \cos(x + y)e^{-z^2} \end{pmatrix}$$

und werten sie in den kritischen Punkten $(x, k\pi - x, 0)^T$ mit $k \in \mathbb{Z}$ aus

$$H_f(x, k\pi - x, 0) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & (-1)^{k+1} & 0 \\ (-1)^{k+1} & (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2(-1)^k \end{pmatrix} =: H.$$

Da $H_1 = (-1)^{k+1}$ und $H_2 = H_3 = 0$, ist H negativ semidefinit für gerade k und positiv semidefinit für ungerade k . Es gilt $f(x, k\pi - x, 0) = (-1)^k$. Wegen $0 < e^{-z^2} \leq 1$ und $-1 \leq \cos(x + y) \leq 1$ ist auch f beschränkt $-1 \leq f(x, y, z) \leq 1$. Da diese obere bzw. untere Schranke in den kritischen Punkten als Funktionswert angenommen wird, hat f in $(x, 2m\pi - x, 0)^T$ ein globales Maximum und in $(x, (2m + 1)\pi - x, 0)^T$ ein globales Minimum für alle $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$.

BEISPIEL 42 (Konvexe und konkave Funktionen). Wenn eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ in $\vec{x}_0$ ein lokales Minimum hat und die Hesse-Matrix H_f in allen Punkten $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ positiv definit ist, dann ist dieses lokale Minimum auch ein globales Minimum, denn wenn $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_0)$ für ein $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_0$, dann hat die Funktion $h = f \circ \vec{c}$ mit $\vec{c}(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$ nach dem Mittelwertsatz ein lokales Maximum in $t_0 \in [0, 1]$. Es gilt aber

$$\begin{aligned} h''(t) &= \left(\sum_{j=1}^n f_{x_j}(\vec{c}(t)) c'_j(t) \right)' = \sum_{i,j=1}^n f_{x_j x_i}(\vec{c}(t)) c'_i(t) c'_j(t) + f_{x_j}(\vec{c}(t)) c''_j(t) \\ &= (D\vec{c}_t)^T H_f(\vec{c}(t)) D\vec{c}_t, \end{aligned}$$

da $\vec{c}$ eine Gerade ist, also $c''_j(t) = 0$ für alle j . Aber $h''(t_0) \leq 0$ und H_f positiv definit widersprechen sich.

Analog gilt, wenn eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ in $\vec{x}_0$ ein lokales Maximum hat und die Hesse-Matrix H_f in allen Punkten $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ negativ definit ist, dann ist dieses lokale Maximum auch ein globales Maximum,

BEISPIEL 43 (Keine globalen Extremwerte). Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x + y)^3 - 12xy$. Es gilt $Df = (3(x + y)^2 - 12y, 3(x + y)^2 - 12x)$. Aus $3(x + y)^2 - 12y = 0$ und $3(x + y)^2 - 12x = 0$ folgt $x = y$ und dann $12x(x - 1) = 0$.

Also hat f zwei kritische Punkte $(0,0)^T$ und $(1,1)^T$. Wir berechnen die Hesse-Matrix

$$H_f = \begin{pmatrix} 6(x+y) & 6(x+y)-12 \\ 6(x+y)-12 & 6(x+y) \end{pmatrix}$$

und werten sie in den kritischen Punkten aus

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Da $\det H_f(0,0) < 0$ ist $H_f(0,0)$ indefinit und der kritische Punkt $(0,0)^T$ ist keine lokale Extremstelle von f . Die Matrix $H_f(1,1)$ hat den doppelten positiven Eigenwert 12 und ist deshalb positiv definit. Darum hat f in $(1,1)^T$ ein lokales Minimum. Jedoch hat die Funktion f weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum, denn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x,0) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x,0) = -\infty.$$

Abbildung 13 zeigt die Höhenlinien und die x, y -Koordinatenlinien der Funktion $f(x,y) = (x+y)^3 - 12xy$.

8.3. Extrema unter Nebenbedingungen. Manchmal ist es notwendig, bei der Bestimmung der Extremwerte einer Funktion f nur solche Argumente $\vec{x}$ zu betrachten, die zusätzliche Bedingungen erfüllen. Solche Bedingungen können durch Ungleichungen oder Gleichungen gegeben sein.

Zum Beispiel beschreibt

$$K := \{(x,y)^T : r^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2\}$$

die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^2$, deren Abstand vom Punkt $(a,b)^T$ mindestens r aber höchstens R ist (Kreisring). Die Menge K besitzt eine Teilmenge K° , die nur aus inneren Punkten besteht, $K^\circ = \{r^2 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2\}$. Sie heißt Inneres von K . Dort können wir nach kritischen Punkten suchen. Das Komplement $K \setminus K^\circ$ ist der Rand $\partial K = \{r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2\} \cup \{R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2\}$, der durch Gleichungen beschrieben wird und gesondert betrachtet werden muss.

Sind die zusätzlichen Bedingungen für die Argumente $\vec{x}$ einer zu optimierenden Funktion f als durch Gleichungen gegeben, so suchen wir die Extremwerte der Funktion f unter der Nebenbedingung $\vec{x} \in M := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}\}$ für eine Funktion $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ist $\vec{g}$ stetig, so ist die Teilmenge M abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. In vielen Fällen ist M sogar eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, also eine kompakte Menge.

SATZ 17 (Existenz von Extremwerten auf kompakten Mengen). *Wenn $f \in \mathcal{C}(M)$ und M kompakt, dann hat f auf M ein globales Minimum und ein globales Maximum.*

BEISPIEL 44 (Kreisscheibe, Kreis, Quadrat). Wir wollen die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y^4$ auf folgenden Teilmengen des $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}^2$ bestimmen:

$$D_1 = \{x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad D_2 = \{x^2 + y^2 = 1\}, \quad D_3 = \{(x,y)^T : -1 \leq x, y \leq 1\}$$

Die drei Mengen D_1, D_2 und D_3 sind kompakt. Die Funktion f hat in $\vec{0}$ ein lokales Minimum, das für f auf D_1 und auf D_3 auch ein globales Minimum ist. Weitere lokale Extremstellen hat f auf $\mathbb{R}^2$ nicht.

Wir wollen f auf $\partial D_1 = D_2$ untersuchen. Glücklicherweise können wir D_2 als Spur einer Kurve schreiben, also parametrisieren, $D_2 = \{(\cos \phi, \sin \phi)^T : \phi \in$

$[0, 2\pi]$ und statt f auf D_2 untersuchen wir die Funktion $h : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(\phi) = f(\cos \phi, \sin \phi) = \cos^2 \phi + \sin^4 \phi$. Die erste Ableitung

$$\begin{aligned} h'(\phi) &= -2 \sin \phi \cos \phi + 4 \sin^3 \phi \cos \phi = 2 \sin \phi \cos \phi (2 \sin^2 \phi - 1) \\ &= -\sin(2\phi) \cos(2\phi) = -\sin(4\phi)/2 \end{aligned}$$

hat die Nullstellen $\phi = k\pi/4$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für die zweite Ableitung $h''(\phi) = -2 \cos(4\phi)$ gilt $h''(k\pi/4) = -2 \cos(k\pi) = 2(-1)^{k+1}$. Also hat f auf D_2 in den Punkten $P_k := (\cos(k\pi/4), \sin(k\pi/4))^T$ für gerades k ein lokales Maximum und für ungerades k ein lokales Minimum. Es gilt

$$f(P_k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 4 \\ \left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{3}{4} & k = 1, 3, 5, 7 \\ 1 & k = 2, 6 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass 1 das globale Maximum von f auf D_1 und D_2 ist. Es wird in den vier Punkten P_0, P_4, P_2 und P_6 angenommen. Die Funktion f hat auf D_2 das globale Minimum $3/4$. Es wird in den vier Punkten P_1, P_3, P_5 und P_7 angenommen.

Der Rand der Menge D_3 ist enthalten in $\{(x, y)^T : (x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0\}$. Diese Gleichung läßt sich lokal leicht nach einer der beiden Variablen auflösen. Es gilt

$$\partial D_3 = \{(1, y)^T\} \cup \{(-1, y)^T\} \cup \{(x, 1)^T\} \cup \{(x, -1)^T\} \subset D_3.$$

Nun müssen wir die Extremwerte der Funktionen $h_1(t) = f(1, t) = 1 + t^4$, $h_{-1}(t) = f(-1, t) = 1 + t^4$, $g_1(t) = f(t, 1) = t^2 + 1$ und $g_{-1}(t) = f(t, -1) = t^2 + 1$ für $t \in [-1, 1]$ bestimmen. Wir sehen direkt, dass diese Funktionen ihr Minimum für $t = 0$ und ihr Maximum in den Randpunkten, also für $t = \pm 1$ annehmen. Es gilt $f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1) = 1$ und $f(\pm 1, \pm 1) = 2$. Die Minima von f auf dem Rand sind größer als das lokale Minimum in $\vec{0}$. Daraus folgern wir, dass f nur in $\vec{0}$ ein globales Minimum hat und in den vier Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)^T$ des Quadrats D_3 ihr globales Maximum annimmt.

BEISPIEL 45 (Gradientenvergleich). Wir wollen für die Funktion $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^4$ aus Beispiel 44 verstehen, wodurch sich die Extremstellen (auf dem Rand) auszeichnen. Es gilt $Df = (2x, 4y^3)$. Die Ableitung verschwindet im lokalen Minimum $\vec{0}$, $Df_{\vec{0}} = (0, 0)$. Der Rand von D_1 wird durch eine Gleichung definiert $\partial D_1 = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 = 1\}$, ist also Nullstellenmenge der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Es gilt $Dg = (2x, 2y)$. Der Gradient $(2x, 2y)^T$ steht senkrecht auf der Höhenlinie ∂D_1 . Wir wollen die Funktion f aber nur auf dieser Höhenlinie ∂D_1 betrachten. Ein lokales Extremum von f auf ∂D_1 sollte vorliegen, wenn der Gradient von f in alle Richtungen tangential zur Höhenlinie verschwindet, also nur Anteile in Richtung $\text{grad } g$ hat.

Es gilt $\text{grad } f = \lambda \text{grad } g$ genau dann, wenn $\lambda = 1$ und $y(2y^2 - 1) = 0$ oder $x = 0$. Diese Eigenschaft haben genau acht Punkte in ∂D_1 , nämlich $(0, \pm 1)^T$, $(\pm 1, 0)^T$, $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)^T$.

SATZ 18 (Multiplikatorenregel von Lagrange). Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\vec{g} = (g_1, \dots, g_m)^T$ stetig differenzierbar und $M := \{\vec{x} : \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}\}$. Wenn $\vec{x}_0 \in M$ lokales Extremum von f auf M ist und die (m, n) -Matrix $(D\vec{g})_{\vec{x}_0}$ Rang m

hat, dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ und

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

BEWEIS. Die Bedingung $\text{rang } D\vec{g} = m$ erlaubt es, die Gleichung $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$ lokal nach m der n Variablen aufzulösen. Wir erhalten eine Auflösungsfunktion $\vec{h}$ und eine lokale Beschreibung der Menge M als $\{(\vec{\xi}, \vec{h}(\vec{\xi}))^T\}$. Nun hat die Funktion $f(\vec{\xi}, \vec{h}(\vec{\xi}))$ ein lokales Extremum für $\vec{\xi}_0$ mit $(\vec{\xi}_0, \vec{h}(\vec{\xi}_0)) = \vec{x}_0$ und die Existenz der Lagrange-Multiplikatoren λ_i folgt aus der Kettenregel. $\square$

BEISPIEL 46 (Quader minimaler Oberfläche und vorgegebenem Volumen). Ein Quader mit den Seitenlängen x, y, z hat das Volumen $V = xyz$ und die Oberfläche $f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$. Es sei $V > 0$ ein vorgegebenes Volumen. Unter allen Quadern mit dem Volumen V suchen wir den mit der kleinsten Oberfläche. D.h. wir suchen das Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = xyz - V = 0$.

Da $V > 0$ ist, können wir die Nebenbedingung nach z umstellen, $z = V/(xy)$ und müssen nun das Minimum der Funktion

$$h(x, y) = f(x, y, V/(xy)) = 2(xy + V/y + V/x)$$

auf der offenen Menge $\{(x, y)^T : x, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ bestimmen. Es gilt

$$Dh = (2y - 2V/x^2, 2x - 2V/y^2).$$

Aus $yx^2 = V = xy^2$ folgt $x = y$, da $x, y > 0$. Die Funktion h hat einen kritischen Punkt mit $x = y = V^{1/3}$. Die Hesse-Matrix von h ist

$$H_h = \begin{pmatrix} 4V/x^3 & 2 \\ 2 & 4V/y^3 \end{pmatrix}, \quad H_h(V^{1/3}, V^{1/3}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

im kritischen Punkt positiv definit. Also hat h dort ein lokales Minimum.

Nun wollen wir die Multiplikatorenregel von Lagrange verwenden. Es gilt $dg = (yz, xz, xy) \neq (0, 0, 0)$, da $x, y, z > 0$. Die Gleichung $df + \lambda dg = 0$ wird mit $df = (2(y+z), 2(x+z), 2(x+y))$ zu

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (2(y+z), 2(x+z), 2(x+y)) + \lambda(yz, xz, xy) \\ &= (2(y+z) + \lambda yz, 2(x+z) + \lambda xz, 2(x+y) + \lambda xy), \end{aligned}$$

also

$$\lambda = -2 \frac{y+z}{yz} = -2 \frac{x+z}{xz} = -2 \frac{x+y}{xy}$$

und durch Multiplikation mit xyz auch $xy+xz = xy+yz = xz+yz$. Wegen $x, y, z > 0$ erhalten wir die Bedingung $x = y = z$ und $x^3 = V$ aus der Nebenbedingung. Es gilt $f(x, x, x) = 6x^2$, also $f(x, x, x) = 6V^{2/3}$ im kritischen Punkt mit $x = V^{1/3}$. Dieser kritische Punkt ist ein Minimum, da $f(x, y, z) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$ oder $y \rightarrow 0$ oder $z \rightarrow 0$.

BEISPIEL 47 (Entfernung zu einem Punkt). Wir suchen den Punkt auf der Ellipse $\{(x, y)^T : (x-2)^2 + 4y^2 = 16\}$, der am dichtesten am Ursprung $\vec{0}$ liegt. Wir müssen die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = (x-2)^2 + 4y^2 - 16 = 0$ minimieren.

Die Nebenbedingung beschreibt eine kompakte Menge. Da die Funktion g stetig ist, ist ihre Nullstellenmenge abgeschlossen. Außerdem ist diese Menge beschränkt,

weil $|x-2| \leq 4$ und $|y| \leq 2$. Also nimmt f auf der durch die Nebenbedingung definierten Menge ihre globalen Extremwerte an. Weiterhin gilt $Dg = (2(x-2), 8y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$, aber $g(0, 0) \neq 0$.

Da $Df + \lambda Dg = (2x + \lambda 2(x-2), 2y + \lambda 8y)$ suchen wir Lösungen des Gleichungssystems $x = \lambda(2-x)$, $y(1+4\lambda) = 0$ und $g(x, y) = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt $y = 0$ oder $\lambda = -1/4$.

- Wenn $y = 0$, so folgt aus $g(x, 0) = 0$ sofort $x = 2 \pm 4$, also $x = 6$ oder $x = -2$, und dann $\lambda = -3/2$ oder $\lambda = -1/2$. Es gilt $f(-2, 0) = 4$ und $f(6, 0) = 36$.
- Wenn $\lambda = -1/4$, dann $-4x = 2-x$, also $x = -2/3$ und aus $g(-2/3, y) = 0$ folgt $y^2 = (16 - 8^2/3^2)/4 = (4 - 16/9) = 20/9$, also $y = \pm 2\sqrt{5}/3$. Es gilt $f(-2/3, \pm 2\sqrt{5}/3) = (4 + 20)/9 = 8/3 < 4$.

Den kleinsten Abstand zum Nullpunkt haben die beiden Punkte $(-2/3, \pm 2\sqrt{5}/3)^T$ auf der Ellipse. Dieser Abstand beträgt $2\sqrt{6}/3$.

BEISPIEL 48 (Entfernung zu einer Geraden). Wir wollen den kleinsten Abstand zwischen Punkten auf der Geraden $x+y = 4$ und der Ellipse $x^2+4y^2 = 4$ bestimmen. Das bedeutet, dass wir das Minimum der Funktion $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ unter den Nebenbedingungen $\vec{g}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \vec{0}$ mit $\vec{g} = (g_1, g_2)^T$, $g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_1 + y_1 - 4$ und $g_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_2^2 + 4y_2^2 - 4$ suchen müssen. Hier ist die durch die Nebenbedingung beschriebene Fläche nicht kompakt, aber

$$D\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_2 & 8y_2 \end{pmatrix}$$

hat maximalen Rang, weil $g_2(x_1, y_1, 0, 0) \neq 0$, also der Punkt $(0, 0)^T$ nicht auf der Ellipse liegt. Es gilt

$$\begin{aligned} & Df + \lambda_1 Dg_1 + \lambda_2 Dg_2 \\ &= (2(x_1 - x_2) + \lambda_1, 2(y_1 - y_2) + \lambda_1, -2(x_1 - x_2) + 2\lambda_2 x_2, -2(y_1 - y_2) + 8\lambda_2 y_2). \end{aligned}$$

Wir suchen Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 0 &= 2(x_1 - x_2) + \lambda_1 \\ 0 &= 2(y_1 - y_2) + \lambda_1 \\ 0 &= -2(x_1 - x_2) + 2\lambda_2 x_2 \\ 0 &= -2(y_1 - y_2) + 8\lambda_2 y_2 \\ 0 &= x_1 + y_1 - 4 \\ 0 &= x_2^2 + 4y_2^2 - 4 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $\lambda_1 = -2(x_1 - x_2)$ und $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$. Dann folgt aus der dritten und der vierten Gleichung $x_1 = x_2 + \lambda_2 x_2$, $y_1 = y_2 + 4\lambda_2 y_2$ und $0 = \lambda_2(4y_2 - x_2)$, also $\lambda_2 = 0$ oder $4y_2 = x_2$.

- Wenn $\lambda_2 = 0$, dann folgt $x_1 = x_2$, $\lambda_1 = 0$, $y_1 = y_2$, $y_1 = 4 - x_1$. Doch die Gerade $x + y = 4$ und die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ haben keinen Schnittpunkt.
- Wenn $4y_2 = x_2$, so folgt $20y_2^2 = 4$, also $y_2 = \pm 1/\sqrt{5}$ und

$$0 = x_1 + y_1 - 4 = x_2(1 + \lambda_2) + y_2(1 + 4\lambda_2) - 4 = 5y_2 + 8\lambda_2 y_2 - 4,$$

also $8\lambda_2 y_2 = 4 - 5y_2$. Damit folgt aus der vierten Gleichung $2(y_1 - y_2) = 4 - 5y_2$, also $y_1 = 2 - 3y_2/2 = 2 - 3/(\pm 2\sqrt{5})$ und $x_1 = 2 + 3/(\pm 2\sqrt{5})$. Es

gibt zwei kritische Punkte. Es gilt

$$\begin{aligned} f(2 + 3/(2\sqrt{5}), 2 - 3/(2\sqrt{5}), 4/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) &= 2(2 - \sqrt{5}/2)^2 \\ f(2 - 3/(2\sqrt{5}), 2 + 3/(2\sqrt{5}), -4/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}) &= 2(2 + \sqrt{5}/2)^2. \end{aligned}$$

Also sind die Punkte $(2 + 3/(2\sqrt{5}), 2 - 3/(2\sqrt{5}))^T$ auf der Geraden und $(4/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T$ auf der Ellipse die gesuchten Punkte mit dem geringsten Abstand.

BEISPIEL 49 (Alternative Eigenwertmethode). Wir bestimmen die Extremwerte der Funktion $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ auf der Kugeloberfläche, also unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Die durch die Nebenbedingung definierte Fläche ist kompakt und dort hat Dg maximalen Rang. Da

$$Df + \lambda Dg = 2(x + y + z + \lambda x, x + y + z + \lambda y, x + y + z + \lambda z)$$

gilt $Df + \lambda Dg = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 0$ und $x + y + z = 0$ oder $x = y = z$ und $\lambda = -3$. Im ersten Fall erhalten wir den Funktionswert $f(x, y, z) = 0$, der ein globales Minimum ist. Im zweiten Fall führt die Nebenbedingung zu $x = y = z = \pm 1/\sqrt{3}$ und $f(x, y, z) = 3$. Da die Kugeloberfläche kompakt ist, nimmt f auf ihr ein Maximum 3 und das Minimum 0 an.

Die Funktion f ist eine quadratische Form. Wir können die Extremwerte von f auf der Kugeloberfläche, also auf der Menge der Vektoren von Länge 1, mit Hilfe der Eigenwerte der quadratischen Form bestimmen. Diese sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^3 + 1 + 1 - 3(1 - \lambda) = (3 - \lambda)\lambda^2.$$

Die quadratische Form f hat den doppelten Eigenwerte 0 und den einfachen Eigenwert 3. Das Maximum der quadratischen Form auf der Menge der Vektoren der Länge 1 ist der größte Eigenwerte 3, das Minimum ist der kleinste Eigenwert 0.

Einführung in die numerische Mathematik

Für viele Fragestellungen kann man zwar die Existenz einer (eindeutigen) Lösung beweisen, man hat aber keine Formel bzw. keinen endlichen Algorithmus zur Berechnung dieser Lösung zur Verfügung.

Beispiele für Probleme, die numerisch behandelt werden müssen.

- Bestimmung von Nullstellen:

Ein Polynom vom Grad n in einer Variablen hat n komplexe Nullstellen. Ein Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle. Aber für Polynome vom Grad ≥ 5 gibt es keine allgemeine Lösungsformel. Die Untersuchung der Eigenschaften der Nullstellenmengen von Polynomen in mehreren Variablen ist Gegenstand der algebraischen Geometrie.

Die Lösung der Gleichungen $\cos x = x$, also der Nullstelle der transzendenten Funktion $\cos x - x$ kann nicht exakt bestimmt werden.

- Bestimmte Integrale stetiger Funktionen existieren, aber oft ist die Stammfunktion nicht in geschlossener Form bekannt.
- Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz beinhaltet ein leicht zu prüfendes Kriterium, das die eindeutige lokale Lösung eines Anfangswertproblems sichert. Der Satz ist aber nicht konstruktiv, die Lösung des Anfangswertproblems wird i.A. numerisch konstruiert.
- Diskretisierung

Fragestellungen der Numerik. Für ein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Lösung fragen wir ob und wie schnell dieses Verfahren konvergiert. Außerdem möchten wir den Fehler zwischen exakter und Näherungslösung abschätzen.

Rechengenauigkeit. Selbst wenn man einen exakten Algorithmus anwenden kann, so ergeben sich Rechenfehler durch die Unmöglichkeit die Dezimaldarstellung reeller Zahlen oder auch sehr kleine oder sehr große rationale Zahlen korrekt abzuspeichern. Hier besteht die Aufgabe darin, die Probleme so zu stellen, dass ihre numerische Behandlung stabil ist.

1. Fixpunktverfahren

Viele theoretische und numerische Probleme lassen sich in die Frage nach der Existenz und Bestimmung Fixpunkten umformulieren.

DEFINITION 12. Es sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ein $c \in [a, b]$ heißt **Fixpunkt** von g , wenn $g(c) = c$.

Ein Fixpunkt einer Funktion g ist ein Schnittpunkt des Graphen von g mit der Winkelhalbierenden $y = x$ und Nullstelle der Funktion $f(x) := g(x) - x$. Wenn g stetig und $f(a)f(b) < 0$, d.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben verschiedene Vorzeichen, dann hat g im Intervall $[a, b]$ mindestens einen Fixpunkt.

DEFINITION 13. Es sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$, dann genügt g der **Lipschitzbedingung** und die Konstante L heißt **Lipschitzkonstante**.

LEMMA 4. Wenn g der Lipschitzbedingung genügt, dann ist g stetig. Wenn g stetig differenzierbar ist, dann genügt g auf $[a, b]$ einer Lipschitzbedingung mit einer Lipschitzkonstante $L = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|$.

BEWEIS. Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|g(x) - g(y)| = |g(\xi)(x - y)| \leq \max_{x \in [a, b]} |g'(x)| |x - y|$$

für ein $\xi \in [a, b]$. □

SATZ 19 (Fixpunktsatz). Wenn $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ der Lipschitzbedingung mit einer Lipschitzkonstanten $L < 1$ genügt und $g([a, b]) \subset [a, b]$, dann jede rekursiv definierte Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_0 \in [a, b]$ und $x_{n+1} = g(x_n)$ gegen den einzigen Fixpunkt $c \in [a, b]$ von g und es gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ die Fehlerabschätzungen

$$|x_n - c| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|, \quad |x_n - c| \leq \frac{L}{1 - L} |x_n - x_{n-1}|.$$

BEWEIS. Die Intervallschachtelung $g^n([a, b])$ konvergiert gegen c , denn die Länge von $g^n([a, b])$ ist kleiner als $L^n(b - a)$ und konvergiert gegen 0. □

BEMERKUNG 13. Die Folge $\{x_n\}$ konvergiert schneller, wenn L klein ist. Wenn die Existenz eines Fixpunktes gesichert ist, so könnte man diesen auch durch fortgesetzte Halbierung des Intervalls und Wahl des geeigneten Teilintervalls (mit unterschiedlichen Vorzeichen der Funktionswerte an den Intervallenden) finden. Dies entspräche $L = 1/2$.

BEISPIEL 50. Wir suchen die Fixpunkte der Funktion $g(x) = 2 \ln(1 + x)$. Es gilt $g(0) = 2 \ln 1 = 0$. Also ist $c = 0$ ein Fixpunkt von g . Weiterhin ist $g(e - 1) = 2 \ln e = 2 > e - 1$ und $g(e^2 - 1) = 2 \ln e^2 = 4 < e^2 - 1$. Also existiert ein Fixpunkt von g im Intervall $[e - 1, e^2 - 1]$. Wir betrachten $f(x) = g(x) - x$. Es gilt

$$f'(x) = g'(x) - 1 = \frac{2}{1 + x} - 1 = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

Also $0 < f'(x) < 1$ für alle $x \geq 1$. Insbesondere ist f monoton wachsend und hat deshalb nur eine Nullstelle > 1 . Außerdem hat g auf $[e - 1, e^2 - 1]$ eine Lipschitzkonstante $L < |2/9 - 1| = 7/9$.

Wir starten die Fixpunktiteration mit $x_0 = 3$ und erhalten

$$\begin{aligned}x_1 &= g(x_0) \approx 2,7725887222 \\x_2 &= g(x_1) \approx 2,6555228591 \\x_3 &= g(x_2) \approx 2,5924782721 \\x_4 &= g(x_3) \approx 2,5576845817 \\x_5 &= g(x_4) \approx 2,5382198697 \\x_6 &= g(x_5) \approx 2,527247478 \\x_7 &= g(x_6) \approx 2,521035631 \\x_8 &= g(x_7) \approx 2,5175103194\end{aligned}$$

mit der Fehlerabschätzung

$$|c - x_8| \leq \frac{7^8 9}{9 \cdot 8^2} |x_0 - x_1| < 0,14, \quad |c - x_8| \leq \frac{7 \cdot 9}{9 \cdot 2} |x_8 - x_7| < \frac{7}{2} 0,004 = 0,014.$$

Übergang zur Umkehrfunktion. Wenn $g'(x) \geq K > 1$ für alle $x \in [a, b]$, stetig differenzierbar und $g([a, b]) \subset [a, b]$, dann existiert eine Umkehrfunktion $g^{-1} : g([a, b]) \rightarrow [a, b]$ mit

$$\max_{y \in g([a, b])} |(g^{-1})'(y)| \leq 1/K < 1, \quad \text{da } (g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}.$$

Da $g(c) = c$ genau dann, wenn $g^{-1}(c) = c$, kann man zur Bestimmung eines Fixpunktes von g auch die Fixpunkte der Umkehrfunktion g^{-1} suchen.

BEISPIEL 51. Wir suchen die Fixpunkte von $g(x) = \tan x$. Es gilt $0 = \tan 0$. Die Funktion $g(x)$ hat in jedem Intervall $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$ einen Fixpunkt, weil $f(x) = \tan x - x$ auf diesem Intervall alle reellen Zahlen als Funktionswerte annimmt. Wir suchen einen Fixpunkt von g im Intervall $(\pi/2, 3\pi/2)$. Es gilt $g'(x) = 1 + \tan^2 x > 1$. Die Umkehrfunktion $\arctan y + \pi$ genügt der Lipschitzbedingung mit einer Lipschitzkonstante $L = 1/2 < 1$, denn $(\arctan y)' = 1/(1 + y^2) < 1/2$ für alle $y > 1$.

Wir starten die Fixpunktiteration mit $y_0 = 3$ und erhalten

$$\begin{aligned}y_1 &= \pi + \arctan(y_0) \approx 4,390638426 \\y_2 &= \pi + \arctan(y_1) \approx 4,4884516449 \\y_3 &= \pi + \arctan(y_2) \approx 4,4931752503 \\y_4 &= \pi + \arctan(y_3) \approx 4,493398405 \\y_5 &= \pi + \arctan(y_4) \approx 4,4934089363 \\y_6 &= \pi + \arctan(y_5) \approx 4,4934094333 \\y_7 &= \pi + \arctan(y_6) \approx 4,4934094567 \\y_8 &= \pi + \arctan(y_7) \approx 4,4934094579.\end{aligned}$$

2. Nullstellenberechnung, Newtonverfahren

Die Berechnung von Nullstellen einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ läßt sich auf die Bestimmung von Fixpunkten zurückführen, z.B.

- $f(c) = 0$ genau dann, wenn c Fixpunkt von $g(x) = x \pm f(x)$. Hier wählt man das Vorzeichen so, dass $|g'(x)| = |1 \pm f'(x)| < 1$.

- Wenn $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ dann ist $f(c) = 0$ genau dann, wenn c ein Fixpunkt von $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Die so definierte Iteration $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_0 \in [a, b]$ und

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

heißt Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen.

Da beim Newtonverfahren

$$g'(x) = 1 - 1 + \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

gilt

SATZ 20 (Konvergenzkriterium für das Newton-Verfahren). Wenn $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$L := \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 1,$$

dann konvergiert die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_0 \in [a, b]$ und $x_{n+1} = g(x_n)$ gegen die einzige Nullstelle c von f in $[a, b]$, falls $x_n \in [a, b]$ für alle n . Es gelten die Fehlerabschätzungen

$$|c - x_n| \leq \frac{L}{1 - L} |x_n - x_{n-1}|, \quad |c - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min_{x \in [a, b]} |f'(x)|}.$$

BEISPIEL 52 (Berechnung von $\sqrt{a}$). Die reelle Zahl $\sqrt{a}$ ist die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - a$. Wir wollen $a = 1/2$ betrachten, also $\sqrt{1/2}$ berechnen. Es gilt $1/2 < \sqrt{1/2} < 5/7$. Da $1 - f'(x) = 1 - 2x$, genügt die Funktion $g(x) = x - f(x)$ auf $[1/2, 5/7]$ der Lipschitzbedingung mit der Lipschitzkonstante $L = 3/7$. Wir starten die Fixpunktiteration mit $x_0 = 0,6$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - x_0^2 + 1/2 = 0,74 \\ x_2 &= x_1 - x_1^2 + 1/2 = 0,6924 \\ x_3 &= x_2 - x_2^2 + 1/2 = 0,71298224 \\ x_4 &= x_3 - x_3^2 + 1/2 \approx 0,70463856544 \\ x_5 &= x_4 - x_4^2 + 1/2 \approx 0,70812305753 \\ x_6 &= x_5 - x_5^2 + 1/2 \approx 0,70668479292 \\ x_7 &= x_6 - x_6^2 + 1/2 \approx 0,70728139637 \\ x_8 &= x_7 - x_7^2 + 1/2 \approx 0,70703442272. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir $\sqrt{1/2}$ mit Hilfe des Newtonverfahrens. Es gilt $f'(x) > 1$ für $x \geq 1$. Wir starten auch das Newtonverfahren wieder mit $x_0 = 0,6$ und erhalten

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 0,71666666667 \\x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0,70717054264 \\x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 0,70710678406 \\x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx 0,70710678119.\end{aligned}$$

Das Newtonverfahren konvergiert hier sehr schnell.

Mehrdimensionales Newtonverfahren. Wenn $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dann führt die Approximation

$$\vec{f}(\vec{x}_{n+1}) - \vec{f}(\vec{x}_n) \approx (D\vec{f})_{\vec{x}_n}(\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n)$$

in der Nähe einer Nullstelle, also $\vec{f}(\vec{x}_{n+1}) \approx \vec{0}$, zu der Iteration

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - (D\vec{f})_{\vec{x}_n}^{-1} \vec{f}(\vec{x}_n) \text{ bzw. } -\vec{f}(\vec{x}_n) = (D\vec{f})_{\vec{x}_n}(\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n)$$

als lineares Gleichungssystem für $\vec{x}_{n+1}$. Um dieses Iterationsverfahren durchführen zu können, muss $D\vec{f}$ invertierbar sein. Wenn zusätzlich die Abbildung $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{x} - (D\vec{f})_{\vec{x}}^{-1} \vec{f}(\vec{x})$ kontrahierend ist, dann konvergiert dieses mehrdimensionale Newtonverfahren gegen eine Nullstelle von $\vec{f}$.

3. Interpolation

Gegeben sind Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ und die Werte $y_j = f(x_j)$ einer Funktion f in diesen Punkten. Gesucht ist ein Polynom $p(x)$ mit $p(x_j) = y_j$ für alle $j = 0, \dots, n$, also ein Polynom durch die vorgegebenen Punkte.

SATZ 21 (Existenz eines eindeutigen Interpolationspolynoms). *Es seien paarweise verschiedene $x_j \in \mathbb{R}$ und beliebige $y_j \in \mathbb{R}$ für $0 \leq j \leq n$ gegeben. Dann existiert ein eindeutiges Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$ mit $p(x_j) = y_j$ für alle j .*

BEWEIS. Das gesuchte Polynom ist

$$p(x) = \sum_{j=0}^n y_j \prod_{k \neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

□

BEISPIEL 53 (Lineare Funktion). Für $x_0 \neq x_1 \in \mathbb{R}$ und $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Gerade durch die Punkte $(x_0, y_0)^T$ und $(x_1, y_1)^T$. Dies ist der Graph des Polynoms

$$\begin{aligned}p(x) &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{-y_0x + y_0x_1 + y_1x - y_1x_0}{x_1 - x_0} \\&= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{y_0x_1 - y_1x_0}{x_1 - x_0}.\end{aligned}$$

SATZ 22 (Fehlerabschätzung). *Es sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ und p das Interpolationspolynom von f zu den Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$. Dann gilt*

$$\|f - p\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \max_{x \in [a, b]} |q(x)|$$

mit $q(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$.

BEWEIS. Für $x \in [a, b]$ und $x \neq x_j$ für alle j hat die Funktion

$$F(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{q(x)} q(t)$$

mindestens $n+2$ Nullstellen. Daraus folgt durch wiederholte Anwendung des Satzes von Rolle, dass $F^{(n+1)}$ im Intervall $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle hat. Es existiert also ein $\xi \in [a, b]$ mit $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Da p ein Polynom vom Grad n ist, gilt $p^{(n+1)} \equiv 0$. Das Polynom q hat Grad $n+1$ und der führende Koeffizient ist 0, deshalb gilt $q^{(n+1)} \equiv (n+1)!$. Wir erhalten die Gleichung

$$0 = F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{q(x)} (n+1)!$$

und damit die Abschätzung

$$|f(x) - p(x)| = \frac{|q(x)|}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \max_{x \in [a, b]} |q(x)|.$$

□

BEMERKUNG 14. Der Faktor $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ in der Abschätzung des Interpolationsfehlers hängt nur von der zu interpolierenden Funktion f ab. Der zweite Faktor $\|q\|_\infty$ kann durch geeignete Wahl der Stützstellen x_j klein gehalten werden

SATZ 23 (Berechnung des Interpolationspolynoms). *Es seien paarweise verschiedene $x_j \in \mathbb{R}$ und beliebige $y_j \in \mathbb{R}$ für $j = 0, \dots, n$ gegeben. Dann existieren $B_j \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\sum_{j=0}^n B_j \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + B_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

das eindeutige Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$ mit $p(x_j) = y_j$ für alle j ist.

BEWEIS. Die Gleichungen $\sum_{j=0}^n B_j \prod_{k=0}^{j-1} (x_i - x_k) = y_i$ können nach B_i aufgelöst werden □

BEISPIEL 54. Wir betrachten die Stützstellen $x_j = j$ mit $j = 0, 1, 2$ und die Werte $y_0 = y_2 = 1$ und $y_1 = 0$. Dann ist

$$1 = y_0 = p(x_0) = p(0) = B_0,$$

$$0 = y_1 = p(x_1) = B_0 + B_1(x_1 - x_0) = 1 + B_1, \quad B_1 = -1,$$

$$1 = y_2 = p(x_2) = B_0 + B_1(x_2 - x_0) + B_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = 1 - 2 + B_2 \cdot 2, \quad B_2 = 1$$

und das Interpolationspolynom p ist

$$p(x) = 1 - (x - x_0) + (x - x_0)(x - x_1) = 1 - x + x(x - 1) = (x - 1)^2.$$

Diese Formel für das Interpolationspolynom läßt sich leicht anpassen, wenn man nicht nur die Funktionswerte an den Stützstellen x_j vorgibt, sondern auch die Ableitungen bis zur Ordnung m_j .

SATZ 24 (Interpolation von Funktionswerten und Ableitungen). *Es seien paarweise verschiedene $x_j \in \mathbb{R}$ und beliebige $y_j^{(l)} \in \mathbb{R}$ für $j = 0, \dots, n$ und $l = 0, \dots, m_j$ gegeben. Dann existiert ein eindeutiges Polynom p vom Grad $\leq n + \sum_{j=1}^n m_j$ mit $p^{(l)}(x_j) = y_j^{(l)}$ für alle j, l . Es gilt $p(x) =$*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m_j} B_{j,l} \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_j)^{m_j+1} (x - x_j)^{(l)} + \sum_{l=0}^{m_n-1} B_{n,l} \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_j)^{m_j+1} (x - x_n)^{(l)}$$

und die Koeffizienten $B_{j,l}$ können durch Umstellung der Gleichung $p^{(l)}(x_j) = y_j^{(l)}$ nach $B_{j,l}$ berechnet werden.

BEISPIEL 55 (Kubischer Spline). Es seien $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $y_0^{(0)} = y_1^{(0)} = 1$, $y_0^{(1)} = -2$ und $y_1^{(1)} = 2$. Dann gilt

$$p(x) = B_{0,0} + B_{0,1}(x - x_0) + B_{1,0}(x - x_0)^2 + B_{1,1}(x - x_0)^2(x - x_1)$$

und die Koeffizienten $B_{j,l}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} 1 &= y_0^{(0)} = p(x_0) = B_{0,0} \\ -2 &= y_0^{(1)} = p'(x_0) = B_{0,1} \\ 1 &= y_1^{(0)} = p(x_1) = B_{0,0} + B_{0,1}(x_1 - x_0) + B_{1,0}(x_1 - x_0)^2 = 1 - 2 \cdot 2 + B_{1,0}2^2 \\ B_{1,0} &= 1 \\ 2 &= y_1^{(1)} = p'(x_1) = B_{0,1} + 2B_{1,0}(x_1 - x_0) + B_{1,1}(x_1 - x_0)^2 = -2 + 2 \cdot 2 + B_{1,1}2^2 \\ B_{1,1} &= 0 \end{aligned}$$

und $p(x) = 1 - 2(x + 1) + (x + 1)^2 = x^2$.

BEMERKUNG 15. Interpoliert man nur die Funktionswerte an den Stützstellen, so treten an den Intervallenden starke Oszillation auf, wenn die Anzahl der Stützstellen groß ist. Dem kann man entgegen wirken, indem man zwischen zwei Stützstellen einen kubischen Spline verwendet und den Übergang zwischen den einzelnen Splines durch die Wahl der Ableitungen in den Stützstellen differenzierbar macht.

4. Numerische Integration

4.1. Numerische Integration bestimmter Integrale. Um ein Integral einer Funktion f numerische zu berechnen, bestimmen wir das Integral einer Interpolation von f . Als direkte Folgerung aus der Fehlerabschätzung zwischen einer Funktion f und ihrem Interpolationspolynom erhalten wir

SATZ 25 (Integrationsfehler). *Seien $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}([a, b])$, $a = x_0 < \dots < x_n = b$ Stützstellen und p das Interpolationspolynom von f in diesen $n + 1$ Stützstellen. Dann gilt*

$$\left| \int_a^b f(x) - p(x) dx \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b |q(x)| dx$$

mit $q(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$.

Für $n = 1$ ergibt sich die **Trapezregel**, d.h.

$$\begin{aligned}
 p(x) &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \\
 \int_a^b p(x) dx &= \frac{f(a) + f(b)}{2(b - a)} \\
 \int_a^b |q(x)| dx &= \int_a^b (x - a)(b - x) dx = \left[\frac{(x - a)^2}{2}(b - x) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(x - a)^2}{2} dx \\
 &= \left[\frac{(x - a)^3}{6} \right]_a^b = \frac{(b - a)^3}{6}, \\
 \left| \int_a^b f(x) - p(x) dx \right| &\leq \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \frac{(b - a)^3}{12}
 \end{aligned}$$

Für $n = 2$ und $x_1 = (b + a)/2$ erhält man die **Simpsonformel**,

$$p(x) = f(a) + 2 \frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{b - a}(x - a) + 2 \frac{f(b) + f(a) - 2f(\frac{a+b}{2})}{(b - a)^2}(x - a)(x - \frac{a + b}{2})$$

und

$$\int_a^b p(x) dx = \frac{b - a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Wenn $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, so gilt sogar die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x) - p(x) dx \right| \leq \frac{(b - a)^5}{2880} \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

BEMERKUNG 16. Hier erhält man die „bessere“ Abschätzung, weil für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_a^b c(x - a)(x - \frac{a+b}{2})(x - b) dx = 0$ und f eigentlich an vier Stützstellen durch ein Polynom dritten Grades interpoliert wird.

Entscheidend für die Güte der Formel ist der Exponent von $b - a$, der Intervalllänge. Für $n > 1$ konvergiert $(b - a)^n$ schneller gegen 0 als $b - a$, leider wächst $(b - a)^n$ auch schneller als $b - a$. Folglich werden die Näherungen für große Intervalllängen immer schlechter.

Eine Lösung des Problems besteht darin, das Intervall $[a, b]$ in N Teilintervalle gleicher Länge, also $(b - a)/N$ zu zerlegen und auf diesen Teilintervallen die Trapez- oder die Simpsonformel anzuwenden. Für die **zusammengesetzte** Trapezformel $T_N(x)$ und die zusammengesetzte Simpsonformel $S_N(x)$ gelten dann die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \left| \int_a^b f(x) - T_N(x) dx \right| \leq \frac{(b - a)^3}{12N^2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \\
 (2) \quad & \left| \int_a^b f(x) - S_N(x) dx \right| \leq \frac{(b - a)^5}{2880N^4} \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.
 \end{aligned}$$

FOLGERUNG 7. Für $N \rightarrow \infty$ konvergieren $\int_a^b T_N(x) dx$ und $\int_a^b S_N(x) dx$ gegen $\int_a^b f(x) dx$.

4.2. Uneigentliche Integrale. Wenn das Integrationsintervall unbegrenzt ist, z.B. $[a, \infty)$, oder die zu integrierende Funktion f unbeschränkt ist, kann man die Trapez- oder die Simpsonformel nicht direkt anwenden.

- **Abschneidemethode:** Statt des $\int_a^\infty f(x)dx$ berechnet man $\int_a^M f(x)dx$ für ein $M > a$ näherungsweise und schätzt den Rest $\int_M^\infty f(x)dx$ ab. Dies ist sinnvoll bei Funktionen f , die für $x \rightarrow \infty$ schnell gegen 0 konvergieren, z.B. $f(x) = e^{-x}$.
- **Substitution:** Durch eine Substitution kann man ein unbeschränktes Intervall in ein beschränktes transformieren. Zum Beispiel ist $\arctan([0, \infty)) = [0, \pi/2)$ und $1/([1, \infty)) = (0, 1]$. Manchmal funktioniert nach einer Substitution auch die Abschneidemethode besser.
- **partielle Integration:** Zum Beispiel kann man durch mehrmalige partielle Integration von $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ erreichen, dass der Exponent von x im Nenner größer wird und dadurch die Abschneidemethode dann bessere Näherungen liefert, weil der Integrand für große x schneller gegen 0 konvergiert.

5. Differenzenverfahren

Ein ad hoc Methode zur numerischen Behandlung von Differentialgleichungen, d.h. Anfangswert- und Randwertproblemen, ist das Differenzenverfahren. Ersetzt man y' durch Differenzenquotienten $(y(x+h) - y(x))/h$ mit kleiner Schrittweite h , so erhält man ein lineares Gleichungssystem. Weitere Stichworte zu numerischen Lösungsverfahren von Differentialgleichungen sind explizit und implizites Euler-Verfahren, Runge-Kutta-Verfahren, Schrittweitenanpassung und Methode der finiten Elemente.

Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

Das Integral $\int_D f(\vec{x}) d\vec{x}$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ soll das $(n+1)$ -dimensionale Volumen der Menge

$$\{(\vec{x}, y)^T : \vec{x} \in D, y \in [0, f(\vec{x})]\}$$

messen. Wir definieren dieses Integral erst für die einfachsten Funktionen (konstante Funktionen) und die einfachsten Definitionsbereiche (abgeschlossene Intervalle) und setzen die Definition dann in geeigneter Weise fort, so dass das Integral alle wünschenswerten Eigenschaften hat, z.B. Linearität

$$\int_D (f + g)(\vec{x}) d\vec{x} = \int_D f(\vec{x}) d\vec{x} + \int_D g(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \int_D cf(\vec{x}) d\vec{x} = c \int_D f(\vec{x}) d\vec{x}$$

und $\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{D \setminus D_1} f(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{D_1} f(\vec{x}) d\vec{x}$ für $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $D_1 \subset D$.

1. Definition des Riemann-Integrals

DEFINITION 14. Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{a} = \sum_{j=1}^n a_j \vec{e}_j$ und $\vec{b} = \sum_{j=1}^n b_j \vec{e}_j$. Die Menge

$$[\vec{a}, \vec{b}] := \left\{ \vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j : x_j \in [a_j, b_j] \forall j \right\}$$

heißt **abgeschlossenes Intervall** des $\mathbb{R}^n$.

Die Zahl $\mu([\vec{a}, \vec{b}]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ heißt **Maß** oder **Inhalt** des Intervalls $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Wir setzen $\delta([\vec{a}, \vec{b}]) := \|\vec{b} - \vec{a}\|$.

Ein abgeschlossenes Intervall ist eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Das Integral einer konstanten Funktion $f \equiv c$ über einem abgeschlossenen Intervall I sollte $c\mu(I)$ sein.

Es gilt $\delta([\vec{a}, \vec{b}]) \leq b_j - a_j$ für alle j .

1.1. Integrierbarkeit beschränkter Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen. Es sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall. $\mathcal{Z} = \{I_1, \dots, I_m\}$ heißt **Zerlegung** $\mathcal{Z}$ des Intervalls I in Teilintervalle $I_1, \dots, I_m$, falls

$$\cup_{j=1}^m I_j = I \text{ und } \mu(I_j \cap I_k) = 0 \forall j \neq k.$$

Wir setzen $|\mathcal{Z}| := \max\{\delta|I_j| : j = 1, \dots, m\}$. Die Zahl $|\mathcal{Z}|$ ist ein Maß für die Feinheit der Zerlegung $\mathcal{Z}$.

Wie für Funktionen in einer Variablen definieren wir Obersumme $\mathcal{O}(\mathcal{Z})$ und Untersumme $\mathcal{U}(\mathcal{Z})$ einer beschränkten Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich einer Zerlegung $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{U}(\mathcal{Z}) := \sum_{j=1}^m \inf\{f(x) : x \in I_j\} \mu(I_j), \quad \mathcal{O}(\mathcal{Z}) := \sum_{j=1}^m \sup\{f(x) : x \in I_j\} \mu(I_j).$$

Eine beschränkte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (Riemann-) **integrierbar** auf dem Intervall I , falls

$$\sup_{\mathcal{Z}} \{\mathcal{U}(\mathcal{Z})\} = \inf_{\mathcal{Z}} \{\mathcal{O}(\mathcal{Z})\}.$$

In dem Fall

$$\int_I f(x) dx := \sup_{\mathcal{Z}} \{\mathcal{U}(\mathcal{Z})\} = \inf_{\mathcal{Z}} \{\mathcal{O}(\mathcal{Z})\}.$$

SATZ 26. Wenn f stetig auf I , dann ist f integrierbar auf I .

BEWEIS. Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge ist f gleichmäßig stetig. Als Treppenfunktion f_m wählt man zum Beispiel

$$\sum_{J=j_1, \dots, j_n=1}^{2m} f(\vec{x}_J) \chi_{I_J} \text{ mit } I_J = \left[\vec{a} + \sum_k \frac{b_k - a_k}{2^m} (j_k - 1) \vec{e}_k, \vec{a} + \sum_k \frac{b_k - a_k}{2^m} j_k \vec{e}_k \right]$$

und $\vec{x}_J \in I_J$. Also $\cup_J I_J = I$ und $\mu(I_J) = \mu(I) 2^{-nm}$. $\square$

SATZ 27. Wenn f und g integrierbar auf I und $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist auch $af + bg$ auf I integrierbar und es gilt

$$\int_I af(x) + bg(x) dx = a \int_I f(x) dx + b \int_I g(x) dx \quad (\text{Linearität}).$$

Wenn zusätzlich $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$ gilt, so ist

$$\int_I f(x) dx \leq \int_I g(x) dx \quad (\text{Monotonie}).$$

SATZ 28. Eine beschränkte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann auf dem abgeschlossenen Integral integrierbar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen der Funktion f eine Nullmenge ist.

1.2. Messbare Mengen und Nullmengen. Wenn $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, dann existiert ein minimales abgeschlossenes Intervall $I(D)$ mit $D \subset I(D)$. Die Funktion

$$\chi_D : I(D) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \chi_D(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \vec{x} \in D \\ 0 & , \text{ falls } \vec{x} \notin D \end{cases}$$

heißt **charakteristische Funktion von D** .

DEFINITION 15. Eine beschränkte Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist **messbar**, falls ihre charakteristische Funktion χ_D auf dem Intervall $I(D)$ integrierbar ist. In dem Fall

$$\mu(D) := \int_I \chi_D(x) dx$$

auf $I(D)$ integrierbar ist.

DEFINITION 16. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Nullmenge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele abgeschlossene Intervalle I_j mit

$$M \subset \cup_j I_j \text{ und } \sum_j \mu(I_j) < \varepsilon$$

gibt.

SATZ 29 (Eigenschaften von Nullmengen). Es gilt

- (i) Wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge und $N \subset M$, dann ist N eine Nullmenge.
- (ii) Wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ endlich oder abzählbar, dann ist M eine Nullmenge.
- (iii) Wenn $M_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, Nullmengen, dann ist $\cup_j M_j$ eine Nullmenge.
- (iv) Wenn $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Nullmenge, dann existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele abgeschlossene Intervalle I_j mit

$$M \subset \cup_j I_j \text{ und } \sum_j \mu(I_j) < \varepsilon.$$

BEISPIEL 56 (Graphen). Der Graph $\{(\vec{x}, f(\vec{x})) : \vec{x} \in D\}$ einer stetigen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$ Intervall ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$, zum Beispiel die Hyperebene $\{(\vec{x}, 0) : \vec{x} \in \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n$.

BEISPIEL 57 (Nullstellenmengen von Polynomen). Wenn $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom und nicht $p \equiv 0$, dann ist $\{\vec{x} : p(\vec{x}) = 0\}$ eine Nullmenge des $\mathbb{R}^n$, z.B. die Kugeloberfläche $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$.

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $\vec{x} \in D$ heißt **innerer Punkt**, wenn es eine Umgebung von $\vec{x}$ gibt, die ganz in D liegt, also $U_\varepsilon = \{\vec{y} : \|\vec{x} - \vec{y}\| < \varepsilon\} \subset D$ für ein $\varepsilon > 0$. Ein Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Randpunkt**, wenn jede offene Umgebung von $\vec{x}$ Punkte enthält, die in D liegen, und Punkte enthält, die nicht in D liegen. Ein Punkt $\vec{x} \in D$ ist genau dann ein Randpunkt von D , wenn er kein innerer Punkt von D ist. Ein Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Randpunkt von D , wenn es eine Folge von Punkten $\{\vec{x}_n\} \subset D$ gibt, die gegen $\vec{x}$ konvergiert. Die Menge der inneren Punkte wird mit D° bezeichnet, die Menge der Randpunkte mit ∂D . Der Abschluß $\bar{D}$ der Menge D ist die Vereinigung von inneren und Randpunkten $\bar{D} = D \cup \partial D$.

SATZ 30 (Kriterium für Messbarkeit). Eine beschränkte Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn ∂D eine Nullmenge ist.

LEMMA 5 (Eigenschaften messbarer Mengen). Wenn D , D_1 und D_2 messbare Menge sind, dann sind auch D° , ∂D und $D_1 \cup D_2$ messbar und es gilt

$$\mu(D) = \mu(D^\circ) = \mu(\bar{D}) \text{ und } \mu(D_1 \cup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2) - \mu(D_1 \cap D_2).$$

1.3. Integrierbarkeit beschränkter Funktionen auf beschränkten Mengen. Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Die Funktion f heißt auf der Menge D (Riemann-) **integrierbar**, falls die triviale Fortsetzung

$$\tilde{f} : I(D) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & , \text{ falls } \vec{x} \in D \\ 0 & , \text{ falls } \vec{x} \notin D \end{cases}.$$

$$\int_D f(x) dx := \int_{I(D)} \tilde{f}(x) dx.$$

SATZ 31 (Integrierbarkeit auf messbaren Mengen). *Eine beschränkte Funktion $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann auf einer messbaren Menge $\bar{D}$ integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist. Dann gilt*

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{D^\circ} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\bar{D}} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

1.4. Eigenschaften des Integrals.

SATZ 32. *Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, messbare Menge, f, g integrierbar auf D , $c \in \mathbb{R}$ und D_1, D_2 messbare Mengen mit $D_1 \cup D_2 = D$ und $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Dann gilt*

(i) *Linearität:*

$$\begin{aligned} \int_D cf(\vec{x}) d\vec{x} &= c \int_D f(\vec{x}) d\vec{x} \\ \int_D f(\vec{x}) + g(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_D f(\vec{x}) d\vec{x} + \int_D g(\vec{x}) d\vec{x} \end{aligned}$$

(ii) *Monotonie: Wenn $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in D$, dann*

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} \leq \int_D g(\vec{x}) d\vec{x}.$$

(iii) *absolute Integrierbarkeit: $|f|$ ist integrierbar auf D und*

$$\left| \int_D f(\vec{x}) d\vec{x} \right| \leq \int_D |f(\vec{x})| d\vec{x}$$

(iv) $f^+, f^-, \max(f, g), \min(f, g)$ und fg sind integrierbar.

(v) *Additivität:*

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{D_1} f(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{D_2} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

2. Sätze von Fubini

2.1. Satz von Fubini für Intervalle. Zu einem abgeschlossenen Intervall $I = [\vec{a}, \vec{b}]$ betrachten wir $I_k := \times_{j \neq k} [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^{n-1}$, die Projektion auf $\mathbb{R}^{n-1}$, die durch Streichen der k -ten Komponente entsteht, und bezeichnen mit $\vec{x}_k$ die Projektion des Vektors $\vec{x} \in I$ auf I_k .

SATZ 33 (Zurückführung auf Integrale einer Veränderlichen). *Wenn f auf $I = [\vec{a}, \vec{b}]$ integrierbar und $\int_{a_k}^{b_k} f(\vec{x}) dx_k$ für beliebige $x_j \in [a_j, b_j]$ mit $j \neq k$ existiert, dann*

$$\int_I f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{I_k} \left(\int_{a_k}^{b_k} f(\vec{x}) dx_k \right) d\vec{x}_k.$$

BEMERKUNG 17. Wenn f auf I stetig ist, so ist f auf I integrierbar und kann durch iterierte Integrale berechnet werden.

BEISPIEL 58. Wir betrachten $I = [a, b] \times [c, d]$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$. Die Funktion f ist stetig und deshalb gilt

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y) d(x, y) &= \int_c^d \left(\int_a^b xy \, dx \right) dy = \int_c^d \frac{y}{2} [x^2]_{x=a}^{x=b} dy = \int_c^d \frac{b^2 - a^2}{2} y \, dy \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} \frac{1}{2} [y^2]_{y=c}^{y=d} = \frac{((b^2 - a^2)(d^2 - c^2))}{4}. \end{aligned}$$

BEISPIEL 59. Wir betrachten $I = [0, 1] \times [a, b]$ mit $0 < a$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x^y & , \text{ falls } x > 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases}.$$

Die Funktion f ist stetig auf I und insbesondere in den Punkten $(0, y)^T$, weil $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} x^y = 0$, falls $y > 0$. Nun beachten wir $x^y = e^{y \ln x}$ und berechnen

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y) d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_a^b e^{y \ln x} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{e^{y \ln x}}{\ln x} \right]_{y=a}^{y=b} dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y) d(x, y) &= \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} [x^{y+1}]_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{1}{1+y} dy \\ &= [\ln(1+y)]_a^b = \ln \frac{b+1}{a+1}. \end{aligned}$$

Da f stetig ist, folgern wir

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Das Integral ist eigentlich, denn

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{1/x} = b - a.$$

BEISPIEL 60. Wir betrachten $f(x, y, z) = 2x + 3y^2 + z$ auf $I = [0, 1] \times [0, 1] \times [1, 2]$. Die Funktion f ist stetig und wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_1^2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 2x + 3y^2 + z dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^1 [x^2 + 3xy^2 + xz]_{x=0}^{x=1} dy \right) dz \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^1 1 + 3y^2 + z dy \right) dz = \int_1^2 [y + y^3 + yz]_{y=0}^{y=1} dz \\ &= \int_1^2 2 + z dz \left[2z + \frac{z^2}{2} \right]_1^2 = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

2.2. Fubini für Normalbereiche. Ein Beispiel für messbare Mengen sind Mengen der Form

$$M = \{ \vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j : x_k \in [\phi(\vec{x}_k), \psi(\vec{x}_k)], \vec{x}_k \in D_k \}$$

für eine messbare Menge $D_k \in \mathbb{R}^{n-1}$, z.B. ein abgeschlossenes Intervall, und stetige Funktionen $\phi, \psi : D_k \rightarrow \mathbb{R}$. Eine solche Menge nennt man auch **Normalbereich bezüglich** x_k oder graphartige Menge.

BEISPIEL 61 (Dreieck). Die Menge $\{(x, y)^T : y \in [0, x], x \in [0, 1]\}$ ist von dieser Art für $k = 2$, $x_2 = y$, $\vec{x}_2 = x$, $I_2 = [0, 1]$, $\phi(x) \equiv 0$ und $\psi(x) = x$.

BEISPIEL 62 (Kreisscheibe). Der Kreis $\{(x, y)^T : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist von dieser Art für $k = 2$, $x_2 = y$, $\vec{x}_2 = x$, $I_2 = [-1, 1]$, $\phi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $\psi(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

BEISPIEL 63. Die Menge $\{(x, y)^T : x^2 - y^2 \leq 1, |y| < 1\}$ ist von dieser Form für $k = 1$, $x_1 = x$, $\vec{x}_1 = y$, $I_1 = [-1, 1]$, $\phi(y) = -\sqrt{1 + y^2}$ und $\psi(y) = \sqrt{1 + y^2}$.

BEISPIEL 64 (Einheitstetraeder). Der Einheitstetraeder ist die Menge

$$\{(x, y, z)^T : x + y + z \leq 1, x, y, z \geq 0\}.$$

Er ist die konvexe Hülle seiner Eckpunkte $(0, 0, 0)^T$, $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ und $(0, 0, 1)^T$ und Normalbereich über dem Dreieck $D_3 = \{(x, y)^T : x + y \leq 1, x, y \geq 0\}$ mit $\phi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 1 - x - y$.

BEISPIEL 65 (Rotationsflächen). Eine Rotationsfläche entsteht durch Drehung einer Fläche, die durch den Graphen einer Funktion $r = f(z)$ mit $f(z) \geq 0$ für alle $z \in [a, b]$ beschränkt ist, um die z -Achse:

$$D = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}.$$

So entsteht die Kugel durch Rotation der Fläche unter dem Graphen $r = \sqrt{1 - z^2}$ für $z \in [-1, 1]$. Der Rotationshyperboloid die Rotationsfläche, die aus der Auflösung der Hyperbelgleichung $t^2 - z^2 = 1$ nach t entsteht.

SATZ 34 (Zurückführung auf auf Integrale einer Variablen). Wenn $D \subset \mathbb{R}^n$ Normalbereich bezüglich x_k und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{D_k} \left(\int_{\phi(\vec{x}_k)}^{\psi(\vec{x})} f(\vec{x}) dx_k \right) d\vec{x}_k.$$

BEISPIEL 66 (Flächeninhalt des Dreiecks). Für $a, b > 0$ betrachten wir $D = \{(x, y)^T : y \in [0, bx/a], x \in [0, a]\}$, ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen a und b und berechnen $\mu(D)$ als Integral der charakteristischen Funktion χ_D auf $I = [0, 1] \times [0, 1]$. Es gilt

$$\int_D 1 d(x, y) = \int_0^a \left(\int_0^{bx/a} 1 dy \right) dx = \int_0^a [y]_{y=0}^{y=bx/a} dx = \int_0^a \frac{b}{a} x dx = \frac{b}{2a} [x^2]_{x=0}^{x=a} = \frac{ab}{2}.$$

BEISPIEL 67. Wir betrachten $D = \{(x, y)^T : x \in [0, \pi], \sin x \leq y \leq x\}$ und die Funktion $f(x, y) = x$. Die Menge D ist ein Normalbereich bezüglich y mit $\phi(x) = \sin x$ und $\psi(x) = x$. Da f stetig ist, ist f auf D integrierbar und das Integral kann als iteriertes Integral berechnet werden.

$$\begin{aligned} \int_D x d(x, y) &= \int_0^\pi \left(\int_{\sin x}^x x dy \right) dx = \int_0^\pi [xy]_{y=\sin x}^{y=x} dx = \int_0^\pi -x \sin x + x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^\pi - \left([x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x dx \right) = \frac{1}{3} \pi^3 - \pi \end{aligned}$$

FOLGERUNG 8 (Volumen der Rotationskörper). Das Volumen eines Rotationskörpers $D = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq f(z)^2, z \in [a, b]\}$ für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ ist

$$\int_D 1 d(x, y, z) = \int_a^b \pi f(z)^2 dz.$$

BEWEIS. Es gilt $D = \{(x, y, z)^T : z \in [a, b], |y| \leq f(z), |x| \leq \sqrt{f(z)^2 - y^2}\}$, also

$$\begin{aligned} \int_D 1 d(x, y, z) &= \int_a^b \left(\int_{-f(z)}^{f(z)} \left(\int_{-\sqrt{f(z)^2 - y^2}}^{\sqrt{f(z)^2 - y^2}} 1 dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_a^b \left(\int_{-f(z)}^{f(z)} 2\sqrt{f(z)^2 - y^2} dy \right) dz \\ &\quad \text{Substitution } y = f(z) \sin t, dy = f(z) \cos t dt \\ &= \int_a^b \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2f(z)^2 \cos^2 t dt \right) dz \\ &= \int_a^b f(z)^2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos^2 t dt \right) dz = \int_a^b f(z)^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt \right) dz \\ &= \pi \int_a^b f(z)^2 dz, \end{aligned}$$

weil $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \pi$ (Orthogonalitätsrelation). $\square$

BEMERKUNG 18. Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar aber kein Normalbereich, so kann man versuchen, D in Normalbereiche zu zerlegen, $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, so dass der Durchschnitt $D_i \cap D_j$ für beliebige Indizes i, j nur eine Nullmenge ist.

BEISPIEL 68 (Definition von Masse und Schwerpunkte). Es sei $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Dichtefunktion, z.B. Masse- oder Ladungsdichte, und $D \subset \mathbb{R}^3$ messbar. Dann ist

$$m := \int_D \rho(\vec{x}) d\vec{x}$$

die Masse (oder Ladungszahl) von D . Den Punkt

$$\vec{x}_S := \frac{1}{m} \int_D \rho(\vec{x}) \vec{x} d\vec{x}$$

nennt man Schwerpunkt von D . Hier wird das Integral der vektorwertigen Funktion komponentenweise berechnet. Es gilt dann $\int_D (\vec{x} - \vec{x}_S) \rho(\vec{x}) d\vec{x} = 0$.

3. Mittelwertsatz

Ähnlich wie für Funktionen einer Veränderlicher kann man das Integral mit Hilfe der Extremwerte der Funktion und das Volumen des Integrationsbereiches abschätzen.

SATZ 35 (Mittelwertsatz). *Wenn $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf D integrierbar und D messbar, dann gilt*

$$\mu(D) \inf_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}) \leq \int_D f(\vec{x}) d\vec{x} \leq \mu(D) \sup_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$$

und es existiert eine reelle Zahl η mit $\inf_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}) \leq \eta \leq \sup_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$ und

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \eta \mu(D).$$

Ist zusätzlich $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf D integrierbar und positiv, d.h. $g(\vec{x}) \geq 0$ für alle $\vec{x} \in D$, dann existiert eine reelle Zahl η mit $\inf_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}) \leq \eta \leq \sup_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$ und

$$\int_D f(\vec{x}) g(\vec{x}) d\vec{x} = \eta \mu(D) \int_D g(\vec{x}) d\vec{x}.$$

4. Substitution, Koordinatenwechsel, Transformationsregel

Statt eine messbare Menge D in Normalbereiche zu zerlegen ist es häufig sinnvoller, geeignete Koordiante zu wählen, z.B. bei der Integration der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ über die Einheitskreisscheibe $K = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bezüglich Polarkoordinaten lassen sich das Integrationsgebiet $K = \{(t, \phi)^T : 0 \leq r \leq 1\}$ und auch die Funktion $f(r, \phi) = r^2$ einfach ausdrücken. Aber was wird bei der Integration aus $d(x, y)$? Hier ist die Transformationsregel:

SATZ 36 (Substitution). *Es sei $\vec{\Phi} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und injektiv, D messbar und f stetig. Dann gilt mit den Koordinaten $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{u})$*

$$\int_D f(\vec{\Phi}(\vec{u})) \left| \det(D\vec{\Phi}_{\vec{u}}) \right| d\vec{u} = \int_{\vec{\Phi}(D)} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

BEWEIS. Bei der Abbildung $D\vec{\Phi}(\approx \vec{\Phi})$ geht das abgeschlossene Intervall $I = [\vec{a}, \vec{b}]$ mit Fußpunkt $\vec{u}$ in ein Parallelepiped mit Fußpunkt $\vec{\Phi}(\vec{u})$ über, das von den Vektoren $(b_j - a_j)(D\vec{\Phi}_{\vec{u}})(\vec{e}_j)$ aufgespannt wird und das Volumen $\mu(I) |\det(D\vec{\Phi}_{\vec{u}})|$ hat. $\square$

BEMERKUNG 19 (Betragszeichen in der Transformationsformel und Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge). Bei der Definition und Berechnung von Integralen auf Teilmengen $D \subset \mathbb{R}^n$ haben wir versteckt eine Orientierung des $\mathbb{R}^n$ benutzt, denn die oberen Integrationsgrenzen sind immer größer als die unteren

Integrationsgrenzen im iterierten Integral $\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(\vec{x}) dx_1 \cdots dx_n$. Auch ein Integral einer Funktion f über das Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist dann immer $\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ und nie $\int_b^a f(x) dx$.

Durch diese Definition gewinnen wir die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge. Dafür muss man in der Transformationsformel den Absolutbetrag der Determinante der Ableitungsmatrix als Faktor einfügen und darf nur injektive Abbildungen $\vec{\Phi}$ betrachten.

BEMERKUNG 20 (Injektivität der Parametrisierung $\vec{\Phi}$). Da das Integral einer Funktion auf einer Nullmenge 0 ist, muss die Parametrisierung $\vec{\Phi}$ nur außerhalb einer Nullmenge injektiv sein. Zum Beispiel ist die Polarkoordinatenabbildung $\vec{\Phi}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T$ nur auf $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$ injektiv. Zur Berechnung des Integrals einer Funktion auf der Einheitskreisscheibe K kann man aber $\vec{\Phi} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow K$ benutzen.

BEISPIEL 69. Mit der Polarkoordinatenabbildung $\vec{\Phi}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{K=\{x^2+y^2 \leq R^2\}} 1 d(x, y) &= \int_{[0,R] \times [0,2\pi]} r d(r, \phi) \\ &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r d\phi \right) dr = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2 \\ \int_{K=\{x^2+y^2 \leq R^2\}} x^2 + y^2 d(x, y) &= \int_{[0,R] \times [0,2\pi]} r^3 d(r, \phi) \\ &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r^3 d\phi \right) dr = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2} R^4 \end{aligned}$$

da $\det(D\vec{\Phi}) = r$. Das erste Integral ist wie erwartet der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius R .

BEISPIEL 70. Wir berechnen das Integral der Funktion $f(x, y, z) = x^2$ auf dem Zylinder $Z = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, h]\}$ für ein festes $h > 0$. Mit Zylinderkoordinaten $\vec{\Phi}(r, \phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)^T$ erhält man $\det(D\vec{\Phi}) = r$, $f(r, \phi, z) = r^2 \cos^2 \phi$ und

$$\begin{aligned} \int_Z x^2 d(x, y, z) &= \int_{[0,1] \times [0,2\pi] \times [0,h]} r^3 \cos^2 \phi d(r, \phi, z) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^h r^3 \cos^2 \phi dz \right) dr \right) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 h r^3 \cos^2 \phi dr \right) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{h}{4} \cos^2 \phi d\phi \\ &= \frac{\pi h}{4}, \end{aligned}$$

weil $\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \pi$ (Orthogonalitätsrelation).

BEISPIEL 71 (Rotationskörper mit Zylinderkoordinaten). Es sei $D = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq f(z)^2, z \in [a, b]\}$ der Rotationskörper für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow$

$\mathbb{R}^{\geq 0}$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist g auf D integrierbar und

$$\begin{aligned} \int_D g(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{\{z \in [a, b], \phi \in [0, 2\pi], r \in [0, f(z)]\}} g(r \cos \phi, r \sin \phi, z) r dr d\phi dz \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(z)} g(r \cos \phi, r \sin \phi, z) r dr d\phi dz. \end{aligned}$$

Für $g \equiv 1$ erhält man eine Formel für das Volumen des Rotationskörpers:

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \int_D 1 d(x, y, z) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(z)} r dr d\phi dz = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{f(z)^2}{2} d\phi dz \\ &= \int_a^b \pi f(z)^2 dz. \end{aligned}$$

BEISPIEL 72 (Volumen der Kugel). Wir berechnen das Volumen der Kugel $K = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ als $\int_K 1 d(x, y, z)$ durch Transformation auf Kugelkoordinaten, d.h. mit der Abbildung

$$\vec{\Phi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\Phi}(r, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \psi \\ r \sin \phi \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}.$$

In Beispiel 25 haben wir die Funktionaldeterminante $\det(D\vec{\Phi}) = r^2 \cos \psi$ berechnet. Nun gilt

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \int_K 1 d(x, y, z) = \int_{[0, R] \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]} r^2 \cos \psi d(r, \phi, \psi) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cos \psi d\phi \right) dr \right) d\psi \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^R 2\pi r^2 \cos \psi dr \right) d\psi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\pi}{3} R^3 \cos \psi d\psi = \frac{2\pi}{3} R^3 [\sin \psi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

BEISPIEL 73 (Gaußsches Fehlerintegral). Es wurde schon gezeigt, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$ existiert. Nun berechnen wir den Wert durch einen „Umweg“ über Integration einer Funktion in zwei Variablen. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-t^2} dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{\left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right)} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{\int_{[-R, R] \times [-R, R]} e^{-x^2 - y^2} d(x, y)}. \end{aligned}$$

Da der Kreis mit Radius $\sqrt{2}R$ das Intervall $[-R, R] \times [-R, R]$ enthält und der Kreis mit Radius R im Intervall $[-R, R] \times [-R, R]$ liegt, gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &\leq \int_{[-R, R] \times [-R, R]} e^{-x^2-y^2} d(x, y) \\ &\leq \int_{\{x^2+y^2 \leq 2R^2\}} e^{-x^2-y^2} d(x, y). \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Radius ρ berechnen wir mit Hilfe der Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_{\{x^2+y^2 \leq \rho^2\}} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \int_{[0, \rho] \times [0, 2\pi]} r e^{-r^2} d(r, \phi) = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\phi dr \\ &= \int_0^\rho 2\pi r e^{-r^2} dr = -\pi [e^{-r^2}]_0^\rho = \pi (1 - e^{-\rho^2}). \end{aligned}$$

Da $R^2 \rightarrow \infty$ und $2R^2 \rightarrow \infty$ für $R \rightarrow \infty$, gilt $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

5. Uneigentliche Integrale

Wir definieren Integrierbarkeit auf unbeschränkte Teilmengen $D \subset \mathbb{R}^n$ und für unbeschränkte Funktionen, also $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \pm\infty$ für ein $\vec{x}_0 \in \bar{D} \setminus D$. In solchen Fällen kann man keine Folge von Treppenfunktionen finden, die auf D gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir definieren Integrierbarkeit mit Hilfe von Ausschöpfungsfolgen beschränkter Teilmengen $D_\rho \subset D$ auf denen auch f beschränkt ist.

DEFINITION 17. Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine unbeschränkte, zusammenhängende Menge. Eine **Ausschöpfungsfolge** ist eine Folge $\{D_\rho \subset D\}$ beschränkter, messbarer Teilmengen mit $R_\rho = \inf_{\vec{x} \in D \setminus D_\rho} \{|\vec{x}|\} \rightarrow \infty$ für $\rho \rightarrow \infty$.

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf D **uneigentlich integrierbar**, wenn f auf jeder beschränkten, messbaren Teilmenge von D integrierbar ist und der Grenzwert

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{D_\rho} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

für jede Ausschöpfungsfolge $\{D_\rho\}$ existiert und unabhängig von der gewählten Ausschöpfung ist.

Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ unbeschränkt. Eine Folge $\{D_\rho \subset D\}$ abgeschlossener, messbarer Teilmengen heißt **Ausschöpfungsfolge**, wenn für alle ρ die Funktion $f : D_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist und $\mu(D \setminus D_\rho) \rightarrow 0$ für $\rho \rightarrow \infty$.

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf D **uneigentlich integrierbar**, wenn f auf jeder abgeschlossenen, messbaren Teilmenge von D integrierbar ist und der Grenzwert

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{D_\rho} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

für jede Ausschöpfungsfolge $\{D_\rho\}$ existiert und unabhängig von der gewählten Ausschöpfung ist.

SATZ 37 (Kriterium für positive Funktionen). Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) \geq 0$ für alle $\vec{x} \in D$ und D zusammenhängend. Die Funktion f ist genau dann auf D integrierbar, wenn

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{D_\rho} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

für eine spezielle Ausschöpfungsfolge existiert.

SATZ 38 (Absolute Integrierbarkeit). *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ und D zusammenhängend. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann auf D integrierbar, wenn $|f|$ auf D integrierbar ist.*

BEMERKUNG 21. Durch eine Koordinatentransformation kann man ein Integral über eine unbeschränkte Menge immer in ein Integral über eine beschränkte Menge transformieren. Manchmal ist dieses dann auch ein eigentliches Integral, d.h. die Funktion ist beschränkt auf dem Abschluß des Integrationsgebietes.

BEISPIEL 74. Wir untersuchen, ob die Funktion $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ auf $D = \mathbb{R}^2$ integrierbar ist. Da $f(x, y) > 0$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, genügt es, eine spezielle Ausschöpfung zu betrachten. Wir wählen $D_\rho = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{D_\rho} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \int_{[0, \rho] \times [0, 2\pi]} e^{-r^2} r d(r, \phi) = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} e^{-r^2} d\phi dr \\ &= \int_0^\rho 2\pi r e^{-r^2} dr = \pi[-e^{-r^2}]_0^\rho = \pi(-e^{-\rho^2} + 1) \end{aligned}$$

und

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{D_\rho} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \pi(-e^{-\rho^2} + 1) = \pi.$$

BEISPIEL 75. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ auf $D = \{(x, y)^T : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$. Die Funktion f ist in der Nähe des Punktes $\vec{0}$ unbeschränkt. Aber es gilt $f(x, y) > 0$ für alle $(x, y)^T \in D$. Wir betrachten die spezielle Ausschöpfungsfolge $D_\delta = \{\delta^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ mit $D_\delta \rightarrow D$ für $\delta \rightarrow 0$. Es gilt

$$\int_{D_\delta} f(x, y) d(x, y) = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} (r^2)^{-1/2} r d\phi dr = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} 1 d\phi dr = 2\pi(1 - \delta)$$

und damit $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{D_\delta} f(x, y) d(x, y) = 2\pi$. Die ist auch der Wert des Integrals $\int_D f(x, y) d(x, y)$.

BEISPIEL 76. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-2}$ auf $D = \{(x, y)^T : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$. Die Funktion f ist in der Nähe des Punktes $\vec{0}$ unbeschränkt, weil $f(x, 0) = x^{-3}$. Da f nicht positiv ist, betrachten wir $|f(x, y)| = |x|(x^2 + y^2)^{-2}$ und die spezielle Ausschöpfungsfolge $D_\delta = \{\delta^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ mit $D_\delta \rightarrow D$ für $\delta \rightarrow 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{D_\delta} f(x, y) d(x, y) &= \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} r |\cos \phi| (r^2)^{-2} r d\phi dr = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} \frac{|\cos \phi|}{r^2} d\phi dr \\ &= \int_\delta^1 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \phi}{r^2} d\phi dr = \int_\delta^1 4r^{-2} dr = -4 \left[\frac{1}{r} \right]_\delta^1 = -4 \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \end{aligned}$$

und der Grenzwert $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{D_\delta} |f(x, y)| d(x, y)$ existiert nicht. Also sind weder $|f|$ noch f auf D integrierbar.

BEISPIEL 77. Für welche α existiert das Integral der Funktion $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\alpha/2}$ auf $D = \{0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$? Da $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y)^T \in D$, genügt es,

eine spezielle Ausschöpfungsfolge zu betrachten, um diese Frage zu beantworten. Mit $D_\delta = \{\delta^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{D_\delta} f(x, y) d(x, y) &= \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} (r^2)^{\alpha/2} r d\phi dr = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} r^{\alpha+1} d\phi dr \\ &= \begin{cases} 2\pi \left[\frac{1}{\alpha+2} r^{\alpha+2} \right]_\delta^1 & \alpha \neq -1, -2 \\ 2\pi(1 - \delta) & \alpha = -1 \\ -2\pi \ln \delta & \alpha = -2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{\delta \rightarrow 0} \ln \delta = -\infty$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} (1 - \delta) = 1$ und $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{\alpha+2}$ mit $\alpha \neq -2$ genau dann existiert und $= 0$ ist, wenn $\alpha > -2$, haben wir gezeigt, dass das Integral $\int_D f(x, y) d(x, y)$ genau dann existiert, wenn $\alpha > -2$. In dem Fall gilt

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = \frac{2\pi}{\alpha + 2}.$$

Das Integral existiert also, wenn f für $r \rightarrow 0$ nicht stärker wächst als $1/r$.

BEISPIEL 78. Für welche α existiert das Integral der Funktion $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\alpha/2}$ auf der unbeschränkten Menge $D = \{x^2 + y^2 \geq 1\}$? Da $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y)^T \in D$, genügt es, eine spezielle Ausschöpfungsfolge zu betrachten, um diese Frage zu beantworten. Mit $D_\rho = \{\rho^2 \geq x^2 + y^2 \geq 1\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{D_\rho} f(x, y) d(x, y) &= \int_1^\rho \int_0^{2\pi} (r^2)^{\alpha/2} r d\phi dr = \int_1^\rho 2\pi r^{\alpha+1} d\phi dr \\ &= \begin{cases} 2\pi \left[\frac{1}{\alpha+2} r^{\alpha+2} \right]_1^\rho & \alpha \neq -1, -2 \\ 2\pi(\rho - 1) & \alpha = -1 \\ 2\pi \ln \rho & \alpha = -2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \ln \rho = \infty$, $\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho - 1) = \infty$ und $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{\alpha+2}$ mit $\alpha \neq -2$ genau dann existiert und $= 0$ ist, wenn $\alpha < -2$, haben wir gezeigt, dass das Integral $\int_D f(x, y) d(x, y)$ genau dann existiert, wenn $\alpha < -2$. In dem Fall gilt

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = -\frac{2\pi}{\alpha + 2}.$$

Das Integral existiert also, wenn f für $r \rightarrow \infty$ stärker als $1/r$ abfällt.

Kurven, Flächen, Integralsätze

1. Kurvenlängen und Flächeninhalte

Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ lassen sich durch ein System von Gleichungen und Ungleichungen beschreiben oder als Bild einer Abbildung.

BEISPIEL 79 (Kreis). Der Kreis vom Radius R um den Koordinatenursprung ist die Menge $M = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 = R^2\}$, d.h. M ist durch eine Gleichung gegeben. Aber es gilt auch $M = \gamma([0, 2\pi])$ mit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)^T$, d.h. M ist das Bild einer Abbildung einer Veränderlichen.

BEISPIEL 80 (Sphäre). Die Kugel mit Radius R ist die Menge $M = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, d.h. M ist durch eine Gleichung gegeben. Aber es gilt auch $M = \vec{\Phi}([0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2])$ mit $\vec{\Phi}(\phi, \psi) = (R \cos \phi \cos \psi, R \sin \phi \cos \psi, R \sin \psi)^T$, d.h. M ist das Bild einer Abbildung von zwei Veränderlichen.

BEISPIEL 81 (Graph einer Funktion). Der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Menge $M = \{(\vec{x}, y) : y = f(\vec{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, also gegeben durch eine Gleichung, oder eben das Bild der Abbildung $\vec{x} \mapsto (\vec{x}, f(\vec{x}))^T$.

BEISPIEL 82 (Gerade, Strecke). Eine Gerade durch zwei Punkte $\vec{x}_0 \neq \vec{x}_1$ ist die Menge $M = \{\vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) : t \in \mathbb{R}\}$, also das Bild der Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$. Die Menge M läßt sich auch durch Gleichungen beschreiben. Dazu sei $\{\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $M = \{\vec{x} : \langle \vec{x} - \vec{x}_0, \vec{v}_j \rangle = 0 \forall j\}$.

Eine Strecke von $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}_1$ erhält man durch Einschränkung des Definitionsbereiches von γ auf das Intervall $[0, 1]$.

BEISPIEL 83 (Ebene). Eine Ebene durch die Punkte $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2$ mit der Eigenschaft $\vec{x}_1 - \vec{x}_0$ und $\vec{x}_2 - \vec{x}_0$ sind linear unabhängig ist die Menge

$$M = \{\vec{x}_0 + t_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + t_2(\vec{x}_2 - \vec{x}_0) : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\},$$

also das Bild der Abbildung $\vec{\Phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\vec{\Phi}(t_1, t_2) = \vec{x}_0 + t_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + t_2(\vec{x}_2 - \vec{x}_0).$$

Auch eine Ebene kann man durch Gleichungen beschreiben. Dazu sei $\{\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$ Basis von $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass $\vec{v}_j$ für alle j senkrecht auf $\vec{x}_1 - \vec{x}_0$ und $\vec{x}_2 - \vec{x}_0$ steht. Dann gilt $M = \{\vec{x} : \langle \vec{x} - \vec{x}_0, \vec{v}_j \rangle = 0 \forall j\}$.

BEISPIEL 84 (Schraubenlinie). Zu gegebenen Konstanten $R > 0$ und $h > 0$ heißt die Menge $M = \{(R \cos t, R \sin t, ht)^T : t \in \mathbb{R}\}$ Schraubenlinie. Sie ist das Bild der Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, ht)^T$. Eine Beschreibung der Menge M durch Gleichungen ist $M = \{(x, y, z)^T : x = R \cos(z/h), y = R \sin(z/h)\}$.

BEISPIEL 85 (Zylindermantel). Der Zylindermantel mit Radius R und Höhe h ist die Menge $M = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq h\}$, also gegeben durch eine Gleichung und zwei Ungleichungen. Mit Zylinderkoordinaten (und $r = R$) gilt $M = \vec{\Phi}([0, 2\pi] \times [0, h])$, $\vec{\Phi}(\phi, z) = (R \cos \phi, R \sin \phi, z)^T$.

BEISPIEL 86 (Kegel). Die Menge $M = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 = (z - h)^2, 0 \leq z \leq h\}$ ist ein Kegel der Höhe h und Radius der Grundfläche R . Er ist durch eine Gleichung und zwei Ungleichungen gegeben. Außerdem gilt $M = \vec{\Phi}([0, 2\pi] \times [0, h])$ mit

$$\vec{\Phi}(\phi, z) = \left(\frac{R}{h}(h - z) \cos \phi, \frac{R}{h}(h - z) \sin \phi, z \right)^T.$$

BEISPIEL 87 (Paraboloid als Beispiel einer Rotationsfläche). Die Menge $M = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 = z\}$ ist ein Paraboloid und durch eine Gleichung gegeben. Außerdem gilt $M = \vec{\Phi}([0, 2\pi] \times [0, \infty))$ mit $\vec{\Phi}(\phi, \zeta) = (\zeta \cos \phi, \zeta \sin \phi, \zeta^2)^T$.

Die in den Beispielen beschriebenen Mengen sind Nullmengen in den Räumen, in denen sie eingebettet sind, denn sie enthalten keine inneren Punkte. Trotzdem haben sie als ein- bzw. zweidimensionale Objekte eine Länge bzw. einen Flächeninhalt. Zur Bestimmung dieses Maßes muß man die richtige Anzahl von Integrationsvariablen einführen.

1.1. Kurven.

DEFINITION 18. Eine **Kurve** ist das Bild $\gamma([a, b])$ einer Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Kurve heißt **glatt**, wenn γ eine stetig differenzierbare Abbildung ist und $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in [a, b]$. Die Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Parametrisierung** der Kurve $\gamma([a, b])$, wenn γ stetig differenzierbar, injektiv auf (a, b) und $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in [a, b]$.

Eine Kurve K heißt **stückweise glatt**, wenn endlich viele Parametrisierungen $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatter Kurven $K_j = \gamma_j([a_j, b_j])$ existieren, so dass $K = \cup_j K_j$, $\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$ und $\gamma_j(a_j, b_j) \cap \gamma_k(a_k, b_k) = \emptyset$ für alle $j \neq k$.

Kreise, Geraden, Strecken, Schraubenlinien und Graphen glatter Funktionen einer Variablen aus den Beispielen sind glatte Kurven.

BEISPIEL 88 (Einheitsquadrat). Der Rand der Menge $M = \{(x, y)^T : |x|, |y| \leq 1\}$ ist eine stückweise glatte Kurve, die aus den Strecken $\gamma_1(t) = (1, t)^T$, $\gamma_2(t) = (1 - t, 1)^T$, $\gamma_3(t) = (-1, 1 - t)^T$ und $\gamma_4(t) = (-1 + t, -1)^T$ mit $t \in [-1, 1]$ besteht.

DEFINITION 19. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung einer glatten Kurve. Dann ist die **Kurvenlänge** der Kurve $\gamma([a, b])$ der Wert

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Die Länge einer stückweisen glatten Kurve ist die Summe der Längen der glatten Teilkurven.

Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung der glatten Kurve, denn wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma}([\tilde{a}, \tilde{b}]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Parametrisierungen der Kurve K sind, so ist die Funktion $h : [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ mit $h(t) = \tilde{\gamma}^{-1}(\gamma(t))$ eine glatte

Funktion und aus der Substitutionsregel folgt

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\dot{\gamma}(\tilde{t})| d\tilde{t} = \int_{h^{-1}(\tilde{a})}^{h^{-1}(\tilde{b})} |\dot{\gamma}(h(t))| h'(t) dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(h(t)) h'(t)| dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Die Ableitung $\dot{\gamma}$ der Parametrisierung γ bildet einen Tangentialvektor an den Punkt t der Länge 1 auf einen Tangentialvektor an den Punkt $\gamma(t)$ der Länge $|\dot{\gamma}(t)|$ ab.

BEISPIEL 89 (Kreis). Mit $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)^T$ und $t \in [0, 2\pi]$ gilt

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

BEISPIEL 90 (Schraubenlinie). Mit $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, ht)^T$ und $t \in [0, 2\pi]$, dies entspricht einer Umdrehung, gilt

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(R \sin t)^2 + (R \cos t)^2 + h^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + h^2} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}.$$

BEISPIEL 91 (Ellipse). Mit der Parametrisierung $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)^T$ für $t \in [0, 2\pi]$ der Ellipse $\{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$ ($b > a$) gilt

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (b \cos t)^2} dt = b \int_0^{2\pi} \sqrt{-\frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 t + 1} dt.$$

Dies ist ein elliptisches Integral zweiter Art und kann nur mit Hilfe einer Reihenentwicklung berechnet werden.

1.2. Flächen.

DEFINITION 20. Eine **Fläche** ist das Bild $\vec{\Phi}(D)$ einer Abbildung $\vec{\Phi} : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei D eine messbare Menge ist. Die Fläche heißt **glatt**, wenn $\vec{\Phi}$ eine stetig differenzierbare Abbildung ist und $D\vec{\Phi}$ in jedem Punkt Rank 2 hat. Die Abbildung $\vec{\Phi} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt **Parametrisierung** der Fläche $\vec{\Phi}(D)$, wenn $\vec{\Phi}$ stetig differenzierbar, bijektiv auf dem Inneren D° und $D\vec{\Phi}$ für alle Punkte in D maximalen Rang hat.

Eine Fläche S heißt **stückweise glatt**, wenn endlich viele Parametrisierungen $\vec{\Phi}_j : D_j \rightarrow \mathbb{R}^3$ glatter Flächen $S_j = \vec{\Phi}_j(D_j)$ existieren, so dass $S = \cup_j S_j$ und $\vec{\Phi}_j(D_j^\circ) \cap \vec{\Phi}_k(D_k^\circ) = \emptyset$ für alle $j \neq k$.

Sphäre, Ebene, Zylindermantel, Paraboloid, Kegel und Graphen glatter Funktionen zweier Veränderlicher sind Beispiele glatter Flächen in $\mathbb{R}^3$.

BEISPIEL 92 (Zylinder). Die Oberfläche des Zylinders mit Höhe h besteht aus drei glatten Flächen, dem Zylindermantel $\vec{\Phi}(\phi, z) = (R \cos \phi, R \sin \phi, z)^T$ mit $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, h]$, dem Deckel mit $\vec{\Phi}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, h)^T$ mit $r \in [0, R]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ und dem Boden mit $\vec{\Phi}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, 0)^T$ mit $r \in [0, R]$, $\phi \in [0, 2\pi]$.

DEFINITION 21. Es sei $\vec{\Phi} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung einer glatten Fläche. Dann ist der **Oberflächeninhalt** $O(S)$ der Fläche $\vec{\Phi}(D) = S$ der Wert

$$O(\vec{\Phi}) = O(S) = \int_D \left| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) \right| d(u, v).$$

Der Flächeninhalt einer stückweisen glatten Fläche ist die Summe der Flächeninhalte der glatten Teilflächen, aus denen sie zusammengesetzt ist.

Auch diese Definition ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung. Der Vektor

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v)$$

steht senkrecht zur Fläche S im Punkt $\vec{\Phi}(u, v)$, er ist ein Normalenvektor, und hat den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \text{ und } \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v)$$

aufgespannt wird. Dieses Parallelogramm ist das Bild eines tangentialen Einheitsquadrats an D im Punkt $(u, v)^T$ unter der Abbildung $D\vec{\Phi}$.

BEISPIEL 93 (Kugeloberfläche). Die Abbildung $\vec{\Phi}(\phi, \psi) = (R \cos \phi \cos \psi, R \sin \phi \cos \psi, R \sin \psi)^T$ mit $\phi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ ist eine Parametrisierung der Oberfläche S der Kugel mit Radius R . Es gilt

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi}(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} -R \sin \phi \cos \psi \\ R \cos \phi \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \psi}(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} -R \cos \phi \sin \psi \\ -R \sin \phi \sin \psi \\ R \cos \psi \end{pmatrix}$$

und damit wegen $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = \cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1$

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi}(\phi, \psi) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \psi}(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} R^2 \cos \phi \cos^2 \psi \\ R^2 \sin \phi \cos^2 \psi \\ R^2 \sin \psi \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi}(\phi, \psi) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \psi}(\phi, \psi) \right| = R^2 \cos \psi.$$

Es folgt

$$O(S) = \int_{[0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]} R^2 \cos \psi d(\phi, \psi) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos \psi d\psi d\phi = 4\pi R^2.$$

1.3. Flächeninhalt von Gebieten in $\mathbb{R}^2$, die von Kurven begrenzt werden. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$ und $x'(t) > 0$ und $y(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Wir betrachten die Menge

$$S = \{(x(t), y)^T : t \in [a, b], 0 \leq y \leq y(t)\},$$

also die Fläche zwischen der x -Achse und der Kurve γ . Betten wir die xy -Ebene in den $\mathbb{R}^3$ ein, so ist die Fläche S durch $\vec{\Phi}(t, \eta) = (x(t), \eta, 0)^T$ mit $t \in [a, b]$ und $\eta \in [0, y(t)]$ parametrisiert. Es gilt

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

und damit

$$O(S) = \int_a^b \int_0^{y(t)} |x'(t)| d\eta dt = \int_a^b \int_0^{y(t)} x'(t) d\eta dt = \int_a^b x'(t) y(t) dt.$$

BEISPIEL 94 (Halbkreis). Der Halbkreis S ist von der x -Achse und der Kurve $\gamma(t) = (R \cos t, -R \sin t)^T$ mit $t \in [\pi, 2\pi]$ begrenzt. Es folgt

$$O(S) = \int_{\pi}^{2\pi} (-R \sin t)(-R \sin t) dt = R^2 \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2} R^2.$$

Es sei γ eine Kurve mit $\gamma(\phi) = (r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin(\phi))^T$ mit $\phi \in [a, b]$ und $r(\phi) \geq 0$ für alle ϕ . Wir betrachten die Fläche $S = \{(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)^T : \phi \in [\alpha, \beta], \rho \in [0, r(\phi)]\}$, also die Fläche, die von der Kurve γ und den Strahlen $\{(r \cos \alpha, r \sin \alpha)^T : r \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}$ und $\{(r \cos \beta, r \sin \beta)^T : r \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}$ begrenzt wird. Betten wir die xy -Ebene in den $\mathbb{R}^3$ ein, so ist die Fläche S durch $\vec{\Phi}(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 0)^T$ mit $\phi \in [\alpha, \beta]$ und $\rho \in [0, r(\phi)]$ parametrisiert. Es gilt

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$O(S) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{r(\phi)} \rho \, d\rho \, d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=r(\phi)} d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r(\phi)^2}{2} d\phi.$$

BEISPIEL 95 (Halbkreis in Polarkoordinaten). Mit $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ und $r(\phi) = R$ ergibt sich als Fläche S der Halbkreis. Es folgt $O(S) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} R^2 d\phi = \pi R^2/2$.

BEISPIEL 96 (Spirale). Die Archimedische Spirale ist die Kurve $\gamma(t) = t(\cos t, \sin t)^T$ mit $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ und $r(\phi) = \phi$ ergibt sich für die umrundete Fläche S der Flächeninhalt $O(S) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \phi^2 d\phi = 4\pi^3/6$.

2. Vektorfelder

DEFINITION 22. Ein **Vektorfeld** ist eine Abbildung $\vec{v} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ein Vektorfeld $\vec{v}$ ordnet jedem Punkt $\vec{x} \in D$ einen Vektor $\vec{v}(\vec{x})$ zu.

2.1. Beispiele für Vektorfelder. Vektorfelder treten auf als Kraftfelder, elektrische Felder z.B. eines Plattenkondensators oder einer Punktladung, magnetische Felder, z.B. einer Spule, Gradientenfelder $\vec{v}(\vec{x}) = (\text{grad } f)_{\vec{x}}$ einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, als Menge von Tangentialvektoren $\vec{v}(\vec{x}) = \dot{\gamma}(t)$ zu einer Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} = \gamma(t)$ oder als Menge von Normalenvektoren $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\Phi}_u \times \vec{\Phi}_v$ einer parametrisierten Fläche $\vec{\Phi} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} = \vec{\Phi}(u, v)$.

2.2. Darstellung von Vektorfeldern. Für ein Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$ kann man zu einer diskreten Menge von Argumenten $\{\vec{x}_j\} \subset D$ die Vektoren $\vec{v}(\vec{x}_j)$ mit Fußpunkt $\vec{x}_j$ zeichnen. Oft werden Vektorfelder auch durch Feldlinien dargestellt.

DEFINITION 23. Es seien $\vec{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Eine **Feldlinie** des Vektorfeldes $\vec{v}$ durch $\vec{x}_0$ ist eine Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $0 \in (a, b)$, $\gamma(0) = \vec{x}_0$ und $\dot{\gamma}(t) = \vec{v}(\gamma(t))$.

Ein Vektorfeld ist in jedem Punkt $\vec{x}_0$ tangential an die Feldlinie durch diesen Punkt.

2.3. Existenz von Feldlinien. Die lokale Existenz von Feldlinien zu einem gegebenen differenzierbaren Vektorfeld $\vec{v}$ folgt aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, denn die Feldlinie γ ist die Lösung der Differentialgleichung $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}(\vec{x})$ mit Anfangswert $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$. Falls $\vec{v}$ eine lineare Abbildung ist, dies entspricht linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen, so existieren die Feldlinien global, d.h. $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert.

BEISPIEL 97. Es sei $\vec{v}$ ein lineares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$. Durch Wahl einer geeigneten Basis gilt $\vec{v}(x, y) = (\lambda x, \mu y)^T$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ oder $\vec{v}(x, y) = (ax - by, bx + ay)^T$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Kurvenintegral - Zirkulation eines Vektorfeldes entlang einer Kurve

Das Kurvenintegral sammelt in jedem Punkt $\gamma(t)$ einer Kurve γ den Anteil des Vektors $\vec{v}(\gamma(t))$ ein, der in Richtung der Kurve γ liegt, also tangential zu Kurve verläuft.

DEFINITION 24. Es sei $\vec{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung der Kurve $\gamma([a, b])$. Dann ist die **Zirkulation** des Vektorfeldes $\vec{v}$ entlang der Kurve γ der Wert

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_a^b \langle \vec{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

BEMERKUNG 22. Aus der Eigenschaft $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$ für alle t folgt, dass in jedem Punkt der Kurve der Einheitstangentenvektor $\dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)|$ existiert. Der Integrand ist also

$$\langle \vec{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = \left\langle \vec{v}(\gamma(t)), \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \right\rangle |\dot{\gamma}(t)|$$

Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Geschwindigkeit der gewählten Parametrisierung, aber die Durchlaufrichtung der Kurve muss beachtet werden. Umkehr der Durchlaufrichtung führt zum entgegengesetzten Vorzeichen beim Kurvenintegral.

BEISPIEL 98. Wir berechnen die Zirkulation des Vektorfeldes $\vec{v}(x, y) = (-y, x)^T$ entlang des Weges $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$ mit $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ (Halbkreis) und entlang des Weges $\sigma(t) = (0, t)^T$ mit $t \in [-1, 1]$. Beide Wege führen von $(0, -1)^T$ zu $(0, 1)^T$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{v}(\cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t)^T \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle (-\sin t, \cos t)^T, (-\sin t, \cos t)^T \rangle dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dt = \pi \\ \int_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{x} &= \int_{-1}^1 \langle \vec{v}(\sigma(t)), \dot{\sigma}(t) \rangle dt \\ &= \int_{-1}^1 \langle \vec{v}(0, t), (0, 1)^T \rangle dt \\ &= \int_{-1}^1 \langle (-t, 0)^T, (0, 1)^T \rangle dt = \int_{-1}^1 0 dt = 0. \end{aligned}$$

Kehren wir die Durchlaufrichtung des Weges γ um, so betrachten wir die Parametrisierung $\gamma_-(t) = (\cos t, -\sin t)^T$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_-} \vec{v} \cdot d\vec{x} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{v}(\gamma_-(t)), \dot{\gamma}_-(t) \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{v}(\cos t, -\sin t), (-\sin t, -\cos t)^T \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle (\sin t, \cos t)^T, (-\sin t, -\cos t)^T \rangle dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -1 dt = -\pi.\end{aligned}$$

BEISPIEL 99. Nun berechnen wir die Zirkulation des Vektorfeldes $\vec{w}(x, y) = (x, y)^T$ entlang der Wege γ und σ . Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{v}(\cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t)^T \rangle dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle (\cos t, \sin t)^T, (-\sin t, \cos t)^T \rangle dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 0 dt = 0 \\ \int_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{x} &= \int_{-1}^1 \langle \vec{v}(\sigma(t)), \dot{\sigma}(t) \rangle dt \\ &= \int_{-1}^1 \langle \vec{v}(0, t), (0, 1)^T \rangle dt \\ &= \int_{-1}^1 \langle (0, t)^T, (0, 1)^T \rangle dt = \int_{-1}^1 t dt = 0.\end{aligned}$$

Beide Kurvenintegral stimmen überein. Auch für das Kurvenintegral entlang des Weges

$$\kappa(t) = \begin{cases} (t, -1)^T & 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-2)^T & 1 \leq t \leq 3 \\ (4-t, 1)^T & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

verschwindet, denn

$$\begin{aligned}\int_{\kappa} \vec{v} \cdot d\vec{x} &= \int_0^4 \langle \vec{v}(\kappa(t)), \dot{\kappa}(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle \vec{v}(t, -1), (1, 0)^T \rangle dt + \int_1^3 \langle \vec{v}(1, t-2), (0, 1)^T \rangle dt \\ &\quad + \int_3^4 \langle \vec{v}(4-t, 1), (-1, 0)^T \rangle dt \\ &= \int_0^1 t dt + \int_1^3 t-2 dt + \int_3^4 t-4 dt = \int_0^1 t dt + \int_{-1}^1 s ds + \int_{-1}^0 s ds = 0\end{aligned}$$

Dies ist kein Zufall, denn $\vec{w} = \text{grad } f$ mit $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$.

4. Rotation und Gradientenfelder

DEFINITION 25. Ein Vektorfeld $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Gradientenfeld**, falls eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \text{grad } f$ existiert. Die Funktion f heißt dann **Potential** des Vektorfeldes $\vec{v}$.

Es gilt

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_a^b \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \frac{d(f \circ \gamma)(t)}{dt} dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Wenn $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist, so hängt das Kurvenintegral von $\vec{v}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.

DEFINITION 26. Es sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ ein differenzierbares Vektorfeld. Die **Rotation** des Vektorfeldes ist ein Vektorfeld $\text{rot } \vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$(\text{rot } \vec{v}) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, -\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^T.$$

Wenn $(\text{rot } \vec{v})(\vec{x}) \neq \vec{0}$, so hat $\vec{v}$ im Punkt $\vec{x}$ ein **Wirbel** mit Drehachse $(\text{rot } \vec{v})(\vec{x})$. Wenn $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$, so heißt das Vektorfeld $\vec{v}$ **wirbelfrei**.

Die Länge des Vektors $(\text{rot } \vec{v})(\vec{x})$ ist ein Maß für die Stärke des Wirbels. Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ berechnet man durch Identifikation des $\mathbb{R}^2$ mit der Ebene $\{x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, d.h. $v_3 \equiv 0$ und v_1 und v_2 hängen nicht von x_3 ab. In dem Fall verschwinden die erste und zweite Komponente des Vektors $\text{rot } \vec{v}$ und man notiert nur die dritte Komponente.

BEISPIEL 100 (Ortsvektorfeld). Wenn $\vec{v}(x, y) = (x, y)^T$, dann $\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0$.

Wenn $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$, dann $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$, da $\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = 0$ für $j \neq k$.

BEISPIEL 101. Das Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = (-y, x)^T$ hat die Rotation $\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial -y}{\partial y} = 2$, besitzt also in jedem Punkt einen Wirbel.

BEISPIEL 102 („ $d\phi$ “). Das Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = (-y/r^2, x/r^2)^T$ mit $r^2 = x^2 + y^2$ ist nur auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ definiert. Dort gilt

$$(\text{rot } \vec{v})(x, y) = \left(\frac{x}{r^2} \right)_x - \left(-\frac{y}{r^2} \right)_y = \frac{1}{r^2} - \frac{x}{r^4} 2x + \frac{1}{r^2} - \frac{y}{r^4} 2y = 0.$$

Das Vektorfeld ist wirbelfrei auf D .

SATZ 39 (Poincarésches Lemma). Es sei $D = [\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^3$ ein Quader. Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn es wirbelfrei ist, d.h. $\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{0}$.

BEWEIS. Wenn $\vec{v} = \text{grad } f$, dann gilt $v_j = f_{x_j}$. Da $\vec{v}$ stetig differenzierbar ist, kann man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion f vertauschen, also

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = f_{x_j x_k} - f_{x_k x_j} = 0.$$

Die Komponenten der Rotation sind, bis auf das Vorzeichen, genau diese Ausdrücke.

Wenn $\operatorname{rot} \vec{v} \equiv \vec{0}$, so konstruieren wir eine Stammfunktion f . Dazu wählen wir einen Bezugspunkt $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T \in D$. Für $\vec{x} = (x, y, z)^T \in D$ betrachten wir die aus den drei Strecken

$$\gamma_x(t) = \begin{pmatrix} t \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad x_0 \leq t \leq x, \quad \gamma_y(t) = \begin{pmatrix} x \\ t \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad y_0 \leq t \leq y, \quad \gamma_z(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}, \quad z_0 \leq t \leq z$$

zusammengesetzten Weg γ und definieren

$$f(\vec{x}) := \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_{x_0}^x v_1(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y v_2(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z v_3(x, y, t) dt.$$

Man prüft, dass $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ gilt. Mit Hilfe der Formel für die Ableitung parameterabhängiger Integrale erhält man zum Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= v_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z \frac{\partial v_3}{\partial x}(x, y, t) dt \\ &= v_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z \frac{\partial v_1}{\partial z}(x, y, t) dt \\ &= v_1(x, y_0, z_0) + [v_1(x, t, z_0)]_{t=y_0}^{t=y} + [v_1(x, y, t)]_{t=z_0}^{t=z} = v_1(x, y, z), \end{aligned}$$

da $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$ und $\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial x}$ in einem wirbelfreien Vektorfeld. $\square$

DEFINITION 27. Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jede stetige Kurve $h_0 : [0, 1] \rightarrow D$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = \vec{x}_0$ in D zu einer konstanten Abbildung $h_1 : [0, 1] \rightarrow D$ mit $h_1(t) = \vec{x}_0$ zusammenziehen läßt.

BEISPIEL 103 (einfach zusammenhängende Mengen). $\mathbb{R}^n$, abgeschlossene Intervalle, ε -Umgebungen, Kugeloberfläche bzw. -schale

BEISPIEL 104 (nicht einfach zusammenhängende Mengen). Kreisring, $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$, Komplement von Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$, Hohlzylinder (Rohr), Torus (Schwimmring)

SATZ 40. Es seien D ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn es wirbelfrei ist.

Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn für alle Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ gilt $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Wenn ein Vektorfeld $\vec{v}$ ein Potential besitzt, also eine Funktion f mit $\vec{v} = \operatorname{grad} f$, so kann man diese Funktion f bestimmen, indem man das System der partiellen Differentialgleichungen $v_j = f_{x_j}$ löst.

BEISPIEL 105. Das Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = (x, y)^T$ ist wirbelfrei auf der einfach zusammenhängenden Menge $\mathbb{R}^2$ und besitzt deshalb ein Potential f . Aus den Gleichungen $f_x(x, y) = v_1(x, y) = x$ und $f_y(x, y) = v_2(x, y) = y$ folgt erst $f(x, y) = x^2/2 + g(y)$, dann $f_y(x, y) = g'(y) = y$, also $g(y) = y^2/2 + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2 + c$ ist also die allgemeine Form des Potentials des Vektorfeldes $\vec{v}$.

BEISPIEL 106. Das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = r^{-3}\vec{x}$ mit $r = |\vec{x}|$ ist auf der einfach zusammenhängenden Menge $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ definiert und wirbelfrei, da für $j \neq k$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = x_j \frac{\partial r^{-3}}{\partial x_k} = x_j (-3)r^{-4} \frac{\partial r}{\partial x_k} = -3r^{-5} x_j x_k.$$

Ein Potential f von $\vec{v}$ erfüllt für $j = 1, 2, 3$ die Gleichungen $f_{x_j}(\vec{x}) = x_j r^{-3}$. Für $j = 1$ erhält man $f(\vec{x}) = -r^{-1} + g(x_2, x_3)$, dann $f_{x_2}(\vec{x}) = x_2 r^{-3} + g_{x_2}(x_2, x_3)$, also $g_{x_2} \equiv 0$ und damit $g(x_2, x_3) = h(x_3)$. Dann folgt $f_{x_3}(\vec{x}) = x_3 r^{-3} + h'(x_3)$, also auch $h' \equiv 0$, d.h. $h(x_3) \equiv c$. Das gesuchte Potential des Vektorfeldes $\vec{v}$ ist die Funktion $f(\vec{x}) = c - 1/r$.

BEISPIEL 107. Das Vektorfeld $\vec{v} = (x^2 - y^2, -2xy)^T$ ist wirbelfrei auf $\mathbb{R}^2$, denn

$$\frac{\partial}{\partial x}(-2xy) = -2y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2).$$

Also besitzt $\vec{v}$ ein Potential f . Aus den Gleichungen $f_x(x, y) = v_1(x, y) = x^2 - y^2$ und $f_y(x, y) = v_2(x, y) = -2xy$ folgt erst $f(x, y) = x^3/3 - y^2x + g(y)$, dann $f_y(x, y) = -2xy + g'(y) = -2xy$, also $g(y) = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f(x, y) = x^3/3 - xy^2 + c$ ist also die allgemeine Form des Potentials des Vektorfeldes $\vec{v}$.

SATZ 41. Wenn $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf einer zusammenhängenden Menge D ein Potential besitzt, so ist dieses bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Wenn $\vec{v} = \text{grad } f = \text{grad } g$, dann $\text{grad}(f - g) = \vec{0}$ auf einer zusammenhängenden Menge. Daraus folgt, dass $f - g \equiv c$. $\square$

BEMERKUNG 23. Die additive Konstante entspricht in der Konstruktion des Potentials der Wahl des Bezugspunktes $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$.

5. Flächenintegrale - Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche

Das Flächenintegral sammelt in jedem Punkt $\vec{\Phi}(u, v)$ einer Fläche $S = \vec{\Phi}(D)$ den Anteil des Vektors $\vec{v}(\vec{\Phi}(u, v))$ ein, der senkrecht zur Fläche S im Punkt $\vec{\Phi}(u, v)$ steht.

DEFINITION 28. Es sei $\vec{\Phi} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung einer glatten Fläche $S = \vec{\Phi}(D)$ und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Dann ist der **Fluss** des Vektorfeld $\vec{v}$ durch die Fläche S der Wert

$$\int_{\vec{\Phi}} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} := \int_D \left\langle \vec{v}(\vec{\Phi}(u, v)), \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) \right\rangle d(u, v)$$

BEMERKUNG 24. Da die Ableitung $D\vec{\Phi}$ Parametrisierung $\vec{\Phi}$ in jedem Punkt maximalen Rang, also Rang 2 hat, verschwindet der Normalenvektor

$$\vec{n}(\vec{\Phi}(u, v)) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v)$$

in keinem Punkt so dass für alle $(u, v)^T \in D$ der Einheitsnormalenvektor

$$\frac{\vec{n}(\vec{\Phi}(u, v))}{|\vec{n}(\vec{\Phi}(u, v))|}$$

existiert.

In jedem Punkt $\vec{x} \in S$ einer glatten Fläche S gibt es genau zwei Einheitsnormalenvektoren, d.h. Vektoren der Länge 1, die senkrecht auf der Fläche stehen. Die Wahl/Vorgabe eines dieser beiden ist die **Orientierung** der Fläche S . Man muss eine orientierte Fläche so parametrisieren, dass $\vec{n}(\vec{\Phi}(u, v))/|\vec{n}(\vec{\Phi}(u, v))|$ für alle $(u, v)^T \in D$ dieser vorgegebene Vektor ist.

Ist eine Fläche aus mehreren glatten Flächenstücken zusammengesetzt, so wählt man die Parametrisierungen der einzelnen Flächenstücke so, dass die Orientierungen zusammenpassen und der Fluß durch die Gesamtfläche ist die Summe der Flüsse durch die einzelnen Flächenstücke.

BEISPIEL 108 (Fluß des Ortsvektorfeldes durch die Kugeloberfläche). Wir berechnen den Fluß des Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch die Oberfläche S der Kugel mit Radius R , deren Einheitsnormalenvektor nach außen zeigt. Für die Parametrisierung der Fläche S durch

$$\vec{\Phi}(\phi, \psi) = (R \cos \phi \cos \psi, R \sin \phi \cos \psi, R \sin \psi)^T \text{ mit } \phi \in [0, 2\pi], \psi \in [-\pi/2, \pi/2]$$

gilt

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R \sin \phi \cos \psi \\ R \cos \phi \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \psi} = \begin{pmatrix} -R \cos \phi \sin \psi \\ -R \sin \phi \sin \psi \\ R \cos \psi \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi}(\phi, \psi) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \psi}(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} R^2 \cos \phi \cos^2 \psi \\ R^2 \sin \phi \cos^2 \psi \\ R^2 \sin \psi \cos \psi \end{pmatrix} = R \cos \psi \vec{\Phi}(\phi, \psi),$$

wobei der Normalenvektor immer in die gleiche Richtung wie der Ortsvektor $\vec{\Phi}(\phi, \psi)$ zeigt, weil $R \cos \psi > 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\Phi}} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \vec{v}(\vec{\Phi}(\phi, \psi)), R \cos \psi \vec{\Phi}(\phi, \psi) \rangle d\psi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos \psi \langle \vec{\Phi}(\phi, \psi), \vec{\Phi}(\phi, \psi) \rangle d\psi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos \psi \left| \vec{\Phi}(\phi, \psi) \right|^2 d\psi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos \psi R^2 d\psi d\phi = R^3 \int_0^{2\pi} [\sin \psi]_{\psi=-\pi/2}^{\psi=\pi/2} d\phi = 4\pi R^3. \end{aligned}$$

Der Fluß des Ortsvektorfeldes durch die Kugeloberfläche ist $4\pi R^3$. Dies ist das Dreifache des Kugelvolumens und 3 ist die Spur der Matrix $D\vec{v}$.

6. Integralsätze von Stokes und Green

Wir betrachten die Fläche $S = \{(x, y, 0)^T : 0 \leq x, y \leq 1\}$, also ein Quadrat in der xy -Ebene. Mit der Parametrisierung $\vec{\Phi}(x, y) = (x, y, 0)^T$ für $x, y \in [0, 1]$ erhält man den Einheitsnormalenvektor

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Fluß eines Vektorfeldes $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ durch die Fläche S ist

$$\int_{\vec{\Phi}} \vec{w} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{[0,1] \times [0,1]} \left\langle \vec{w}(\vec{\Phi}(x, y)), \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial y} \right\rangle d(x, y) \int_{[0,1] \times [0,1]} w_3(x, y, 0) d(x, y).$$

Wenn $\vec{w}$ ein Wirbelfeld ist, also $\vec{w} = \text{rot } \vec{v}$ für ein Vektorfeld $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, dann

$$w_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\Phi}} \vec{w} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y, 0) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y, 0) d(x, y) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y, 0) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y, 0) dy dx \\ &= \int_0^1 [v_2(x, y, 0)]_{y=0}^{y=1} dy - \int_0^1 [v_1(x, y, 0)]_{x=0}^{x=1} dx \\ &= \int_0^1 v_2(1, y, 0) dy - \int_0^1 v_2(0, y, 0) dy - \int_0^1 v_1(x, 1, 0) dx + \int_0^1 v_1(x, 0, 0) dx \\ &= \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{x} + \int_{-\gamma_4} \vec{v} \cdot d\vec{x} + \int_{-\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{x} + \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} \end{aligned}$$

mit $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ ein Weg der aus vier glatten Teilkurven besteht und

$$\gamma_1(t) = (t, 0, 0)^T, \dot{\gamma}(t) = (1, 0, 0)^T, t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (1, t, 0)^T, \dot{\gamma}(t) = (0, 1, 0)^T, t \in [0, 1]$$

$$\gamma_3(t) = (t, 1, 0)^T, \dot{\gamma}(t) = (1, 0, 0)^T, t \in [0, 1]$$

$$\gamma_4(t) = (0, t, 0)^T, \dot{\gamma}(t) = (0, 1, 0)^T, t \in [0, 1]$$

Dies ist die einfachste Form der Integralsätze von Stokes und Green, die den Fluß des Wirbelfeldes durch eine Fläche mit der Zirkulation des Feldes entlang des Randes der Fläche verbinden. Der Integralsatz von Green formuliert diesen Sachverhalt für Flächen in $\mathbb{R}^2$, der Integralsatz von Stokes für Flächen in $\mathbb{R}^3$.

SATZ 42 (Integralsatz von Green). *Es seien $S \subset \mathbb{R}^2$ eine stückweise glatte Fläche mit stückweise glattem Rand ∂S und $\vec{v} = (v_1, v_2)^T : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_S \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y) d(x, y) = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x},$$

wobei der Rand ∂S so parametrisiert ist, dass die Fläche S beim Durchlaufen des Randes immer links liegt.

BEMERKUNG 25. Wenn in der Umgebung U eines Punktes $\vec{x} \in \partial S$ die Fläche S mit Hilfe einer Funktion $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ als $S \cap U = \{\vec{x} \in U : \phi(\vec{x}) < 0\}$ gegeben ist, dann muss der Rand ∂S so durch eine Kurve γ parametrisiert sein, dass die Determinante der $(2, 2)$ -Matrix $((\text{grad } \phi)_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t))$ positiv ist.

SATZ 43 (Integralsatz von Stokes). *Es seien $S \subset \mathbb{R}^3$ eine stückweise glatte Fläche mit stückweise glattem Rand ∂S und $\vec{v} : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x},$$

wobei die Parametrisierungen des Randes $\partial S = \vec{\Phi}(\gamma([a, b]))$ und der Fläche $S = \vec{\Phi}(D)$ durch eine verträglichen Orientierung des Randes $\partial D \subset \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ durch eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial D$ (siehe Integralsatz von Green) gegeben ist.

BEMERKUNG 26. Denken Sie bei der Wahl der richtigen Orientierung an die „rechte Hand drei Finger Regel“ (Daumen = Normalenvektor, Zeigefinger = Tangentialvektor und Mittelfinger zeigt in die Fläche hinein) oder an die „rechte Hand Regel“ (gekrümmte Finger durchlaufen den Rand und Daumen gibt Normalenvektor an).

BEWEIS. Beide Integralsätze lassen sich mit Hilfe von Koordinatentransformation und der Zerlegung der Eins erst auf glatte Flächen und dann auf den von uns bewiesenen Fall $S = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ zurückführen. $\square$

FOLGERUNG 9 (Kein Wirbelfluß durch geschlossene Flächen). Wenn $\partial S = \emptyset$, dann $\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 0$.

FOLGERUNG 10 (Flächenunabhängigkeit des Wirbelflusses). Wenn S_0, S_1 mit $\partial S_0 = \partial S_1$ mit gleicher Durchlaufrichtung, dann $\int_{S_0} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$.

BEMERKUNG 27. Die Zirkulation von Gradientenfeldern hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab. Der Fluß von Wirbelfeldern hängt nur vom Rand der Kurve ab.

7. Divergenz - Charakterisierung von Wirbelfeldern

Wir haben gesehen, dass der Fluß eines Wirbelfeldes $\vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}$ durch geschlossene, auch sehr kleine, Flächen verschwindet. Das infinitesimale Maß für diesen Fluß ist die Divergenz.

DEFINITION 29. Die **Divergenz** eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^T : \mathbb{R}^3 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist die Funktion $\operatorname{div} \vec{w} : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(\operatorname{div} \vec{w})(\vec{x}) = \frac{\partial w_1}{\partial x}(\vec{x}) + \frac{\partial w_2}{\partial y}(\vec{x}) + \frac{\partial w_3}{\partial z}(\vec{x}).$$

Wenn $\operatorname{div} \vec{w}(\vec{x}) > 0$, so heißt $\vec{x}$ **Quelle**, und wenn $\operatorname{div} \vec{w}(\vec{x}) < 0$, so heißt $\vec{x}$ **Senke**. Ein Vektorfeld heißt **quellenfrei**, wenn $\operatorname{div} \vec{w} \equiv 0$.

LEMMA 6. Wirbelfelder sind quellenfrei, d.h. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$ für alle Vektorfelder $\vec{v} \in \mathcal{C}^2$.

BEWEIS. Wenn $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, dann gilt

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, -\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

und, weil man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen kann,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3 \partial x_2} = 0.$$

$\square$

BEISPIEL 109 (Ortsvektorfeld). Wenn $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{x}$, dann $\operatorname{div} \vec{w} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$.

BEISPIEL 110 (Konstantes Feld). Wenn $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{a}$ für einen festen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, dann $\operatorname{div} \vec{w} = 0$.

BEISPIEL 111 (Elektrisches Feld einer Punkladung). Das Feld $\vec{w}(\vec{x}) = r^{-3}\vec{x}$ mit $r = |\vec{x}|$ ist auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ quellenfrei, denn $(\partial r)/(\partial x_j) = x_j/r$ und

$$\operatorname{div} \vec{w} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_j}{r^3} = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{r^3} - 3 \frac{x_j}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{3}{r} - \frac{3}{r^5} \sum_{j=1}^3 x_j^2 = 0.$$

BEISPIEL 112 (Koordinatenpermutation). Das Vektorfeld $\vec{w}(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)^T$ ist quellenfrei, denn $(\partial x_j)/(\partial x_k) = 0$ für $j \neq k$.

SATZ 44 (Existenz eines Vektorpotentials). *Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein zusammenziehbares Gebiet. Ein Vektorfeld $\vec{w} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist genau dann ein Wirbelfeld, wenn $\operatorname{div} \vec{w} \equiv 0$ auf G .*

BEWEIS. Wir haben bereits gezeigt, dass aus $\vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}$ für beliebige Definitionsgebiete $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ folgt.

Wenn $\operatorname{div} \vec{w} \equiv 0$ auf G , so kann man ein Vektorpotential durch Integration definieren. Wenn G sternförmig bezüglich $\vec{0}$, so ist

$$\vec{v}(\vec{x}) := \int_0^1 t \vec{w}(t\vec{x}) \times \vec{x} dt$$

für alle $\vec{x} \in G$ wohldefiniert und es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) &= \int_0^1 t \operatorname{rot} (\vec{w}(t\vec{x}) \times \vec{x}) dt = \int_0^1 t(2\vec{w}(t\vec{x}) + t(D\vec{w})_{t\vec{x}}\vec{x}) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t^2 \vec{w}(t\vec{x})) dt = [t^2 \vec{w}(t\vec{x})]_0^1 = \vec{w}(\vec{x}). \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 113 (Potential des konstanten Feldes). Es gilt

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{x} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} (a_2 x_3 - a_3 x_2, -a_1 x_3 + a_3 x_1, a_1 x_2 - a_2 x_1)^T = \vec{a}.$$

Zwei Vektorpotentiale auf einer einfach zusammenhängenden Menge unterscheiden sich höchstens um ein Gradientenfeld.

SATZ 45 (Eindeutigkeit des Vektorpotentials). *Wenn $\vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}_0 = \operatorname{rot} \vec{v}_1$ auf einer einfach zusammenhängenden Menge, dann existiert eine Funktion f mit $\vec{v}_0 - \vec{v}_1 = \operatorname{grad} f$.*

BEWEIS. Einerseits gilt $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ für alle $f \in \mathcal{C}^2$. Andererseits folgt aus $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ auf einer einfach zusammenhängenden Menge die Existenz einer Potentialfunktion. □

Zur Berechnung eines Vektorpotentials kann man die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = w_1, \quad -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = w_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = w_3$$

lösen. Da aber $\vec{v}$ nur bis auf ein Gradientenfeld $\operatorname{grad} f$ eindeutig bestimmt ist, können wir $v_1 \equiv 0$, $v_2(x_0, y, z) = 0$ und $v_3(x_0, y_0, z) = 0$ für eine Bezugsgerade $\{(x_0, y_0, z)^T\}$ annehmen. Dies vereinfacht das zu lösende System von partiellen Gleichungen zu

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = w_1, \quad -\frac{\partial v_3}{\partial x} = w_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = w_3,$$

also $v_2 = \int_{x_0}^x w_3 dx$, $v_3 = -\int w_2 dx + g(y, z)$ und $g_y(y, z) = w_1$. Dann folgt $g(y, z) = \int_{y_0}^y w_1 dy$.

BEISPIEL 114. Wir bestimmen ein Vektorpotential des quellenfreien Feldes $\vec{w}(x, y, z) = (z, x, y)^T$. Dazu lösen wir die Differentialgleichungen

$$-\frac{\partial v_3}{\partial x} = x \text{ und } \frac{\partial v_2}{\partial x} = y$$

und erhalten $v_3 = -x^2/2 + g(y, z)$, $v_2 = xy$ und $g_y = z$, also $g(y, z) = yz$ und das Vektorpotential

$$\left(0, xy, -\frac{1}{2}x^2 + yz\right)^T.$$

8. Gaußscher Integralsatz

SATZ 46. Es seien $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand $S = \partial G$ und $\vec{w} : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_G \operatorname{div} \vec{w}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\partial G} \vec{w} \cdot d\vec{\sigma},$$

wobei ∂G so orientiert ist, dass der Normalenvektor aus dem Gebiet G heraus zeigt.

BEWEIS. Der Beweis des Satzes läßt sich durch Zerlegung des Gebietes und Koordinatentransformation auf den Fall $G = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ zurückführen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_G \operatorname{div} \vec{w}(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_{[0, a] \times [0, b] \times [0, c]} \frac{\partial w_1}{\partial x}(\vec{x}) + \frac{\partial w_2}{\partial y}(\vec{x}) + \frac{\partial w_3}{\partial z}(\vec{x}) d(x, y, z) \\ &= \int_{[0, b] \times [0, c]} \int_0^a \frac{\partial w_1}{\partial x}(\vec{x}) dx d(y, z) + \int_{[0, a] \times [0, c]} \int_0^b \frac{\partial w_2}{\partial y}(\vec{x}) dy d(x, z) \\ &\quad + \int_{[0, a] \times [0, b]} \int_0^c \frac{\partial w_3}{\partial z}(\vec{x}) dz d(x, y) \\ &= \int_{[0, b] \times [0, c]} w_1(a, y, z) d(y, z) - \int_{[0, b] \times [0, c]} w_1(0, y, z) d(y, z) \\ &\quad + \int_{[0, a] \times [0, c]} w_2(x, b, z) d(x, z) - \int_{[0, a] \times [0, c]} w_2(x, 0, z) d(x, z) \\ &\quad + \int_{[0, a] \times [0, b]} w_3(x, y, c) d(x, y) - \int_{[0, a] \times [0, b]} w_3(x, y, 0) d(x, y) \\ &= \int_{S_{x=a}} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} + \int_{S_{x=0}} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} \\ &\quad + \int_{S_{y=b}} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} + \int_{S_{y=0}} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} \\ &\quad + \int_{S_{z=c}} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} + \int_{S_{z=0}} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} \\ &= \int_S \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma} \end{aligned}$$

mit $S = S_{x=a} \cup S_{x=0} \cup S_{y=b} \cup S_{y=0} \cup S_{z=c} \cup S_{z=0}$ und den dazugehörigen Normalenvektoren $(1, 0, 0)^T$, $(-1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, -1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$ und $(0, 0, -1)^T$. $\square$

BEMERKUNG 28. Wenn in einer Umgebung U des Punktes $\vec{x} \in \partial G$ das Gebiet G mit Hilfe einer Funktion $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ als $G \cap U = \{\vec{x} \in U : \phi(\vec{x}) < 0\}$ beschrieben wird, dann muss man die Parametrisierung $\vec{\Phi}$ des Randes so wählen, dass

$$\det \left((\text{grad } \phi)_{\vec{\Phi}(u,v)}, \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u,v) \right) > 0.$$

Wendet man den Gaußschen Integralsatz auf das Ortsvektorfeld $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{x}$ an, so ergibt sich

$$3\mu(G) = \int_G \text{div } \vec{w} d\vec{x} = \int_{\partial G} \vec{x} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Das Volumen des Gebietes G kann mit Hilfe des Flusses des Ortsvektorfeldes durch die Oberfläche ∂G berechnet werden.

FOLGERUNG 11. Flüsse von quellenfreien Vektorfeldern durch Ränder von Gebieten verschwinden. Wenn $\vec{w} : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\text{div } \vec{w} \equiv 0$, dann gilt $\int_{\partial G} \vec{w} \cdot d\vec{\sigma} = 0$.

Hierbei ist es wichtig, dass $\vec{w}$ auf G und nicht nur in der Nähe des Randes ∂G quellenfrei ist.

BEISPIEL 115. Wir berechnen den Fluß des Vektorfeldes $\vec{w}(\vec{x}) = r^{-3}\vec{x}$ mit $r = |\vec{x}|$, welches nur auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definiert ist, durch die Oberfläche einer Kugel vom Radius R . Das Vektorfeld $\vec{w}$ ist auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ quellenfrei. Trotzdem gilt mit Kugelkoordinaten wie in Beispiel 108

$$\begin{aligned} \int_{\{r=R\}} \vec{w} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle r^{-3}\vec{\Phi}(\phi, \psi), R \cos \psi \vec{\Phi}(\phi, \psi) \rangle d\psi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^{-3} R \cos \psi R^2 d\psi d\phi = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} 2 d\phi = 4\pi \neq 0. \end{aligned}$$

9. Anwendungen in der Elektrodynamik

Die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik für das elektrische Feld $\vec{E}$, das magnetische Feld $\vec{B}$, die Ladungsdichte ρ und die elektrische Stromdichte $\vec{j}$ lauten:

$$\text{div } \vec{E} = \rho, \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}.$$

Die Größen $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ und $\vec{j}$ hängen vom Ort $\vec{x}$ und von der Zeit t ab. In einem statischen System, d.h. keine Zeitabhängigkeit, ergeben sich ein entkoppeltes System aus je zwei Gleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$, die insbesondere besagen, dass $\vec{E}$ wirbelfrei und $\vec{B}$ quellenfrei ist.

9.1. Gesamtladung. Die Gesamtladung $\int_G \rho d\vec{x}$ ist gleich dem Fluß des elektrischen Feldes durch den Rand des Gebietes, denn

$$\int_G \rho d\vec{x} = \int_G \text{div } \vec{E} d\vec{x} = \int_{\partial G} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma}.$$

9.2. Existenz eines Vektorpotentials. Das magnetische Feld ist quellenfrei und besitzt ein Vektorpotential, denn $\text{div } \vec{B} = 0$.

9.3. Induktionsgesetz. Es gilt

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Eine zeitliche Veränderung des Flusses des magnetischen Feldes durch eine Fläche A bewirkt eine Zirkulation des elektrischen Feldes entlang des Randes ∂A .

9.4. Ladungserhaltung. Aus $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div} \left(\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) = 0$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_G \rho d\vec{x} = \int_G \frac{\partial}{\partial t} \rho d\vec{x} = - \int_G \operatorname{div} \vec{j} d\vec{x} = - \int_{\partial G} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma},$$

Wenn sich die Gesamtladung in einem Gebiet ändert, so muss Strom durch den Rand des Gebietes fließen.

Funktionentheorie

Wir untersuchen komplexwertige Funktionen in einer komplexen Variablen.

1. Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen

1.1. Der reelle Vektorraum $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Eine komplexe Zahl ist ein Paar reeller Zahlen $z = (x, y)$. Die Menge $\mathbb{C}$ aller komplexen Zahlen ist also ein zweidimensionaler reeller Vektorraum $\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

1.1.1. *Addition und Skalarmultiplikation.* Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen sind wie in reellen Vektorräumen komponentenweise definiert. Für $z_j = (x_j, y_j) \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$(3) \quad z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1).$$

1.1.2. *Betrag.* Auch den Betrag einer komplexen Zahl, also die *Länge* des Vektors (x, y) , misst man wie im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ gilt

$$(4) \quad |z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1.1.3. *Folgen und Reihen.* Folgen $\{z_n = (x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ und Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ komplexer Zahlen betrachtet man als Folge bzw. Reihen im $\mathbb{R}^2$. Sie sind genau dann konvergent, wenn die beide dazugehörige Folgen bzw. Reihen reeller Zahlen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergent sind.

1.2. Der Körper $\mathbb{C}$. Die komplexen Zahlen sind der kleinste Zahlkörper, der die reellen Zahlen enthält, mit der Eigenschaft, dass jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \text{mit } i^2 + 1 = 0$$

Der Vektor $(0, 1)$ wird dabei mit i identifiziert.

1.2.1. *Multiplikation.* Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ist durch Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz, die Rechenregeln für die reellen Zahlen und die Bedingung $i^2 = -1$ eindeutig festgelegt.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + x_1 i y_2 + i y_1 x_2 + i y_1 i y_2 \\ &= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) - y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

1.2.2. *Division.* Falls $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $z \neq 0$, also $(x, y) \neq (0, 0)$, so gilt

$$z \frac{1}{|z|^2} (x - iy) = \frac{1}{|z|^2} (x + iy)(x - iy) = \frac{1}{|z|^2} (x^2 + y^2) = 1,$$

also

$$(5) \quad (x + iy)^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Mit Hilfe der komplexen Konjugation läßt sich das Inverse einer komplexen Zahl einfacher schreiben.

1.2.3. Komplexe Konjugation. Die komplexe Konjugation $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$ ist als lineare Abbildung des $\mathbb{R}^2$ eine Spiegelung an der x -Achse. Mit Hilfe der komplexen Konjugation lassen sich $|z|$ und $1/z$ für komplexe Zahlen z einfacher ausdrücken. Es gilt

$$(6) \quad z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2, \quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}, \quad (z \neq 0).$$

Durch Nachrechnen bestätigt man sofort folgende Rechenregeln für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$(7) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

1.2.4. Potenzreihen. Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n$ konvergiert. Dies ist eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius R , der durch

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

bestimmbar ist. Auch der Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe ist R , d.h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$ absolut.

Mit Hilfe von Potenzreihen kann man Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ als natürliche Fortsetzung reeller Funktionen definieren, z.B.

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Da die Potenzgesetze $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$ und die Additionstheoreme durch Anwendung des Cauchyschen Produktsatzes auf Potenzreihen beweisbar waren, gelten sie auch hier, z.B. $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$.

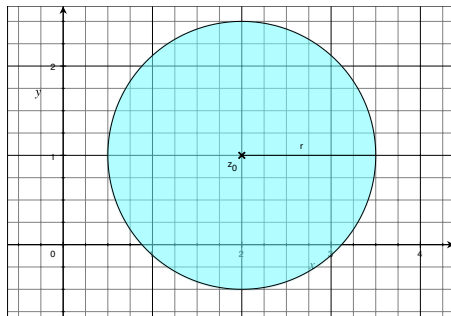
1.3. Polarkoordinaten. Aus den Potenzreihen für die Exponentialfunktion, Sinus und Kosinus folgt für alle $\phi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{i\phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{\phi^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i(-1)^k \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \phi + i \sin \phi \\ 1 &= |e^{i\phi}|^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi. \end{aligned}$$

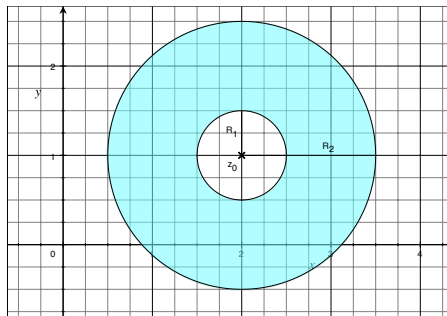
Jede komplexe Zahl z läßt sich als $z = re^{i\phi}$ mit $r = |z|$ und $\phi \in [0, 2\pi)$ schreiben, denn $z = |z| \frac{z}{|z|}$ für $z \neq 0$ und $\left| \frac{z}{|z|} \right| = 1$.

Sind komplexe Zahlen $z = re^{i\phi}$, $z_j = r_j e^{i\phi_j}$ in Polarkoordinaten gegeben, so gilt für komplexe Konjugation

$$(8) \quad \bar{z} = \overline{re^{i\phi}} = re^{-i\phi}$$



ABBILDUNG

1. Kreisscheibe um z_0 

ABBILDUNG

2. Kreisring um z_0

und Multiplikation

$$(9) \quad z_1 z_2 = r_1 e^{i\phi_1} r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}, \quad z^n = (r e^{i\phi})^n = r^n e^{in\phi}.$$

Für $z = 1 + \sqrt{3}i$ gilt zum *Beispiel* $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ und $z = 2e^{i\pi/3}$, da $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ und $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nun berechnet man leicht

$$z^4 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^4 = 2^4 e^{i4\pi/3} = 16 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + i8\sqrt{3}.$$

2. Komplexwertige Funktionen

Da sich der Graph einer Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ als eine Teilmenge des $\mathbb{R}^4$ schlecht zeichnen läßt, skizziert man den Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ und das Bild $f(D)$ für aussagekräftige Teilmengen $D \subset \mathbb{C}$, um eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ graphisch zu veranschaulichen.

2.1. Graphische Darstellung von Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. Zur Veranschaulichung komplexwertiger Funktionen ist notwendig, Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ in geeigneten Koordinaten (kartesische (x, y) -Koordinaten oder Polarkoordinaten (r, ϕ)) zu beschreiben.

2.1.1. Kreis. Die Menge $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ beschreibt eine offene Kreisscheibe um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Radius R , also die Menge aller Punkte in $\mathbb{C}$, deren Abstand vom Punkt z_0 kleiner als R ist. Mit Hilfe von Polarkoordinaten kann man D durch $D = \{z_0 + r e^{i\phi} : r \in [0, R), \phi \in [0, 2\pi)\}$ parametrisieren. Abbildung 1 zeigt eine Kreisscheibe um den Punkt $z_0 = 2 + i$ mit Radius $r = 3/2$.

2.1.2. Kreisring. Die Menge $D = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ beschreibt einen offenen Kreisring um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit innerem Radius R_1 und äußerem Radius R_2 , also die Menge aller Punkte in $\mathbb{C}$, deren Abstand vom Punkt z_0 größer als R_1 aber kleiner als R_2 ist. Mit Hilfe von Polarkoordinaten kann man D durch $D = \{z_0 + r e^{i\phi} : r \in (R_1, R_2), \phi \in [0, 2\pi)\}$ parametrisieren. Abbildung 2 zeigt einen Kreisring um den Punkt $z_0 = 2 + i$ mit innerem Radius $R_1 = 1/2$ und äußerem Radius $R_2 = 3/2$.

2.1.3. Obere Halbebene. Die Menge $D = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ besteht aus allen Punkten oberhalb der x -Achse. Es gilt

$$D = \{z = x + iy : y > 0\} = \{z = r e^{i\phi} : r > 0, \phi \in (0, \pi)\}.$$

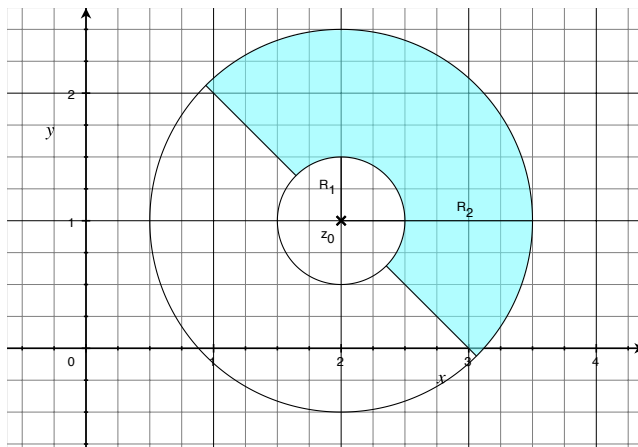


ABBILDUNG 3. Kreisringsegment

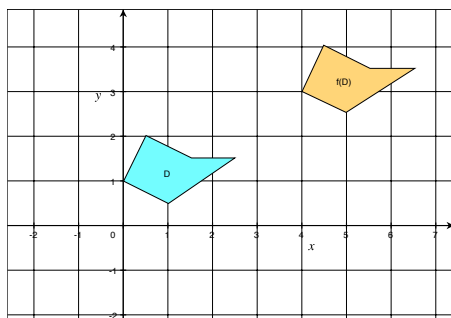


ABBILDUNG 4. Verschiebung

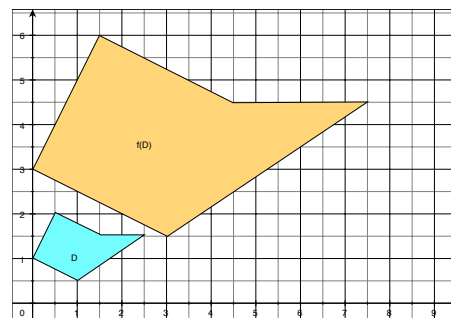


ABBILDUNG 5. Streckung

2.1.4. *Rechte Halbebene.* Die Menge $D = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ besteht aus allen Punkten rechts der y -Achse. Es gilt

$$D = \{z = x + iy : x > 0\} = \{z = re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (-\pi/2, \pi/2)\}.$$

2.1.5. *Streifen und Rechtecke.* Die Mengen

$$D_1 = \{z = x + iy : x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in [c, d]\}$$

sind Streifen parallel zur y -Achse bzw. x -Achse der Breite $b-a$ bzw. $d-c$. Die Menge $D = D_1 \cap D_2 = \{z = x + iy : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ ist ein Rechteck. Polarkoordinaten eignen sich nicht so gut, um Rechtecke und Streifen zu beschreiben.

2.1.6. *Kreisringsegmente.* Durch

$$D = \{z = z_0 + re^{i\phi} : r \in (R_1, R_2), \phi \in (\phi_1, \phi_2)\}$$

wird ein Segment eines Kreisrings beschrieben. Abbildung 3 zeigt ein Kreisringsegment um den Punkt $z_0 = 2 + i$ mit innerem Radius $R_1 = 1/2$, äußerem Radius $R_2 = 3/2$ und $\phi \in (-\pi/4, 3\pi/4)$. Dieses Winkelintervall kann auch die Bedingung $x - 2 > -(y - 1)$ beschrieben werden.

2.2. Urbilder und Bilder einfacher Funktionen.

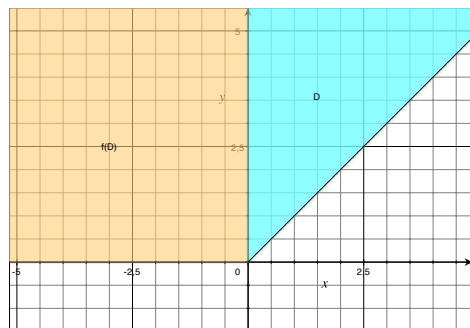


ABBILDUNG 6. Sektor
unter $f(z) = z^2$

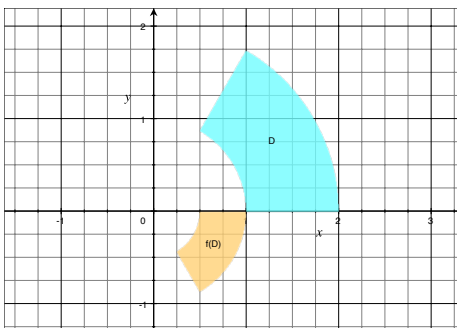


ABBILDUNG 7. Kreissegment
unter $f(z) = z^{-1}$

2.2.1. *Verschiebung.* Die Funktion $f(z) = z + a$ mit $a \in \mathbb{C}$ fest ist eine Verschiebung um den Vektor a . Das bedeutet $f(D) = \{z + a : z \in D\}$. Abbildung 4 zeigt ein Definitionsgebiet D und sein Bild $f(D)$ bei der Abbildung $f(z) = z + 4 + 2i$.

2.2.2. *Streckung.* Die Funktion $f(z) = az$ mit $a \in \mathbb{R}$ fest ist eine Streckung um den Faktor a . Das bedeutet $f(D) = \{az : z \in D\}$. Abbildung 5 zeigt ein Definitionsgebiet D und sein Bild $f(D)$ bei der Abbildung $f(z) = 3z$.

2.2.3. $f(z) = z^2$. Wir betrachten die Funktion $f(z) = z^2$ auf den Definitionsgebieten $D_2 = \{z : \Im(z) > 0\}$ und $D_1 = \{z = re^{i\phi} : \phi \in (\pi/4, \pi/2), r > 0\}$. Dann gilt

$$f(D_1) = \{r^2 e^{i2\phi} : \phi \in (\pi/4, \pi/2), r > 0\} = \{Re^{i\Phi} : R > 0, \Phi \in (\pi/2, \pi)\}$$

und $f(D_2) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{>0}$. Abbildung 6 zeigt das Definitionsgebiet D_1 und sein Bild $f(D_1)$ unter der Abbildung $f(z) = z^2$.

2.2.4. *Die Funktion $f(z) = 1/z$.* Wir betrachten die Funktion $f(z) = z^{-1}$ auf dem Definitionsgebiet $D = \{z = re^{i\phi} : \phi \in (0, \pi/3), 2 > r > 1\}$. Wegen $f(re^{i\phi}) = r^{-1}e^{-i\phi}$ folgt

$$f(D) = \{r^{-1}e^{-i\phi} : \phi \in (0, \pi/2), 2 > r > 1\} = \{Re^{i\Phi} : 1 > R > 1/2, \Phi \in (-\pi/3, 0)\}.$$

Abbildung 7 zeigt das Definitionsgebiet D und sein Bild $f(D)$ unter der Abbildung $f(z) = z^{-1}$.

2.2.5. *Die Funktion $f(z) = e^z$.* Wir betrachten die Funktion $f(z) = e^z$ auf dem Streifen $D_1 = \{x + iy : y \in (0, \pi/2)\}$ und dem Rechteck $D_2 = \{x + iy : x \in [0, 2], y \in (0, \pi/2)\}$. Aus $e^z = e^x e^{iy} = re^{i\phi}$ folgt, dass $f(D_1)$ der erste Quadrant und $f(D_2)$ ein Kreissegment ist. Abbildung 8 zeigt das Definitionsgebiet D_2 und sein Bild $f(D_2)$ unter der Abbildung $f(z) = e^z$.

2.3. Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion. Es sei $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, die auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ definiert ist. Wenn wir $\mathbb{C}$ mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ identifizieren, so ist f eine vektorwertige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$. Wir bezeichnen die Komponenten der vektorwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit u und v , also

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ oder } f = u + iv$$

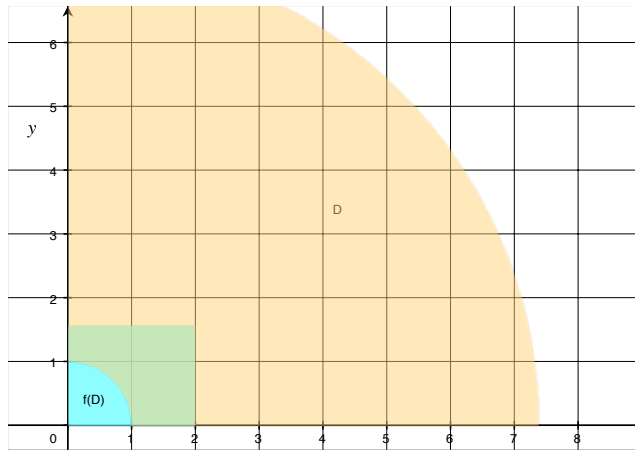


ABBILDUNG 8. Veränderung eines Rechtecks unter $f(z) = e^z$

und u und v sind auf D definierte reellwertige Funktionen, $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion u heißt **Realteil**, die Funktion v heißt **Imaginärteil** der Funktion f .

Beispiele:

- Wenn $f(z) = z$ mit $z = x + iy$, so ist $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = y$.
- Wenn $f(z) = \bar{z}$ mit $z = x + iy$, so ist $f(x, y) = x - iy = (x, -y)^T$, also $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = -y$.
- Wenn $f(z) = z^2$, dann $f(x, y) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ mit $z = x + iy$, also $u(x, y) = x^2 - y^2$ und $v(x, y) = 2xy$.
- Wenn $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ mit $z = x + iy$, so ist $f(x, y) = x^2 + y^2$, also $u(x, y) = x^2 + y^2$ und $v(x, y) \equiv 0$.
- Wenn $f(z) = e^z$ mit $z = x + iy$, so folgt aus den Potenzgesetzen $f(x, y) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$, also $u(x, y) = e^x \cos y$ und $v(x, y) = e^x \sin y$.
- Wenn $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$, dann $f(x, y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ mit $z = x + iy$, also $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ und $v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$.

2.4. Stetigkeit. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ ist **stetig**, wenn sie als Funktion $f : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ stetig ist. Alle Beispiele in Abschnitt 2.3 sind stetige Funktionen in ihrem Definitionsbereich.

Summe $f + g$, Produkt fg , Quotient f/g (falls $g(z) \neq 0$) und Verknüpfungen $f \circ g$ stetiger Funktionen f, g sind damit wieder stetig.

2.5. Reelle und komplexe Differenzierbarkeit. Wir betrachten Funktionen

$$f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = x + iy \mapsto f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

und ihre Zerlegung in Real- und Imaginärteil.

2.5.1. Definition der komplexen Differenzierbarkeit. Wenn f als Funktion $\mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar ist, so gilt

$$Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

ist eine gute Näherung, wenn (x, y) nahe am Punkt (x_0, y_0) ist.

Für jeden Punkt $z_0 = (x_0, y_0)$ ist die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{a} \mapsto (Df)_{z_0} \vec{a}$, eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, die dem Vektor $\vec{a}$ die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt z_0 in Richtung $\vec{a}$ zuordnet. Es genügt, die partiellen Ableitungen f_x und f_y zu kennen, da sich jeder Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination der Basisvektoren $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$ schreiben läßt, und

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = a_1 f_x + a_2 f_y = (Df) \vec{a}.$$

Eine reell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt auf einer offenen Menge D **komplex differenzierbar**, wenn für jeden Punkt $z_0 \in D$ die $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $(Df)_{z_0}$ sogar $\mathbb{C}$ -linear ist, also

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda \vec{a}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{a}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \vec{a} \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}.$$

2.5.2. Cauchy-Riemann Differentialgleichungen. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$, die reell differenzierbar ist, ist genau dann auf einer offenen Menge D komplex differenzierbar, wenn $f_y = i f_x$, weil $1 = (1, 0)^T$ und $i = (0, 1)^T$ aus der Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ folgt. Dies bedeutet

$$u_y + i v_y = \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = i(u_x + i v_x) = -v_x + i u_x.$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhält man

THEOREM 1. *Eine reell differenzierbare Funktion $f = u + iv : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann komplex differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen u_x, u_y des Realteils u und die partiellen Ableitungen v_x, v_y des Imaginärteils v auf der Menge D die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllen:*

$$(10) \quad u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x$$

BEMERKUNG 29. Real- und Imaginärteil einer auf D komplex differenzierbaren Funktion $f = u + iv$ sind Lösungen der Laplacegleichung, da $u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0$ und $v_{xx} + v_{yy} = (v_x)_x + (v_y)_y = (-u_y)_x + (u_x)_y = -u_{yx} + u_{xy} = 0$, weil aus der komplexen Differenzierbarkeit folgt, dass f beliebig oft stetig differenzierbar ist.

2.5.3. Beispiele (nicht) komplex differenzierbarer Funktionen.

- Die Funktion $f(z) = z$ ist auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn $u(x, y) = x$, $v(x, y) = y$, $u_x(x, y) = 1 = v_y(x, y)$ und $u_y(x, y) \equiv 0 \equiv -v_x(x, y)$.
- Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist nicht komplex differenzierbar, denn $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$, $u_x(x, y) \equiv 1 \neq -1 \equiv v_y(x, y)$.
- Die Funktion $f(z) = z^2$ ist auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$, $u_x(x, y) = 2x = v_y(x, y)$ und $u_y(x, y) = -2y = -v_x(x, y)$.
- Die Funktion $f(z) = e^z$ ist auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$, $u_x(x, y) = e^x \cos y = v_y(x, y)$ und $u_y(x, y) = -e^x \sin y = -v_x(x, y)$.
- Die Funktion $f(z) = |z|^2$ ist nicht komplex differenzierbar, denn $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) \equiv 0$, $u_x(x, y) = 2x \neq 0 \equiv v_y(x, y)$.

2.5.4. *Definition der komplexen Ableitung.* Ist $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so genügt es, eine Richtungsableitung zu kennen, z.B. $f_x = (u_x, v_x)^T$. Die **komplexe Ableitung** der Funktion f im Punkt z ist die komplexe Zahl, die zu diesem Vektor gehört, also

$$(11) \quad f'(z) = \begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z) \\ v_x(z) \end{pmatrix} = u_x(z) + i v_x(z).$$

2.5.5. *Beispiele komplexer Ableitungen.*

- Die komplexe Ableitung der Funktion $f(z) = z$ ist $f'(z) = 1 + i \cdot 0 = 1$, da $u_x \equiv 1$ und $v_x \equiv 0$.
- Die komplexe Ableitung der Funktion $f(z) = z^2$ ist $f'(z) = 2x + i \cdot 2y = 2(x + iy) = 2z$, da $u_x(x, y) = 2x$ und $v_x(x, y) = 2y$.
- Die komplexe Ableitung der Funktion $f(z) = e^z$ ist $f'(z) = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y = e^z$, da $u_x(x, y) = e^x \cos y$ und $v_x(x, y) = e^x \sin y$.

2.5.6. *Verknüpfung komplex differenzierbarer Funktionen.* Summe $f + g$, Produkt fg , Quotient f/g (falls $g(z) \neq 0$) zweier auf $D \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbarer Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ sind wieder auf D komplex differenzierbar und es gilt $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$, $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ und $(f/g)'(z) = (f'(z)g(z) - f(z)g'(z))/f^2(z)$.

Wenn $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : U \rightarrow D$ komplex differenzierbar auf D bzw. U , dann ist auch $f \circ g$ auf U komplex differenzierbar und es gilt $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$.

2.5.7. *Partielle Ableitungen nach z und $\bar{z}$ (Wirtingerableitungen).* Wir betrachten eine reell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ und ihre Zerlegung in Real- und Imaginärteil $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$. Die partiellen Ableitungen nach z bzw. $\bar{z}$ sind definiert als

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Es gilt

$$(13) \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1,$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial z} &= \frac{\partial(x + iy)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x + iy)}{\partial x} - i \frac{\partial(x + iy)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(1 - i \cdot i) = 1 \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} &= \frac{\partial(x - iy)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x - iy)}{\partial x} - i \frac{\partial(x - iy)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(1 + i \cdot i) = 0 \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial(x - iy)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x - iy)}{\partial x} + i \frac{\partial(x - iy)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(1 + i \cdot (-i)) = 1 \\ \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial(x + iy)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x + iy)}{\partial x} + i \frac{\partial(x + iy)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(1 + i \cdot i) = 0. \end{aligned}$$

THEOREM 2. *Eine reell differenzierbare Funktion f ist genau dann komplex differenzierbar, wenn*

$$(14) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0.$$

BEWEIS. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i \frac{\partial(u+iv)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2}(u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)) = \frac{1}{2}(u_x - v_y + i(v_x + iu_y)).\end{aligned}$$

□

THEOREM 3. Wenn $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, dann

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = f'(z).$$

BEWEIS. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial(u+iv)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - i \frac{\partial(u+iv)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2}(u_x + iv_x - i(u_y + iv_y)) = \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(v_x - u_y)) = u_x + iv_x,\end{aligned}$$

da die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ erfüllt sind. □

Aus $z = x+iy$ und $\bar{z} = x-iy$ folgt $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ und $y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$. Jede in (x, y) -Koordinaten gegebene Funktion f kann man auch mit Hilfe der „Koordinaten“ z und $\bar{z}$ ausdrücken. Verschwindet die partielle Ableitung von f nach $\bar{z}$, so ist f komplex differenzierbar und die komplexe Ableitung $f'(z)$ ist gerade die partielle Ableitung von f nach z .

Da die partiellen Ableitungen nach z und $\bar{z}$ linear sind und die Produktregel erfüllen, also

$$\frac{\partial(fg)}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) g + f \frac{\partial g}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) g + f \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$$

gilt, folgt für $m, k \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial z} (z^m \bar{z}^k) = m z^{m-1} \bar{z}^k, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (z^m \bar{z}^k) = k z^m \bar{z}^{k-1}.$$

Insbesondere sind Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ innerhalb ihres Konvergenzradius und Polynome komplex differenzierbar und

$$(15) \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

2.6. Umkehrfunktionen. Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$, die in D komplex differenzierbar ist. Besitzt diese Funktion eine lokale oder sogar eine globale Umkehrfunktion? Da man f als Funktion $\mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$ betrachten kann, wissen wir

- (1) Wenn $\det(Df|_z) \neq 0$ für ein $z \in D$, so besitzt f in einer Umgebung des Punktes $z \in D$ eine (lokale) Umkehrfunktion.
- (2) Wenn f injektiv ist und $\det(Df|_z) \neq 0$ für alle Punkte $z \in D$, so besitzt f eine globale Umkehrfunktion $g : f(D) \rightarrow D$ mit $g(f(z)) = z$ für alle $z \in D$.
- (3) Die Umkehrfunktionen sind dann differenzierbar und aus der Kettenregel folgt $Dg|_{f(z)} = (Df|_z)^{-1}$.

THEOREM 4. Wenn $f'(z) \neq 0$ für eine komplex differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$, dann ist f in einer Umgebung des Punktes $z \in D$ umkehrbar und die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f(z)$ ist $1/f'(z)$.

BEWEIS. Da $f = u + iv$ komplex differenzierbar ist, sind die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt und es gilt

$$Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}$$

$$\det Df = (u_x)^2 + (v_x)^2 = (u_x + iv_x)(u_x - iv_x), \quad \det(Df|_z) = f'(z)\overline{f'(z)}.$$

Die Umkehrfunktion $g = \tilde{u} + i\tilde{v}$ ist komplex differenzierbar, denn

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_x & \tilde{u}_y \\ \tilde{v}_x & \tilde{v}_y \end{pmatrix} = Dg = (Df)^{-1} = \frac{1}{(u_x)^2 + (v_x)^2} \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ -v_x & u_x \end{pmatrix},$$

also $\tilde{u}_x = \tilde{v}_y$ und $\tilde{u}_y = -\tilde{v}_x$. Für die komplexe Ableitung gilt

$$(16) \quad g'(f(z)) = \frac{u_x(z) - iv_x(z)}{u_x(z)^2 + v_x(z)^2} = \frac{1}{u_x(z) + iv_x(z)} = \frac{1}{f'(z)}.$$

□

2.6.1. Definition des natürlichen Logarithmus. Die Funktion $f(z) = e^z$ ist für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiert und lokal umkehrbar, denn $f'(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \neq 0$, da $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das Bild der Exponentialfunktion ist $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$.

Wir suchen ein möglichst großes Definitionsgebiet, auf dem die Exponentialfunktion injektiv ist. Da die reelle Exponentialfunktion streng monoton wachsend und die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$, 2π -periodisch ist, gilt

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{x_1} e^{iy_1} = e^{x_2} e^{iy_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ und } y_2 = y_1 + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Exponentialfunktion ist auf jedem Streifen $\{z = x + iy : y \in (c, d)\}$ mit $d - c \leq 2\pi$ injektiv, zum Beispiel auf $D = \{z = x + iy : y \in (-\pi, \pi)\}$. Es gilt $\exp(D) = \{z = re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (-\pi, \pi)\}$. Die auf $\exp(D)$ definierte Umkehrfunktion heißt **Hauptwert des natürlichen Logarithmus**:

$$(17) \quad \text{Ln} : \{z = re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (-\pi, \pi)\} \rightarrow D \subset \mathbb{C}, \quad \text{Ln}(re^{i\phi}) = (\ln r) + i\phi.$$

2.6.2. Definition einer Quadratwurzel. Die Funktion $f(z) = z^2$ ist für alle $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}$ definiert und für alle $z \neq 0$ lokal umkehrbar, denn $f'(z) = 2z$. Wir suchen ein möglichst großes Definitionsgebiet, auf dem $z \mapsto z^2$ injektiv ist. Für zwei komplexe Zahlen $z_j = r_j e^{i\phi_j}$ mit $r_j > 0$ gilt

$$(r_1 e^{i\phi_1})^2 = (r_2 e^{i\phi_2})^2 \Leftrightarrow r_1^2 e^{i2\phi_1} = r_2^2 e^{i2\phi_2}$$

$$\Leftrightarrow r_1 = r_2 \text{ und } 2\phi_1 = 2\phi_2 + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r_1 = r_2 \text{ und } \phi_1 = \phi_2 + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z_1 = \pm z_2.$$

Die Funktion $z \mapsto z^2$ ist auf jedem offenen Sektor $\{re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (a, b)\}$ mit Öffnungswinkel $b - a \leq \pi$ injektiv, zum Beispiel $D = \{re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (-\pi/2, \pi/2)\}$. Es gilt $f(D) = \{z = re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (-\pi, \pi)\}$. Auf $f(D)$ kann man die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion von f definieren:

$$\sqrt{\cdot} : f(D) \rightarrow D, \quad \sqrt{re^{i\phi}} = \sqrt{r} e^{i\phi/2}$$

BEMERKUNG 30. Möchte man für die Funktionen $z \mapsto e^z$ bzw. $z \mapsto z^2$ lokale Umkehrfunktionen um Punkte z_0 definieren, die nicht in den Definitionsgebieten der in den Abschnitten 2.6.1 und 2.6.2 Funktionen enthalten sind, so wählt man andere, passende Streifen bzw. Sektoren.

3. Komplexe Kurven- und Flächenintegrale

Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, $f = u + iv$ ihre Zerlegung in Real- und Imaginärteil.

3.1. Komplexe Flächenintegrale. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine messbare Menge. Dann ist

$$(18) \quad \int_D f(x, y) d(x, y) := \int_D u(x, y) d(x, y) + i \int_D v(x, y) d(x, y).$$

Zum *Beispiel* erhält man für die Funktion $f(z) = z^2$ und das Rechteck $D = \{z = x + iy : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ das Integral

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) d(x, y) &= \int_D (x + iy)^2 d(x, y) = \int_D x^2 - y^2 + i2xy d(x, y) \\ &= \int_D x^2 - y^2 d(x, y) + i \int_D 2xy d(x, y) \\ &= \int_a^b \int_c^d x^2 - y^2 dy dx + i \int_a^b \int_c^d 2xy dy dx \\ &= \int_a^b \left[x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_c^d dx + i \int_a^b [xy^2]_c^d dx \\ &= \int_a^b x^2(d - c) - \frac{1}{3}(d^3 - c^3) dx + i \int_a^b x(d^2 - c^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3(d - c) - \frac{1}{3} x(d^3 - c^3) \right]_a^b + i \left[\frac{1}{2} x^2(d^2 - c^2) \right]_a^b \\ &= \frac{1}{3}((b^3 - a^3)(d - c) - (b - a)(d^3 - c^3)) + i(b^2 - a^2)(d^2 - c^2). \end{aligned}$$

3.2. Komplexe Kurvenintegrale. Das komplexe Kurvenintegral einer stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ entlang einer stückweise differenzierbaren Kurve $\gamma : I = [a, b] \rightarrow D$ ist

$$(19) \quad \int_\gamma f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

- Ist $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ die Zerlegung von γ in Real- und Imaginärteil, so gilt $\gamma'(t) = \gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t)$.
- Ist ein stückweise differenzierbarer Weg γ aus den differenzierbaren Teilstücken $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ zusammengesetzt, also $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$, so gilt

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_m} f(z) dz.$$

- Das komplexe Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(z)dz$ hängt nur vom Bild $\gamma(I)$ der Kurve (Spur) und der Durchlaufrichtung ab. Kehrt man die Durchlaufrichtung um, so wechselt auch das Vorzeichen des komplexen Kurvenintegrals.

3.2.1. Beispiele komplexer Kurvenintegrale.

- Wenn $f(z) = z^2$ und $\gamma(t) = t$ für $t \in [a, b]$, dann folgt $\gamma'(t) \equiv 1$ und

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_a^b t^2 \cdot 1 dt = \int_a^b t^2 dt = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

- Wenn $f(z) = z^2$ und $\gamma(t) = it$ für $t \in [a, b]$, dann folgt $\gamma'(t) \equiv i$ und

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_a^b (it)^2 \cdot i dt = -i \int_a^b t^2 dt = -\frac{i}{3}(b^3 - a^3).$$

- Wenn $f(z) = z^2$ und $\gamma(t) = e^{i\pi/3}t$ für $t \in [0, 1]$, dann folgt $\gamma'(t) \equiv e^{i\pi/3}$ und

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^1 (e^{i\pi/3}t)^2 e^{i\pi/3} dt = \int_0^1 e^{i\pi} t^2 dt = e^{i\pi} \frac{1}{3}.$$

- Wenn $f(z) = z^2$ und $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$, dann folgt $\gamma'(t) = ie^{it}$ und

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^{2\pi} (e^{it})^2 ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} ie^{3it} dt = \frac{1}{3} [e^{3it}]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}(1 - 1) = 0.$$

- Wenn $f(z) = \frac{1}{z}$ und $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$, dann folgt $\gamma'(t) = ie^{it}$ und

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

- Wenn $f(z) = z$ und γ der Rand des Rechtecks $[a, b] \times [c, d]$, dann $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_4$ mit

$$\gamma_1(t) = at, \quad \gamma_2(t) = a + ibt, \quad \gamma_3(t) = a + ib - at, \quad \gamma_4(t) = ib - ibt$$

für $t \in [0, 1]$ und

$$\gamma'_1(t) = a, \quad \gamma'_2(t) = ib, \quad \gamma'_3(t) = -a, \quad \gamma'_4(t) = -ib$$

für $t \in [0, 1]$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z dz &= \int_{\gamma_1} z dz + \int_{\gamma_2} z dz + \int_{\gamma_3} z dz + \int_{\gamma_4} z dz \\ &= \int_0^1 atadt + \int_0^1 (a + ibt)ibdt + \int_0^1 -(a + ib - at)adt + \int_0^1 -(ib - ibt)ibdt \\ &= \int_0^1 2a^2t - a^2 - 2b^2t + b^2 dt = [a^2(t^2 - t) - b^2(t^2 - t)]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

- Wenn $f(z) = z$ und γ der Rand des Halbkreises $\{re^{i\phi} : 1 \geq r \geq 0, \phi \in [0, \pi]\}$, dann $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1(t) = t$ für $t \in [-1, 1]$ und $\gamma_2(t) = e^{it}$ mit $t \in [0, \pi]$. Es folgt $\gamma_1'(t) \equiv 1$, $\gamma_2'(t) = ie^{it}$ und

$$\int_{\gamma} z dz = \int_{\gamma_1} z dz + \int_{\gamma_2} z dz = \int_{-1}^1 t dt + \int_0^{2\pi} e^{it} ie^{it} dt = \frac{1}{2}[t^2]_{-1}^1 + \frac{1}{2}[e^{it}]_0^{\pi} = 0.$$

3.2.2. Interpretation des komplexen Kurvenintegrals als Zirkulation. Zerlegt man die Funktion $f = u + iv$ und den Weg $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ in Real- und Imaginärteil, so erhält man

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\
 &= \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))) (\gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t)) dt \\
 &= \int_a^b u(\gamma(t))\gamma'_1(t) + iv(\gamma(t))\gamma'_1(t) + iu(\gamma(t))\gamma'_2(t) - v(\gamma(t))\gamma'_2(t) dt \\
 &= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} u(\gamma(t)) \\ -v(\gamma(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix} \right\rangle + i \left\langle \begin{pmatrix} v(\gamma(t)) \\ u(\gamma(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &= \int_{\gamma} \vec{w} \cdot \vec{x} \quad \text{mit } \vec{w} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(z) dz$ ist die Zirkulation des (komplexwertigen) Vektorfeldes $\vec{w} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ entlang der Kurve γ .

3.2.3. Die Kurvenintegrale $\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz$ mit $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$. Wir berechnen das komplexe Kurvenintegral der Funktion $f(z) = (z - z_0)^n$ entlang der Kreislinie um z_0 mit Radius R für beliebige $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$. Die Funktion f ist komplex differenzierbar auf der Menge $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Mit $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ und $\gamma'(t) = Rie^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (z_0 + Re^{it} - z_0)^n Rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} R^{1+n} i e^{it(1+n)} dt \\
 &= \begin{cases} \int_0^{2\pi} i dt & n = -1 \\ \left[R^{1+n} \frac{1}{1+n} e^{it(1+n)} \right]_0^{2\pi} & n \neq -1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

3.3. Cauchyscher Integralsatz. Es ist kein Zufall, dass viele der in Abschnitt 3.2 berechneten komplexen Kurvenintegrale entlang geschlossener Kurven verschwinden.

THEOREM 5 (Cauchyscher Integralsatz). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ und $G \subset D$ eine Menge mit stückweise glattem Rand ∂G , deren Abschluß in D enthalten ist. Wenn f komplex differenzierbar in D ist, dann gilt*

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 0.$$

Das komplexe Kurvenintegral $\int_{\partial G} \frac{1}{z} dz$ entlang der Kreislinie $\partial G = \{z : |z| = 1\}$ im Beispiel in Abschnitt 3.2.1 verschwindet nicht, weil die Funktion $f(z) = 1/z$ nicht auf dem Kreis $G = \{z : |z| \leq 1\}$ komplex differenzierbar ist. Sie hat eine Singularität in $z = 0$.

3.3.1. Beweis des Cauchyschen Integralsatzes. Man schreibt das komplexe Kurvenintegral als Zirkulation und wendet den Integralsatz $\int_{\partial G} \vec{w} \cdot d\vec{x} = \int_G \operatorname{rot} \vec{w} d(x, y)$ an. Da das Vektorfeld $\vec{w}$ aus zwei Komponenten besteht, ist $\operatorname{rot} \vec{w}$ eine komplexwertige Funktion.

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} f(z) dz &= \int_{\partial G} \vec{w}(x, y) \cdot d\vec{x} = \int_G \operatorname{rot} \vec{w}(x, y) d(x, y) \\ \operatorname{rot} \vec{w} &= \operatorname{rot} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i \operatorname{rot} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \\ &= u_y - (-v)_x + i(v_y - u_x) = u_y + v_x + i(v_y - u_x) = 0, \end{aligned}$$

da f komplex differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ erfüllt. Also $\int_{\partial G} f(z) dz = \int_G 0 d(x, y) = 0$.

3.3.2. Orientierung des Randes. Der Rand ∂G der Menge G kann aus einer oder auch mehreren Komponenten bestehen. Wenn $G = \{z : |z| < R\}$ ein Kreis, dann besteht $\partial G = \{|z| = R\}$ aus einer Komponente. Die Kurve $\gamma(t) = Re^{it}$ ist eine geeignete Parametrisierung. Wenn $G = \{z : R_1 < |z| < R_2\}$ ein Kreisring, dann besteht $\partial G = \{|z| = R_1\} \cup \{|z| = R_2\}$ aus zwei Komponenten. Die Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1(t) = R_1 e^{it}$ und $\gamma_2(t) = R_2 e^{-it}$ ist eine geeignete Parametrisierung. Der innere Kreis muss im Uhrzeigersinn durchlaufen werden, so dass die Fläche beim Durchlaufen des Randes immer links vom Rand liegt.

3.4. Stammfunktionen. Wir betrachten eine komplex differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ und einen Basispunkt $z_0 \in D$ und möchten eine komplexe Stammfunktion F mit Hilfe des komplexen Kurvenintegrals als $F(z) = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$ definieren, wobei γ eine Kurve ist, die den Basispunkt z_0 mit dem Zielpunkt z verbindet. Dies ist nur sinnvoll, wenn das Kurvenintegral *unabhängig* von der gewählten Kurve ist.

LEMMA 7. *Es seien $f : \mathbb{C} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion, $z_0, z_1 \in D$ und γ_1, γ_2 zwei Kurven von z_0 nach z_1 . Wenn $\gamma_1 - \gamma_2 = \partial G$ und $G \subset D$, dann gilt $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$.*

BEWEIS. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

□

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ist **einfach zusammenhängend**, falls für jedes Paar stückweise differenzierbarer Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow D$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, das von $\gamma_1 - \gamma_2$ oder $\gamma_2 - \gamma_1$ umrandete Gebiet vollständig in D enthalten ist.

THEOREM 6. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende Menge, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $z_0 \in D$. Dann ist die durch*

$$F(z) := \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta,$$

wobei $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ eine beliebige stückweise differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$ ist, eine Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$ definiert.

BEWEIS. Die Funktion F ist wohldefiniert, weil D einfach zusammenhängend und damit das Kurvenintegral wegunabhängig ist. Benutzt man die Wege $\gamma(t) = z + t$ bzw. $\gamma(t) = z + it$, so ergibt sich $F_x(z) = u(z) + iv(z)$ und $F_y(z) = -v(z) + iu(z)$, also erfüllen die partiellen Ableitungen der Funktion F die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, F ist komplex differenzierbar und $F'(z) = F_x(z) = f(z)$. $\square$

3.4.1. *Logarithmus als Stammfunktion.* Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist nur auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert und holomorph. Es gibt geschlossene Kurven in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, die ein Gebiet umschließen, das 0 enthält, z.B. $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Entfernt man aber nicht nur den Punkt 0 sondern die ganze negative reelle Achse aus dem Definitionsgebiet, so umschließt jede geschlossene Kurve in $D := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ ein Gebiet, das ganz in D liegt. Die Menge D ist also einfach zusammenhängend und mit $z_0 = 1$ gilt

$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \text{Ln}(z),$$

denn F ist als holomorphe Funktion auf einer zusammenhängenden Menge durch die Werte auf der reellen Achse bestimmt und mit $\gamma(t) = t$ für $t \in [1, x]$ gilt dort $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^x = \ln x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

3.4.2. *arctan als Stammfunktion.* Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ist nur auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ definiert und holomorph. Es gibt geschlossene Kurven in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, die ein Gebiet umschließen, das i oder $-i$ enthält, z.B. $\gamma(t) = \pm i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Entfernt man aber nicht nur die Punkte $\pm i$ sondern noch weitere Teile der imaginären Achse aus dem Definitionsgebiet, so umschließt jede geschlossene Kurve in $D := \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$ ein Gebiet, das ganz in D liegt. Die Menge D ist also einfach zusammenhängend und mit $z_0 = 0$ gilt

$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \arctan z,$$

denn F ist als holomorphe Funktion auf einer zusammenhängenden Menge durch die Werte auf der reellen Achse bestimmt und mit $\gamma(t) = t$ für $t \in [0, x]$ gilt dort $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

4. Cauchysche Integralformel und Folgerungen

4.1. **Cauchysche Integralformel.** Wir bezeichnen die Kreisscheibe um den Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit Radius R mit $K_R(z)$.

THEOREM 7 (**Spezielle Cauchysche Integralformel**). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $z \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und $K_R(z) \subset D$. Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

BEWEIS. Es sei $G = \{w : \varepsilon < |w - z| < R\} \subset K_R(z)$ ein Kreisring um z mit äußerem Radius R und innerem Radius ε . Da die Funktion

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

auf G komplex differenzierbar ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\partial G} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial K_R(z) - \partial K_\varepsilon(z)} g(\zeta) d\zeta \\
 \int_{\partial K_R(z)} g(\zeta) d\zeta &= \int_{\partial K_\varepsilon(z)} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta.
 \end{aligned}$$

Nun gilt mit der Parametrisierung $\gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{it}$ für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta &= f(z) \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{1}{z + \varepsilon e^{it} - z} i\varepsilon e^{it} dt \\
 &= f(z) 2\pi i
 \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| = \left| \int_0^{2\pi} f'(z + \varepsilon(t)e^{it}) i\varepsilon e^{it} dt \right| \leq 2\pi\varepsilon M$$

mit $M = \max_{K_R(z)} |f'(z)|$ und $\varepsilon(t) \in [0, \varepsilon]$ wegen des Mittelwertsatzes. Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert die Cauchysche Integralformel. $\square$

THEOREM 8 (Allgemeine Cauchysche Integralformel). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $G \subset D$ eine offene Menge mit stückweise glattem Rand und $\bar{G} \subset D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Dann gilt für alle $z \in G$*

$$(20) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

BEWEIS. Es gilt $\partial G = \partial(G \setminus K_R(z)) + \partial K_R(z)$ und die Funktion $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ist auf $G \setminus K_R(z)$ komplex differenzierbar. $\square$

Die Funktionswerte einer komplex differenzierbaren Funktion in einem Gebiet G sind also durch die Funktionswerte auf dem Rand dieses Gebietes eindeutig bestimmt.

4.2. Existenz beliebiger komplexer Ableitungen. Wir betrachten eine komplex differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, eine offene Teilmenge $G \subset D$ mit stückweise glattem Rand und $\bar{G} \subset D$.

Für jedes $z \in G$ läßt sich eine Umgebung des Randes ∂G finden, deren Abschluß den Punkt z nicht enthält. Deshalb ist die Funktion $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}$ auf dieser Umgebung gleichmäßig stetig.

THEOREM 9. *Die Funktion f ist beliebig oft komplex differenzierbar und*

$$(21) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

BEWEIS. Da Integration und partielle Ableitung nach z bzw. $\bar{z}$ vertauschbar sind folgt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{d}{dz} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

und mit vollständiger Induktion

$$f^{n+1}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{d}{dz} \left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \right) d\zeta = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta.$$

□

4.3. Abschätzung der Ableitungen. Mit $\bar{G} = K_R(z)$ folgt aus der Integralformel für $f^{(n)}(z)$ eine Abschätzung für $|f^{(n)}(z)|$.

THEOREM 10. Wenn $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist und $K_R(z) \subset D$, dann gilt

$$(22) \quad |f^{(n)}(z)| \leq \frac{Mn!}{R^n} \text{ mit } M = \max_{K_R(z)} |f(\zeta)|.$$

BEWEIS. Mit $\gamma(t) = z + Re^{it}$ und $\gamma'(t) = Rie^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ folgt

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| \\ &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z + Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}} iRe^{it} dt \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z + Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}} iRe^{it} \right| dt = \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} |f(z + Re^{it})| dt \\ &\leq \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} M dt = \frac{Mn!}{R^n}. \end{aligned}$$

□

4.4. Satz von Liouville. Wenn $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und beschränkt ist, dann ist f konstant.

BEWEIS. Da f auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, also $D = \mathbb{C}$, ist $K_R(z) \subset \mathbb{C}$ für alle $R > 0$ und alle $z \in \mathbb{C}$. Es sei M eine obere Schranke für $|f|$, also $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus der Abschätzung der ersten Ableitung folgt

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

also $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dies bedeutet $f \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{C}$.

□

BEMERKUNG 31. Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ ist auf $\mathbb{R}$ beliebig oft reell differenzierbar, beschränkt und nicht konstant.

4.5. Fundamentalsatz der Algebra. Jedes Polynom $f(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j$ mit $c_j \in \mathbb{C}$ und $c_n \neq 0$ besitzt eine komplexe Nullstelle oder ist konstant.

BEWEIS. Aus

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{c_n z^n} \right| = 1 \text{ und } \lim_{|z| \rightarrow \infty} |c_n z^n| = \infty \text{ folgt } \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty.$$

Wenn f keine Nullstelle hat, dann ist $g(z) = 1/f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert und komplex differenzierbar. Die Funktion g ist beschränkt, denn es existieren R, M_1, M_2 , so dass $|f(z)| \leq M_1$ für alle z mit $|z| \geq R$, weil $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |g(z)| = 0$, und $|f(z)| \leq M_2$ für alle z in der kompakten Menge $K_R(0)$. Aus dem Satz von Liouville folgt $g(z) \equiv c$, also ist auch f ein konstantes Polynom.

□

4.6. Maximumprinzip und harmonische Funktionen. Eine komplex differenzierbare Funktion nimmt ihr Maximum auf dem Rand an:

THEOREM 11 (Maximumprinzip). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $G \subset D$ eine Menge mit stückweise glattem Rand und $\bar{G} \subset D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Dann gilt*

$$(23) \quad \max_{z \in \bar{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

BEWEIS. Wenn $z_0 \in G$ ein innerer Punkt ist, in dem das Maximum angenommen wird, also $f(z_0) = \max_{z \in \bar{G}} |f(z)|$, dann gilt für jede Kreisscheibe $K_R(z_0) = \{z : |z - z_0| \leq R\}$ mit $K_R(z_0) \subset G$

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{z_0 + Re^{it} - z_0} iRe^{it} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = |f(z_0)|. \end{aligned}$$

Dies kann nur gelten, falls $|f(z)| = |f(z_0)|$ für alle $z \in \partial K_R(z_0)$. Da man G durch Kreisscheiben ausfüllen kann, folgt $|f(z)| = |f(z_0)|$ für alle $z \in \bar{G}$. $\square$

Auch für harmonische Funktionen gilt ein Maximumprinzip.

LEMMA 8. *Wenn $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, dann ist u harmonisch, also $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \equiv 0$.*

BEWEIS. Die Funktion f ist beliebig oft stetig differenzierbar und aus den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen folgt

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = v_{xy} - v_{xy} \equiv 0.$$

$\square$

THEOREM 12. *Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine einfach zusammenhängende Menge. Eine Funktion $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion f , wenn u harmonisch ist.*

BEWEIS. Wenn u Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion f ist, dann folgt aus Lemma 8, dass u harmonisch ist.

Wenn u harmonisch ist, dann ist das Vektorfeld $\vec{w} = (-u_y, u_x)^T$ wirbelfrei, weil $\text{rot } \vec{w} = (-u_y)_y - (u_x)_x = -\Delta u = 0$. Da D einfach zusammenhängend ist, besitzt $\vec{w}$ eine Potentialfunktion v , also $\text{grad } v = (v_x, v_y)^T = \vec{w} = (-u_y, u_x)^T$. Dies bedeutet, dass $f = u + iv$ die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt und damit komplex differenzierbar ist. $\square$

4.7. Potenzreihenentwicklungen und Holomorphie. Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine komplex differenzierbare Funktion, $z_0 \in D$, $K_R(z_0) = \{z : |z - z_0| \leq R\}$ mit $K_R(z_0) \subset D$ und z ein innerer Punkt der Kreisscheibe $K_R(z_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ \frac{f(z)}{z - z_0} &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,
\end{aligned}$$

wobei $\sum$ und $\int$ vertauschbar sind, weil die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^n$ auf jeder kompakten Menge, die echt in $K_R(z_0)$ enthalten ist, gleichmäßig konvergiert.

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn sie sich um jeden Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickeln läßt (und diese Potenzreihe dort die Funktion darstellt).

THEOREM 13. *Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn sie auf D komplex differenzierbar ist.*

BEMERKUNG 32. Der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung einer holomorphen Funktion f hängt vom Punkt ab, um den die Potenzreihe entwickelt wird, z.B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-4-(z-4)} = \frac{1}{-3-(z-4)} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-4}{-3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-4)^n}{(-3)^{n+1}},$$

wobei die linke Potenzreihe um $z_0 = 0$ den Konvergenzradius 1 und die rechte Potenzreihe um $z_0 = 4$ den Konvergenzradius 3 hat.

4.8. Identitätsprinzip - analytische Fortsetzung.

4.8.1. Nullstellenverteilung einer holomorphen Funktion. Ein Polynom p ist eine holomorphe Funktion und hat maximal $\deg p$ verschiedene, also endlich viele, Nullstellen. Es gibt auch holomorphe Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen, zum Beispiel hat die Funktion $\sin z$ die reellen Nullstellen $z_k = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Jedoch besitzen diese Nullstellen keinen Häufungspunkt.

THEOREM 14. *Wenn $D \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend ist und die Nullstellen einer holomorphen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ einen Häufungspunkt in D haben, dann $f \equiv 0$.*

BEWEIS. Wenn $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $f(z_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \in D$ und $z_n \neq z_0$ für alle n , dann gilt $f(z_0) = 0$, weil f stetig ist. Wir betrachten die Potenzreihenentwicklung von $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ um z_0 . Wenn $f \not\equiv 0$, dann existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $a_k \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < k$. Die Funktion $g(z) = f(z)/(z - z_0)^k$ ist holomorph und $g(z_n) = f(z_n)/(z_n - z_0)^k = 0$. Nun folgt $g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = 0$. Dies bedeutet $a_k = 0$, denn $g(z_0) = a_k$. $\square$

4.8.2. Identitätsprinzip.

THEOREM 15. *Es seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und D eine zusammenhängende Menge. Wenn $f(z_n) = g(z_n)$ für unendlich viele Punkte z_n , die einen Häufungspunkt in D besitzen, dann $f \equiv g$ auf D .*

Die Voraussetzungen des Identitätsprinzips sind zum Beispiel erfüllt, wenn $f(z) = g(z)$ für alle z in einer offenen Menge $U \subset D$ oder für alle z in einem reellen Intervall $(a, b) \subset D$.

4.8.3. *Fortsetzung der reellen Funktion $\ln x$.* Die Fortsetzung einer reell analytischen Funktion zu einer holomorphen Funktion auf eine einfach zusammenhängende Umgebung des reellen Definitionsgebietes ist eindeutig und dort durch die entsprechende komplexe Potenzreihe gegeben, denn das reelle Definitionsgebiet ist eine Menge mit Häufungspunkt.

Zum Beispiel ist die Funktion $\ln x$ für $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$ definiert und um jeden Punkte $x_0 > 0$ in eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius x_0 entwickelbar. Es gilt

$$\ln x = \ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x_0^n n} (x - x_0)^n \text{ für } |x - x_0| < x_0.$$

Die entsprechende komplexe Potenzreihe

$$\ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x_0^n n} (z - x_0)^n \text{ für } |z - x_0| < x_0$$

definiert eine holomorphe Funktion auf der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < x_0\}$, die für $z \in \mathbb{R}$ und $0 < z < 2x_0$ mit $\ln z$ und deshalb auch mit dem Hauptwert des Logarithmus, wie er in Abschnitt 2.6.1 als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definiert wurde, übereinstimmt.

5. Isolierte Singularitäten und Residuensatz

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $z_0 \notin D$; z.B. $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z_0 = 0$ und

$$f(z) = \frac{\cosh z - 1}{z^2}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2} \text{ oder } f(z) = e^{1/z}.$$

Kann man die Funktion f trotzdem in der Nähe des Punktes z_0 gut beschreiben? Gibt es eine Reihenentwicklung der Funktion f um den Punkt z_0 , die die Potenzreihenentwicklung ersetzt? Kann man die Singularitäten qualitativ unterscheiden?

5.1. Laurentreihen. Wenn das Definitionsgebiet D den offenen Kreisring

$$(24) \quad K_{R_1, R_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

enthält, dann kann man f um z_0 in eine Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ entwickeln, die für alle $z \in K_{R_1, R_2}(z_0)$ konvergiert. Eine solche Reihe heißt **Laurentreihe** von f um z_0 .

THEOREM 16 (Laurentreihenentwicklung). *Wenn $f : K_{R_1, R_2}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt für jede Kurve $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $R_1 < r < R_2$ und für alle $z \in K_{R_1, R_2}(z_0)$:*

$$(25) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Diese Laurentreihenentwicklung um z_0 ist eindeutig.

5.1.1. *Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der Laurentreihenentwicklung.* Es sei $z \in K_{R_1, R_2}(z_0)$. Dann existieren $R_1 < r_1$ und $r_2 < R_2$ mit $z \in K_{r_1, r_2}(z_0)$. Der Rand des abgeschlossenen Kreisringes $\overline{K_{r_1, r_2}(z_0)}$ besteht aus zwei Kurven γ_1 und $-\gamma_2$ mit $\gamma_1(t) = z_0 + r_2 e^{it}$ und $\gamma_2(t) = z_0 + r_1 e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Da f in $K_{R_1, R_2}(z_0)$ holomorph ist, folgt aus der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(- \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right).$$

Nun werden beide Kurvenintegrale mit Hilfe der geometrischen Reihe in Potenzreihen entwickelt.

Falls $\zeta \in \gamma_2$, so gilt $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Falls $\zeta \in \gamma_1$, so gilt $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = - \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = - \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) (\zeta - z_0)^n \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n}} (z - z_0)^{-(n+1)} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-(n-1)}} (z - z_0)^{-n} = - \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Setzt man diese Reihen für die Integranden ein und vertauscht Summation und Integration, so erhält man

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) (z - z_0)^n.$$

Die Funktion $f(\zeta)(\zeta - z_0)^k$ ist für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $r_1 < r_2$ mit $R_1 < r_1$ und $r_2 < R_1$ holomorph auf $\overline{K_{r_1, r_2}(z_0)}$. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt $\int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^k d\zeta = \int_{\gamma_2} f(\zeta)(\zeta - z_0)^k d\zeta$ für die Kreislinien $\gamma_j = z_0 + r_j e^{it}$. Die Eindeutigkeit der Laurentreihenentwicklung folgt aus der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklungen auf ihren Konvergenzgebieten $|z - z_0| < R_2$ bzw. $R_1 < |z - z_0|$.

5.1.2. *Haupt- und Regulärteil einer Laurentreihe.* Für eine Laurentreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ heißen die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ **Regulärteil** und $\sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ **Hauptteil** der Laurentreihe.

5.1.3. *Laurententwicklung durch Einsetzen in eine Potenzreihe.* Die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Die Laurentreihenentwicklung um $z_0 = 0$ läßt sich aus der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n$ mit $w = 1/z$ herleiten:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(-n)!} z^n$$

Der Hauptteil dieser Laurentreihe ist $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(-n)!} z^n$, der Regulärteil die konstante Funktion 1.

5.1.4. *Laurententwicklung mit Hilfe der geometrischen Reihe.* Die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{2, 3\}$ holomorph. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung erhält man $f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$. Die Laurentreihenentwicklung hängt vom gewählten Punkt z_0 ab.

$z_0 = 2$: Die Funktion f ist auf dem Kreisring $K_{0,1}(2)$ holomorph. Die Laurentreihe läßt sich aus der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = z - 2$ herleiten:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-2)-1} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-2)} - \frac{1}{z-2} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n - \frac{1}{z-2} = -\sum_{n=-1}^{\infty} (z-2)^n \end{aligned}$$

Der Regulärteil dieser Laurentreihe ist $-\sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n$, der Hauptteil die Funktion $-(z-2)^{-1}$.

$z_0 = 0$: Die Funktion f ist auf dem Kreisring $K_{2,3}(0)$ holomorph. Die Laurentreihe läßt sich aus der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = \frac{z}{3}$ bzw. $q = \frac{2}{z}$ herleiten:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2^n}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3^{n+1}} z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n \end{aligned}$$

Der erste Summand dieser Laurentreihe der Regulärteil, der zweite Summand der Hauptteil.

5.2. Isolierte Singularitäten. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine Funktion f hat in z_0 eine isolierte Singularität, wenn eine offene Umgebung $U \ni z_0$ des Punktes existiert, so dass $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. Zum Beispiel haben die Funktionen $\frac{\cosh z - 1}{z^2}$, $\frac{1}{z}$ und $e^{1/z}$ in $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität.

Hat f in z_0 eine isolierte Singularität, so ist f in einem Kreisring $K_{0,r}(z_0)$ um z_0 holomorph und läßt sich dort in eine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

entwickeln, die für alle $z \in K_{0,r}(z_0)$ absolut konvergiert.

5.2.1. *Klassifizierung isolierter Singularitäten mit Hilfe der Laurentreihe.* Eine isolierte Singularität z_0 heißt

- **hebbar**, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$.
- **Pol**, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$ existiert, so dass $a_n = 0$ für alle $n < k$
- **wesentlich**, wenn sie nicht hebbar und kein Pol ist, es also unendlich viele Koeffizienten $a_n \neq 0$ mit $n < 0$ gibt.

Die isolierte Singularität von $\frac{\cosh z - 1}{z^2}$ in $z_0 = 0$ ist hebbar, denn

$$\frac{\cosh z - 1}{z^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} - 1}{z^2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} z^{2n}$$

ist eine Potenzreihe. Die isolierte Singularität von $\frac{1}{z}$ in $z_0 = 0$ ist ein Pol, denn $a_n = 0$ für alle $n < -1$, also $k = -1$. Die isolierte Singularität von $e^{\frac{1}{z}}$ in $z_0 = 0$ ist eine wesentliche Singularität, denn ihre Laurentreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$ hat unendlich viele Koeffizienten $a_n \neq 0$ für $n < 0$.

5.2.2. *Verhalten in der Nähe isolierter Singularitäten.* Isolierte Singularitäten lassen sich auch durch ihr qualitatives Verhalten in der Nähe der Singularität unterscheiden.

THEOREM 17. *Es sei z_0 eine isolierte Singularität der Funktion f . Dann gilt*

- z_0 ist genau dann hebbar, wenn f auf $K_{0,r}(z_0)$ beschränkt ist ($r < \infty$).
- z_0 ist genau dann ein Pol, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.
- z_0 ist genau dann wesentlich, wenn für alle Umgebungen $U \ni z_0$, für alle $w \in \mathbb{C}$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $z \in U \setminus \{z_0\}$ mit $|f(z) - w| < \varepsilon$ existiert.

BEWEIS. Der Hauptteil einer isolierten Singularität konvergiert für alle $z \neq z_0$ und ist eine Potenzreihe in $\frac{1}{z - z_0}$, die auf $\mathbb{C}$ konvergiert. Die Aussagen folgen aus dem Satz von Liouville. $\square$

BEMERKUNG 33. Handelt es sich um eine wesentliche Singularität, so werden in jeder noch so kleinen Umgebung der Singularität fast alle komplexen Zahlen als Funktionswerte angenommen.

5.3. Polstellen und Nullstellen. Eine holomorphe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ hat in $z_0 \in D$ eine **Nullstelle der Ordnung** k , falls die Potenzreihenentwicklung um z_0 von folgender Form ist:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_k \neq 0$$

Hat die Funktion f in z_0 eine Polstelle, so ist $(z - z_0)^k f(z)$ eine holomorphe Funktion, falls $a_n = 0$ für alle $n < -k$. Eine Funktion f hat in z_0 eine **Polstelle der Ordnung** k , falls in die Laurentreihenentwicklung um z_0 von folgender Form ist:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_{-k} \neq 0$$

BEMERKUNG 34. Eine Polstelle der Ordnung k könnte man auch Nullstelle der Ordnung $-k$ nennen. Eine Nullstelle der Ordnung k könnte man auch Polstelle der Ordnung $-k$ nennen.

Es seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, $f(z) = g(z)/h(z)$ und $z_0 \in U$. Wenn z_0 eine Nullstelle der Ordnung k_1 von g und eine Nullstelle der Ordnung k_2 von h ist, dann gilt

- z_0 ist eine Nullstelle der Ordnung $k = k_1 - k_2$, falls $k_1 \geq k_2$.
- z_0 ist eine Polstelle der Ordnung $k = k_2 - k_1$, falls $k_2 \geq k_1$.

5.4. Berechnung der Laurentkoeffizienten in Polstellen.

THEOREM 18. *Hat f in z_0 eine Polstelle der Ordnung k , so gilt für $m \leq k$*

$$(26) \quad a_{-m} = \frac{1}{(k-m)!} g^{(k-m)}(z_0) \text{ mit } g(z) = (z - z_0)^k f(z).$$

BEWEIS. Die Funktion g ist holomorph in z_0 . Für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ gilt $b_n = a_{n-k} = \frac{1}{n!} g^{(n)}(z_0)$. $\square$

Zum Beispiel hat die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ in $z_0 = 2$ eine Polstelle erster Ordnung. Mit $k = m = 1$ erhalten wir, ohne Partialbruchzerlegung,

$$g(z) = (z - 2)f(z) = \frac{1}{z - 3} \text{ und } a_{-1} = \frac{1}{(1-1)!} g^{(0)}(2) = g(2) = -1.$$

5.5. Das Residuum. Zur Berechnung des komplexen Kurvenintegrals einer holomorphen Funktion mit isolierten Singularitäten kann man die Laurentreihenentwicklung nutzen. Der Koeffizient a_{-1} der Laurentreihenentwicklung spielt eine besondere Rolle, er wird Residuum genannt.

Es sei $f : K_{0,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ihre Laurentreihe. Der Koeffizient $a_{-1} =: \text{Res}(f, z_0)$ heißt **Residuum** von f in z_0 .

BEMERKUNG 35. Ist f holomorph in z_0 , so gilt $\text{Res}(f, z_0) = 0$.

THEOREM 19 (Bedeutung des Residuums). *Wenn $f : K_{0,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die Laurentreihenentwicklung von f um z_0 und $0 < r < R$ ist, dann gilt für die Kurve γ_r mit $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z) dz = a_{-1}$$

BEWEIS. Die Aussage folgt aus der Vertauschbarkeit von Integration und Summation und den Grundintegralen in Beispiel 3.2.3:

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = \int_{\gamma_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\gamma_r} (z - z_0)^n dz = a_{-1} 2\pi i.$$

$\square$

5.5.1. Ablesen des Residuums in der Laurentreihe. Die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ hat eine isolierte Singularität in $z_0 = 0$. Die Laurentreihenentwicklung der Funktion f ist einfach zu bestimmen. Das Residuum kann man dann aus der Laurentreihe ablesen. Es gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \Rightarrow \text{Res}(f, 0) = \frac{1}{1!} = 1.$$

5.5.2. *Bestimmung des Residuums durch Partialbruchzerlegung.* Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ hat isolierte Singularitäten, Pole erster Ordnung, in $z_0 = \pm i$, denn $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Eine Partialbruchzerlegung mit komplexen Koeffizienten führt zu

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) = -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z+i}$$

Da der erste Summand in $z_0 = -i$ holomorph ist, gilt $\text{Res}(f, -i) = i/2$. Da der zweite Summand in $z_0 = i$ holomorph ist, gilt $\text{Res}(f, i) = -i/2$.

5.5.3. *Division von Potenzreihen.* Die Funktion $f(z) = (\cos z - 1)^{-1}$ hat isolierte Singularitäten in den Nullstellen des Nenners $h(z) = \cos z - 1$. Da $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ gilt für $z = x + iy$

$$\cos z = 1 \Leftrightarrow (e^{iz} + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{-y} e^{ix} = 1 \Leftrightarrow y = 0 \text{ und } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Die Nullstellen des Nenners sind doppelt, da $h'(2k\pi) = -\sin(2k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $h''(2k\pi) = -\cos(2k\pi) = -1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Funktion f hat also Pole zweiter Ordnung in den Punkten $z_k = 2n\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Es gilt

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\cos z = \cos((z - z_k) + z_k) = \cos(z - z_k) \cos z_k - \sin(z - z_k) \sin z_k = \cos(z - z_k)$$

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z - z_k)^{2n}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wir können die ersten Koeffizienten der Laurentreihe $f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} a_n (z - z_k)^n$ durch Koeffizientenvergleich in der Gleichung $f(z)h(z) \equiv 1$ bestimmen. Da

$$\begin{aligned} 1 &= (a_{-2}(z - z_k)^{-2} + a_{-1}(z - z_k)^{-1} + a_0 + \dots) \left(-\frac{(z - z_k)^2}{2} + \frac{(z - z_k)^4}{4!} - \dots \right) \\ &= -\frac{a_{-2}}{2} - \frac{a_{-1}}{2}(z - z_k)^1 + \left(\frac{a_{-2}}{4!} - \frac{a_{-1}}{2} \right) (z - z_k)^2 + \dots, \end{aligned}$$

gilt $a_{-2} = -2$ und $a_{-1} = \text{Res}(f, z_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

5.5.4. *Residuumformel in Polstellen.* Will man das Residuum in einer Polstelle bestimmen, so kann man Theorem 18 und Formel 26 benutzen:

- Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ hat isolierte Singularitäten, Pole erster Ordnung, in $z_0 = \pm i$ (siehe Abschnitt 5.5.2). Mit $m = k = 1$ folgt

$$g(z) = (z - i)f(z) = \frac{1}{z + i}, \quad \text{Res}(f, i) = g(i) = \frac{1}{2i} \quad (z_0 = i)$$

und

$$g(z) = (z + i)f(z) = \frac{1}{z - i}, \quad \text{Res}(f, -i) = g(-i) = \frac{1}{-2i} \quad (z_0 = -i)$$

- Die Funktion $f(z) = \frac{1}{\cos z - 1}$ hat Polstellen zweiter Ordnung in $z_k = 2n\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ (siehe Abschnitt 5.5.3). Es folgt

$$g(z) = (z - z_k)^2 f(z) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z - z_k)^{2n-2}}$$

und mit $g = \frac{1}{h}$

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} (z - z_k)^{2n}, \quad h'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{(2n+2)!} (z - z_k)^{2n-1}$$

und

$$g'(z) = -\frac{h'(z)}{h(z)^2}, \quad \text{Res}(f, z_k) = g'(z_k) = -\frac{h'(z_k)}{h(z_k)^2} = 0.$$

Insbesondere läßt sich für rationale Funktionen das Residuum in einer Polstelle erster Ordnung leicht mit Hilfe des folgenden Lemmas bestimmen.

LEMMA 9. Wenn $f = \frac{q}{h}$ in z_0 einen Pol erster Ordnung hat, q und h in z_0 holomorph sind und $q(z_0) \neq 0$, dann gilt

$$(27) \quad \text{Res}\left(\frac{q}{h}, z_0\right) = \frac{q(z_0)}{h'(z_0)}.$$

BEWEIS. Aus Satz 18 folgt

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{(z - z_0)q(z)}{h(z)} \\ \text{Res}(f, z_0) &= g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)q(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{((z - z_0)q(z))'}{h'(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{q(z) + (z - z_0)q'(z)}{h'(z)} = \frac{q(z_0)}{h'(z_0)}. \end{aligned}$$

□

5.6. Residuensatz. Die Berechnung von komplexen Kurvenintegralen läßt sich auf die Berechnung von Residuen reduzieren.

Wir berechnen komplexe Kurvenintegrale von Funktionen mit isolierten Singularitäten. Auf der Kurve darf keine dieser Singularitäten liegen, aber das von der geschlossenen Kurve berandete Gebiet kann Singularitäten der Funktion enthalten.

THEOREM 20. Es seien $z_1, \dots, z_p \in D \subset \mathbb{C}$ endlich viele Punkte, $f : D \setminus \{z_1, \dots, z_p\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $G \subset D$ eine beschränkte Menge mit stückweise glattem Rand, $\bar{G} \subset D$ und $z_j \notin \partial G$ für alle j . Dann gilt

$$(28) \quad \int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j: z_j \in G} \text{Res}(f, z_j).$$

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus der Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf $G \setminus \bigcup_{j=1}^p K_\varepsilon(z_j)$ mit kleinen Kreisscheiben $K_\varepsilon(z_j) = \{z : |z - z_j| < \varepsilon\}$, die einander nicht überschneiden, und Satz 19. □

In Beispiel 5.5.2 haben wir die Residuen der Funktion $(1 + z^2)^{-1}$ berechnet. Die Kurve $\gamma(t) = 2e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ berandete die Kreisscheibe $K_2(0) = \{z : |z| < 2\}$, die beide Postellen $\pm i$ enthält. Es folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{1 + z^2} dz = \text{Res}\left(\frac{1}{1 + z^2}, i\right) + \text{Res}\left(\frac{1}{1 + z^2}, -i\right) = \frac{1}{2i} + \frac{1}{-2i} = 0.$$

Für jede geschlossene Kurve γ , die die Polstelle i genauso oft positiv orientiert umrundet wie die Polstelle $-i$ gilt $\int_{\gamma} (1 + z^2)^{-1} dz = 0$. Jede geschlossene Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \leq 1\}$ hat diese Eigenschaft, da sie die Strecke $\{iy : |y| \leq 1\}$ nicht

kreuzen darf. Darum besitzt die Funktion $(1 + z^2)^{-1}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \leq 1\}$ eine Stammfunktion.

Die Kurve $\tilde{\gamma}(t) = i + e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ berandet die Kreisscheibe $\{z : |z - i| < 1\}$, die nur die Postelle i enthält, die Polstelle $-i$ jedoch nicht. Es folgt

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{1 + z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{1 + z^2}, i \right) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

5.7. Berechnung uneigentlicher reeller Integrale. Man kann das reelle Integral $\int_a^b f(x) dx$ für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und eine reellwertige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ als komplexes Kurvenintegral verstehen.

Wenn eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $[a, b] \subset D$ existiert, sich f also auf eine Umgebung des Intervalls $[a, b]$ in $\mathbb{C}$ fortsetzen läßt, so gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(t) dt$ für die Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = t$.

5.7.1. *Uneigentliche Integrale rationaler Funktionen.*

THEOREM 21. *Es seien p, q Polynome mit $\deg q \geq 2 + \deg p$ und $q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wenn $z_1, \dots, z_m$ die komplexen Nullstellen des Polynoms $q(z)$ sind, dann gilt*

$$(29) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res} \left(\frac{p}{q}, z_j \right).$$

BEWEIS. Wir setzen $f = \frac{p}{q}$. Da $\deg q \geq 2 + \deg p$, existiert eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ und $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$.

Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konvergiert absolut, weil

$$\int_{-\infty}^a |f(x)| dx \leq M \int_{-\infty}^a x^{-2} dx = M[-x^{-1}]_{-\infty}^a = -a^{-1}M$$

und

$$\int_b^{\infty} |f(x)| dx \leq M \int_b^{\infty} x^{-2} dx = M[-x^{-1}]_b^{\infty} = b^{-1}M$$

für alle $a < b$ und $\lim_{a \rightarrow -\infty} -a^{-1}M = \lim_{b \rightarrow \infty} b^{-1}M = 0$.

Nachdem die Existenz des uneigentlichen Integrals gesichert ist, können wir den Wert als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

berechnen.

Mit $\gamma_1 : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = Re^{it}$, und $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ eine geschlossene Kurve (der Rand des Halbkreises) gilt

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} dx &= \int_{\gamma_1} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} dz - \int_{\gamma_2} \frac{p(z)}{q(z)} dz \\ \int_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} dz &= 2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res}(f(z), z_j) \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| = \left| \int_0^{\pi} f(Re^{it}) Rie^{it} dt \right| \leq R \int_0^{\pi} |f(Re^{it})| dt \leq R \int_0^{\pi} \frac{M}{R^2} dt = \frac{M\pi}{R}$$

falls der Halbkreis $\{z : \Im z > 0, |z| < R\}$ alle Nullstellen mit $\Im z_j > 0$ enthält. Wenn man R groß genug wählt, ist dies der Fall, weil q nur endlich viele Nullstellen hat.

Nun folgt die Gleichung für $R \rightarrow \infty$, da sich die Summe der Residuen für große R nicht mehr ändert. $\square$

Beispiele:

- Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 21, denn für $p(x) \equiv 1$ und $q(x) = 1 + x^2$ gilt $\deg p = 0$, $\deg q = 2$ und $q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die komplexen Nullstellen des Polynoms $1 + z^2$ sind $\pm i$. Nur für i gilt $\Im i > 0$. Das Residuum der Funktion $f(z)$ in i haben wir schon in Beispiel 5.5.2 berechnet. Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \operatorname{Res}((1 + z^2)^{-1}, i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

- Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 21, denn für $p(x) \equiv 1$ und $q(x) = 1 + x^4$ gilt $\deg p = 0$, $\deg q = 4$ und $q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die komplexen Nullstellen des Polynoms $1 + z^4$ sind $z_j = e^{i\pi/4} e^{i\pi j/2}$. Nur für $j = 0, 1$ gilt $\Im z_j > 0$. Es gilt für die Polstellen erster Ordnung z_j

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, z_j\right) = \frac{1}{4z_j^3} = \frac{1}{4} e^{-i\pi 3/4} e^{-i\pi j 3/2}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx &= 2\pi i \left(\frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_1^3} \right) = \frac{\pi i}{2} e^{-i\pi 3/4} (1 + e^{-i\pi 3/2}) \\ &= \frac{\pi i}{2} (e^{-i\pi 3/4} + e^{-i\pi 9/4}) = \frac{\pi i}{2} (e^{-i\pi 3/4} + e^{-i\pi 1/4}) \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

5.7.2. *Integrale von $f(x) \sin(\alpha x)$ bzw. $f(x) \cos(\alpha x)$ ohne Singularitäten.*

THEOREM 22. *Es seien $\alpha > 0$, f eine holomorphe Funktion mit endlich vielen Singularitäten $z_1, \dots, z_m$. Wenn $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ und $z_j \notin \mathbb{R}$ für alle j , dann gilt*

$$(30) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = \Re \left(2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, z_j) \right)$$

und

$$(31) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = \Im \left(2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, z_j) \right).$$

BEWEIS. Wegen $e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) \cos(\alpha x) dx &= \Re \left(\int_{-R_1}^{R_2} f(x) e^{i\alpha x} dx \right) \\ \int_{-R_1}^{R_2} f(x) \sin(\alpha x) dx &= \Im \left(\int_{-R_1}^{R_2} f(x) e^{i\alpha x} dx \right). \end{aligned}$$

Nun wählen wir R_1, R_2 so groß, dass das Rechteck

$$Q := \{z = x + iy : x \in [-R_1, R_2], y \in [0, R_1 + R_2]\}$$

alle Singularitäten mit $\Im z_j > 0$ enthält. Dann gilt mit

$$\begin{aligned}\gamma_2(t) &= R_2 + it \quad (0 \leq t \leq R_1 + R_2) \\ \gamma_3(t) &= i(R_1 + R_2) - t \quad (-R_2 \leq t \leq R_1) \\ \gamma_4(t) &= -R_1 - it \quad (-R_1 - R_2 \leq t \leq 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-R_1}^{R_2} f(x) e^{i\alpha x} dx &= \int_{\partial Q} f(z) e^{i\alpha z} dz - \sum_{m=2}^4 \int_{\gamma_m} f(z) e^{i\alpha z} dz \\ &= 2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, z_j) - \sum_{m=2}^4 \int_{\gamma_m} f(z) e^{i\alpha z} dz.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Bedingung $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ kann man $\sum_{m=2}^4 \int_{\gamma_m} f(z) e^{i\alpha z} dz$ abschätzen und

$$\lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \sum_{m=2}^4 \int_{\gamma_m} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0$$

zeigen. □

Zum *Beispiel* erfüllt die Funktion $f(z) = \frac{1}{\alpha^2 + z^2}$ mit $\alpha > 0$ die Voraussetzungen des Theorems 22. Die Funktion $\frac{e^{i\alpha z}}{\alpha^2 + z^2}$ besitzt Pole erster Ordnung in $\pm i\alpha$. Nur $z_1 = i\alpha$ liegt in der oberen Halbebene. Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2 + x^2} dx = \Re \left(2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\alpha z}}{\alpha^2 + z^2}, i\alpha \right) \right) = \Re \left(2\pi i \frac{e^{i\alpha(i\alpha)}}{2(i\alpha)} \right) = \frac{\pi e^{-\alpha^2}}{\alpha}.$$

Da $\cos$ und f gerade Funktionen sind, kann man auch

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-\alpha^2}}{2\alpha}$$

berechnen.

5.7.3. *Integrale von $f(x) \sin(\alpha x)$ bzw. $f(x) \cos(\alpha x)$ mit Singularitäten.* Hat eine Funktion f wie in Theorem 22 doch Singularitäten auf der reellen Achse, so kann man ähnliche Integralformeln beweisen, falls es sich nur um Pole erster Ordnung handelt.

THEOREM 23. *Es seien $\alpha > 0$, f eine holomorphe Funktion mit endlich vielen Singularitäten $z_1, \dots, z_m \notin \mathbb{R}$ und $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$. Wenn $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ und die Singularitäten $x_j \in \mathbb{R}$ für alle j Pole erster Ordnung sind, dann gilt*

$$\begin{aligned}(32) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx \\ = \Re \left(2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, z_j) + \pi i \sum_{x_j} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, x_j) \right)\end{aligned}$$

und

$$(33) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = \Im \left(2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_j) + \pi i \sum_{x_j} \operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, x_j) \right).$$

BEWEIS. Die zusätzlichen Beiträge ergeben sich aus den „Umwegen“ $\gamma_j(t) = x_j + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Hat f in x_j einen Pol erster Ordnung, so gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} f(z) dz &= \int_{\gamma_j} a_{-1}(z - x_j)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - x_j)^n dz \\ &= \int_{\gamma_j} a_{-1}(z - x_j)^{-1} dz + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_j} a_n(z - x_j)^n dz \\ &= a_{-1} \int_0^{\pi} \varepsilon e^{-it} \varepsilon i e^{it} dt + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \varepsilon^n e^{nit} \varepsilon i e^{it} dt \\ &= a_{-1} \pi + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^{n+1} \frac{1}{n+1} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwindet der zweite Summand. $\square$

BEMERKUNG 36. Für Pole höherer Ordnung auf der reellen Achse funktioniert dieser Ansatz nicht, weil das komplexe Kurvenintegral entlang γ_j für $\varepsilon \rightarrow 0$ divergiert. In dem Fall existiert auch das uneigentliche Integral nicht.

Zum *Beispiel* erfüllt die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die Voraussetzungen des Theorems 23. Sie hat in $x_0 = 0$ einen Pol erster Ordnung. Mit $\alpha = 1$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \Im(\pi i \operatorname{Res}(e^{iz} z^{-1}, 0)) = \Im(\pi i e^0) = \pi.$$

6. Gebrochen lineare Abbildungen - Möbiustransformationen

Wir betrachten Funktionen der Form

$$(34) \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ und } (c, d) \neq (0, 0).$$

Die Funktion f ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $cz + d \neq 0$ definiert und als Quotient zweier Polynome holomorph. Die Bedingung $(c, d) \neq (0, 0)$ sichert, dass das Definitionsgebiet der Funktion nicht leer ist.

Eine gebrochen lineare Funktion ist als Quotient zweier Polynome holomorph auf ihrem Definitionsgebiet.

- Wenn $c = 0$, so ist f für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert.
- Wenn $c \neq 0$, so besitzt f in $z = -d/c$ eine isolierte Singularität.
 - Ist $-d/c$ auch Nullstelle des Zählers, also $a(-d/c) + b = 0$, so hat f in $-d/c$ eine hebbare Singularität und f ist konstant:

$$f(z) = \frac{az + ad/c}{cz + d} = \frac{a}{c}$$

- Ist $-d/c$ keine Nullstelle des Zählers, also $ad - bc \neq 0$, so hat f in $-d/c$ eine Polstelle erster Ordnung.

6.1. Fortsetzung zu einer Abbildung $\mathbb{C} \cup \infty \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$. Wenn $c = a = 0$, dann ist f eine konstante Funktion und es gilt $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = b/d$.

Wenn $c = 0$ und $a \neq 0$, so ist die Funktion f eine lineare Funktion und es gilt $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$. Man kann $f(\infty) = \infty$ setzen.

Wenn $c \neq 0$ und $ad - bc = 0$, dann ist f eine konstante Funktion und es gilt $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a/c$.

Wenn $c \neq 0$ und $ad - bc \neq 0$, dann ist f auf $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ holomorph und besitzt in $-d/c$ eine Polstelle erster Ordnung. Dann gilt $\lim_{z \rightarrow -d/c} |f(z)| = \infty$ und $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = a/c$. Man kann $f(\infty) = a/c$ und $f(-d/c) = \infty$ setzen.

BEMERKUNG 37. Überdeckt man $\mathbb{C} \cup \infty = U_0 \cup U_1$ mit zwei komplexen Karten $U_0 = \mathbb{C}$ und $U_1 = \{z \neq 0\} \cup \{\infty\}$, so macht der Kartenwechsel $U_1 \setminus \{\infty\} \rightarrow U_0 \setminus \{0\}$, $z \mapsto 1/z$, zu einer komplexen Mannigfaltigkeit. Die oben definierten Fortsetzungen der linearen gebrochenen Funktionen sind holomorphe Abbildungen auf dieser Mannigfaltigkeit.

6.2. Zerlegung in Streckung, Verschiebung und Inversion. Wir betrachten nicht konstante, gebrochen lineare Funktionen, also $ad - bc \neq 0$.

6.2.1. Verkettung gebrochen linearer Abbildungen. Es seien

$$f(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \text{ und } g(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

zwei nicht konstante, gebrochen lineare Funktionen. Ihre Verkettung

$$\begin{aligned} (g \circ f)(z) &= g(f(z)) = g\left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) = \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} \\ &= \frac{a_2(a_1 z + b_1) + b_2(c_1 z + d_1)}{c_2(a_1 z + b_1) + d_2(c_1 z + d_1)} = \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)z + a_2 b_1 + b_2 d_1}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)z + c_2 b_1 + d_2 d_1} \end{aligned}$$

ist wieder eine nicht konstante, gebrochen lineare Abbildung $(az + b)/(cz + d)$ mit

$$\begin{aligned} a &= a_2 a_1 + b_2 c_1 \\ b &= a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c &= c_2 a_1 + d_2 c_1 \\ d &= c_2 b_1 + d_2 d_1, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} ad - bc &= (a_2 a_1 + b_2 c_1)(c_2 b_1 + d_2 d_1) - (a_2 b_1 + b_2 d_1)(c_2 a_1 + d_2 c_1) \\ &= a_2 a_1 c_2 b_1 + a_2 a_1 d_2 d_1 + b_2 c_1 c_2 b_1 + b_2 c_1 d_2 d_1 \\ &\quad - a_2 b_1 c_2 a_1 - a_2 b_1 d_2 c_1 - b_2 d_1 c_2 a_1 - b_2 d_1 d_2 c_1 \\ &= a_2 d_2 (a_1 d_1 - b_1 c_1) + b_2 c_2 (c_1 b_1 - a_1 d_1) = (a_2 d_2 - b_2 c_2)(a_1 d_1 - b_1 c_1) \neq 0. \end{aligned}$$

6.2.2. Einfache gebrochen lineare Abbildungen. Die **Streckungen** $S_a(z) := az$ mit $a \neq 0$, $d = 1$, $b = c = 0$, die **Verschiebungen** $V_b(z) = z + b$ mit $a = d = 1$, $b \in \mathbb{C}$ und $c = 0$ und die **Inversion** $I(z) = 1/z$, also $a = d = 0$ und $b = c = 1$, sind spezielle gebrochen lineare Transformationen, die man gut versteht.

6.2.3. Zerlegungssatz. Jede nichtkonstante, gebrochen lineare Funktion ist eine Verkettung von Streckungen, Verschiebungen und Inversionen.

Wir betrachten eine nichtkonstante, gebrochen lineare Abbildung

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ mit } ad - bc \neq 0.$$

Wenn $c = 0$, so entsteht f aus einer Streckung und einer Verschiebung:

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = V_{b/d} \left(\frac{a}{d}z \right) = V_{b/d}(S_{a/d}(z)) = (V_{b/d} \circ S_{a/d})(z)$$

Wenn $c \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) - \frac{a}{c}d + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c} \\ &= V_{a/c}(S_{(bc-ad)/c^2}(I(V_{d/c}(z)))) = (V_{a/c} \circ S_{(bc-ad)/c^2} \circ I \circ V_{d/c})(z). \end{aligned}$$

6.3. Umkehrbarkeit. Wir suchen eine Umkehrfunktion einer nichtkonstanten, gebrochen linearen Funktion.

6.3.1. Lokale Umkehrbarkeit. Die komplexe Ableitung der Funktion f ist

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Es gilt genau dann $f'(z) \neq 0$ für alle z im Definitionsgebiet, wenn $ad - bc \neq 0$. Aus der Ungleichung $ad - bc \neq 0$ folgt $(a, d) \neq (0, 0)$. Jede nichtkonstante, gebrochen lineare Funktion ist lokal umkehrbar.

6.3.2. Wertebereich. Für eine gegebene komplexe Zahl w hat die Gleichung $f(z) = w$ die Lösung

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \Leftrightarrow cwz + dw = az + b \Leftrightarrow z(a - cw) = dw - b \Leftrightarrow z = \frac{dw - b}{-cw + a},$$

falls $w \neq a/c$. Dies bedeutet $f(\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}) = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. Allerdings gilt $f(\infty) = a/c$ und $f(-d/c) = \infty$. Zusammengefasst $f(\mathbb{C} \cup \infty) = \mathbb{C} \cup \infty$.

6.3.3. Globale Umkehrfunktion. Die globale Umkehrfunktion der gebrochen linearen Funktion f ist wieder eine gebrochen lineare Funktion

$$(35) \quad f^{-1} : \{z \in \mathbb{C} : z \neq a/c\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Insbesondere gilt $f^{-1}(\infty) = -d/c$ und $f^{-1}(a/c) = \infty$.

6.4. Matrizen Schreibweise. Jeder gebrochen linearen Funktion kann man eine komplexe 2×2 -Matrix zuordnen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} = A \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Die Funktion f_A ist genau dann nicht konstant, wenn $\det A = ad - bc \neq 0$, also die Matrix A invertierbar ist.
- Für alle $\lambda \neq 0$ gilt $f_{\lambda A} = f_A$.
- Aus Abschnitt 6.3.3 folgt, dass $f_{A^{-1}}$ die Umkehrfunktion von f_A ist.
- Aus Abschnitt 6.2.1 folgt $f_A \circ f_B = f_{AB}$.

6.5. Möbiustransformationen. Die Bilder von Geraden und Kreisen unter nichtkonstanten, gebrochen linearen Funktion sind Geraden oder Kreise. Da sich jede nichtkonstante, gebrochen lineare Funktion als Verkettung von Streckungen, Verschiebungen und Inversionen schreiben läßt, muss diese Behauptung nur für Streckungen, Verschiebungen und die Inversion bewiesen werden.

6.5.1. *Affine Abbildungen.* Wir betrachten Funktionen der Form $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$.

Jede Gerade in $\mathbb{C}$ kann durch $\gamma(t) = z_0 + w_0 t$ für $t \in \mathbb{C}$ mit $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ und $w_0 \neq 0$ parametrisiert werden. Nun gilt

$$f(\gamma(t)) = a(z_0 + tw_0) + b = taw_0 + (az_0 + b) = tw_1 + z_1 \text{ mit } w_1 = aw_0, z_1 = az_0 + b.$$

Jeder Kreis in $\mathbb{C}$ besitzt eine Parametrisierung der Form $\gamma(t) = z_0 + r_0 e^{it}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ mit $z_0, r_0 \in \mathbb{C}$ und $r_0 \neq 0$. Nun gilt

$$f(\gamma(t)) = a(z_0 + r_0 e^{it}) + b = (az_0 + b) + ar_0 e^{it} = z_1 + r_1 e^{it} \text{ mit } r_1 = ar_0, z_1 = az_0 + b.$$

Abbildung 9 zeigt die Geraden

- $y = x + 1$ mit der Parametrisierung $\gamma_1(t) = -1 + t(1 + i)$,
- $y = x$ mit der Parametrisierung $\gamma_2(t) = t(1 + i)$,
- $y = (x + 1)/2$ mit der Parametrisierung $\gamma_3(t) = -1 + t(2 + i)$,

den Kreis um $(1, 1)$ mit Radius 1, definiert durch die Gleichung $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, und die Bilder dieser Objekte unter der Abbildung $f(z) = 2z + 2 - 3i$. Es gilt

$$f(\gamma_1(t)) = 2(-1 + t(1 + i)) + 2 - 3i = -3i + 2t(1 + i)$$

$$f(\gamma_2(t)) = 2t(1 + i) + 2 - 3i$$

$$f(\gamma_3(t)) = 2(-1 + t(2 + i)) + 2 - 3i = -3i + 2t(2 + i).$$

Das Bild des Kreises $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ist ein Kreis um $f(1+i) = 2+2i+2-3i = 4-i$ mit Radius 2. Man erkennt gut, dass sich der Schnittwinkel der verschiedenen Kurven unter der affinen Abbildung nicht ändert.

Abbildung 10 zeigt Bilder der Geraden $y = x/2 + 1$ mit der Parametrisierung $\gamma(t) = -2 + t(2 + i)$ unter verschiedenen Streckungen mit komplexen Faktoren.

6.5.2. *Inversion von Geraden.* Eine Gerade in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist Lösung der Gleichung $\alpha x + \beta y = \gamma$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Für $z = x + iy$ gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, -y), \text{ also } (x, y)^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, -y).$$

Aus der Geradengleichung wird

$$\begin{aligned} \alpha \frac{x}{x^2 + y^2} - \beta \frac{y}{x^2 + y^2} &= \gamma \\ \alpha x - \beta y &= \gamma(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

- Wenn $\gamma = 0$, dann wird die Geradengleichung $\alpha x + \beta y = \gamma$ unter der Inversion zu der Geradengleichung $\alpha x - \beta y = 0$.
- Wenn $\gamma \neq 0$, dann führt quadratische Ergänzung zu der Kreisgleichung

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{\alpha}{\gamma}x + y^2 + \frac{\beta}{\gamma}y &= 0 \\ \left(x - \frac{\alpha}{2\gamma}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2\gamma}\right)^2 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\gamma^2}. \end{aligned}$$

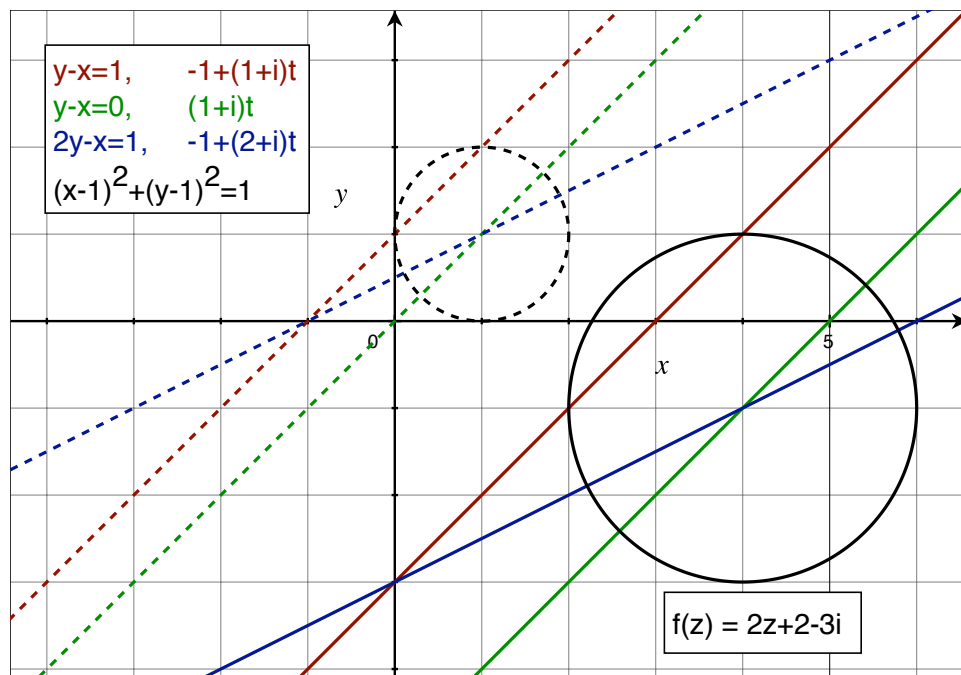


ABBILDUNG 9. Bilder von Kreisen und Geraden bei einer affinen Abbildung

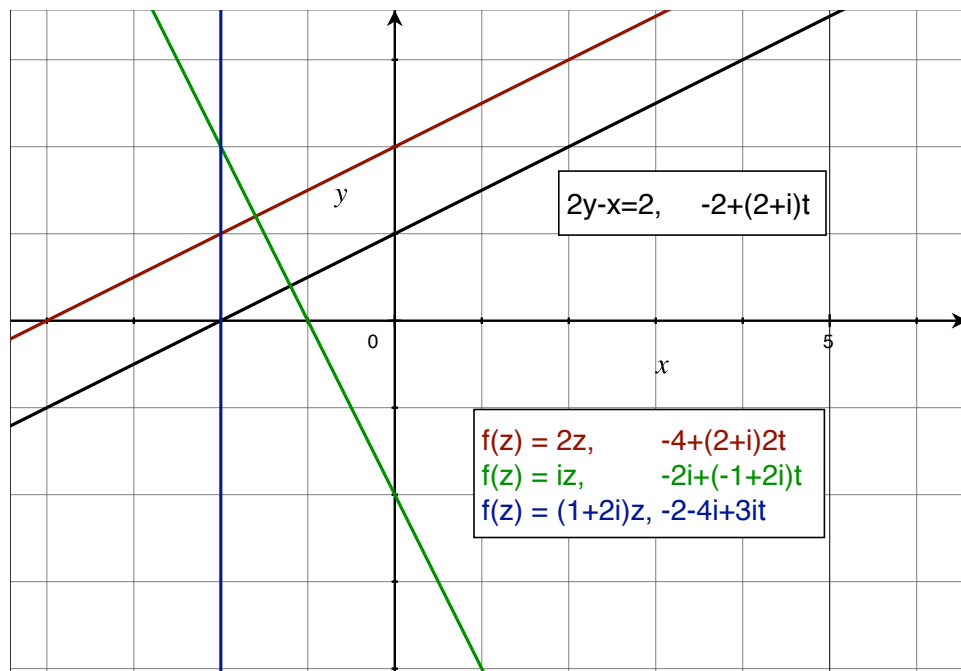


ABBILDUNG 10. Bilder einer Geraden bei komplexen Streckungen

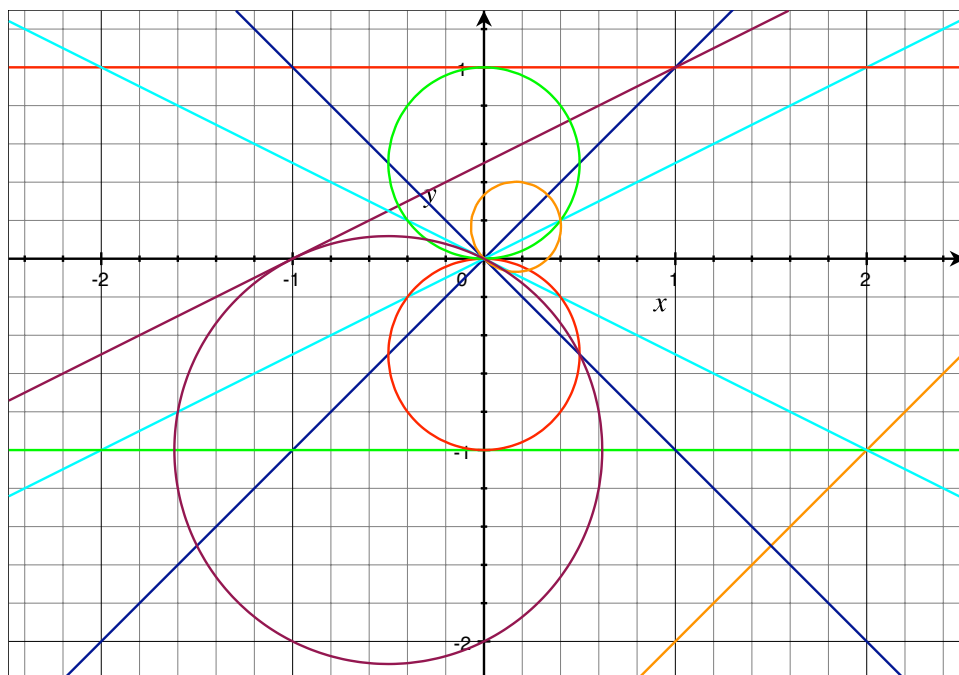


ABBILDUNG 11. Inversion von Geraden in Geraden oder Kreise

Abbildung 11 zeigt die Bilder der Geraden $y = 1$ (rot), $y = -1$ (grün), $y = x$ (blau), $y = x/2$ (türkis), $y = (x + 1)/2$ (lila) und $y = x - 3$ (orange) bei Inversion, also der Abbildung $f(z) = 1/z$. Nur die Geraden durch den Ursprung (z.B. blau und türkis) werden in Geraden abgebildet. Die anderen werden zu Kreisen durch den Ursprung.

6.5.3. *Inversion von Kreisen.* Ein Kreis in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist Lösung der Gleichung $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_0^2$ mit $x_0, y_0, r_0 \in \mathbb{R}$, $r_0 > 0$. Für $z = x + iy$ gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, -y), \text{ also } (x, y)^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, -y).$$

Aus der Kreisgleichung wird

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} - y_0\right)^2 &= r_0^2 \\ \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xx_0}{x^2 + y^2} + x_0^2 + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2yy_0}{x^2 + y^2} + y_0^2 &= r_0^2 \\ 1 + 2yy_0 - 2xx_0 + (x_0^2 + y_0^2)(x^2 + y^2) &= r_0^2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

- Wenn $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, dann wird aus der Kreisgleichung durch die Inversion die Geradengleichung $2y_0y - 2x_0x = -1$.

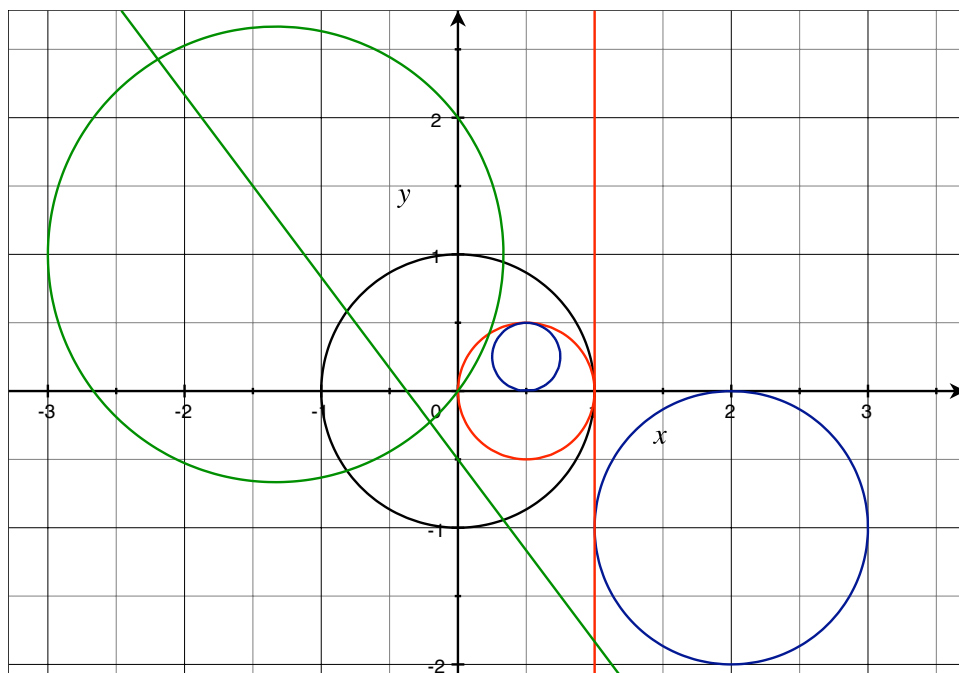


ABBILDUNG 12. Inversion von Kreisen in Kreise oder Geraden

- Wenn $r_0^2 \neq x_0^2 + y_0^2$, dann wird aus der Kreisgleichung $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_0^2$ durch Inversion die Kreisgleichung

$$1 = -2yy_0 + 2xx_0 + (r_0^2 - x_0^2 - y_0^2)(x^2 + y^2)$$

$$\frac{1}{r_0^2 - x_0^2 - y_0^2} = \left(x + \frac{x_0}{r_0^2 - x_0^2 - y_0^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{r_0^2 - x_0^2 - y_0^2}\right)^2 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{(r_0^2 - x_0^2 - y_0^2)^2}$$

$$\frac{r_0^2}{(r_0^2 - x_0^2 - y_0^2)^2} = \left(x + \frac{x_0}{r_0^2 - x_0^2 - y_0^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{r_0^2 - x_0^2 - y_0^2}\right)^2.$$

Abbildung 12 zeigt die Bilder der Kreise $x^2 + y^2 = 1$ (schwarz), $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$ (rot), $(x - 2)^2 + (y + 1)^2$ (blau) und $(x + 4/3)^2 + (y - 1)^2 = 25/9$ (grün) bei Inversion, also der Abbildung $f(z) = 1/z$. Nur die Kreise durch den Ursprung (rot und grün) werden in Geraden abgebildet. Die anderen bleiben Kreise. Der Einheitskreis (schwarz) wird auf sich selbst abgebildet.

Laplacetransformation

Wir beschäftigen uns mit der Laplacetransformation als Beispiel einer Integraltransformation

1. Integraltransformationen

Eine Integraltransformation T ist eine eindeutige Abbildung, die Funktionen f andere Funktionen $T(f)$ durch

$$T(f)(x) = \int_D K(x, t) f(t) dt$$

zuordnet, wobei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, das auch unbeschränkt sein kann, und K eine Kernfunktion. Natürlich ist eine Integraltransformation immer nur für Funktionen mit bestimmten Eigenschaften (Integrierbarkeit) definiert.

BEISPIEL 116. Durch Spezialisierung des Intervalls D und des Integralkerns K ergeben sich folgende wichtige Integraltransformationen.

- Mit $D = (-\infty, \infty)$ und $K(x, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-ixt}$ erhält man die Fouriertransformation

$$F(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) dt$$

für $x \in \mathbb{R}$.

- Mit $D = (0, \infty)$ und $K(x, t) = e^{-xt}$ erhält man die Laplacetransformation

$$L(f)(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

für $x \in \mathbb{C}$

- Mit $D = \mathbb{N}$ und $K(x, n) = x^{-n}$ erhält man die diskrete Z -Transformation

$$Z(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^{-n}$$

für $x \in \mathbb{C}$.

Integraltransformationen sind lineare Operatoren. Durch Integraltransformationen werden Probleme im Originalbereich in Probleme im Bildbereich übersetzt, wo sie sich (vielleicht) einfacher lösen lassen. Zum Beispiel geht bei der Laplace-Transformation eine Differentialgleichung in eine (algebraische) Gleichung über. Es ist wichtig, dass man die im Bildbereich gefundene Problemlösung wieder in den Originalbereich zurücktransformieren kann. Dies ist prinzipiell möglich, wenn die Integraltransformation injektiv ist (Eindeutigkeitssätze!). Für die praktische Durchführung dieser inversen Abbildung T^{-1} sind Rechenregeln, Tabellen und das Faltungsprodukt wichtige Hilfsmittel.

BEMERKUNG 38. Die Funktionen $f(t) = e^t$, $f(t) = \sin t$ und $f(t) = \cos t$ sind nicht Fourier-transformierbar, jedoch kann man die Laplacetransformation auf sie anwenden.

2. Definition und erste Beispiele für Laplacetransformierte

DEFINITION 30. Es sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion

$$L(f)(z) = F(z) := \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$$

heißt, falls sie existiert, **Laplacetransformierte** von f .

BEISPIEL 117 (Monome). Wenn $f(t) = t^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für $z = x + iy$ mit $x > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt &= \int_0^\infty e^{-zt} t^n dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-zt} t^n dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{z} e^{-zt} t^n \right]_0^b + \int_0^b \frac{n}{z} e^{-zt} t^{n-1} dt = \frac{n}{z} \int_0^\infty e^{-zt} t^{n-1} dt \end{aligned}$$

für $x > 0$, da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom. Induktion über n liefert dann eine Funktion $L(t^n) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$L(t^n)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} t^n dt = \frac{n!}{z^{n+1}}, \text{ da } \int_0^\infty e^{-zt} dt = \frac{1}{z}.$$

Es gibt eine große Klasse von Funktionen, für die die Laplacetransformierte als Funktion auf einem Halbraum $\{z \in \mathbb{C} : \Re(Z) > \sigma\}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ existiert.

DEFINITION 31. Eine Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **von exponentieller Ordnung** σ , wenn f für $t \rightarrow \infty$ höchstens exponentiell wächst. Dies bedeutet, dass reelle Konstanten $t_0, \sigma \geq 0$ und $M > 0$ existieren, so dass $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$ für alle $t \geq t_0$.

LEMMA 10. Wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[0, b]$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ , so existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ für alle z mit $\Re(z) > \sigma$.

BEWEIS. Da f auf jedem Intervall $[0, b]$ stückweise stetig ist, existiert dort das Integral $\int_0^b e^{-xt} f(t) dt$. Da $|e^{-zt} f(t)| \leq M e^{(\sigma-x)t}$, konvergiert $\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ für alle z mit $\Re(z) > \sigma$ absolut, weil der Exponent negativ ist. $\square$

BEISPIEL 118 (Funktionen von exponentieller Ordnung). Polynome, $e^{\alpha t}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$, beschränkte Funktionen, stetige Funktionen mit kompaktem Träger

BEISPIEL 119 (Heaviside-Funktion). Für $a > 0$ betrachten wir die Funktion $h_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h_a(t) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

und berechnen für $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re(z) > 0$ die Laplacetransformierte

$$L(h_a)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} h_a(t) dt = \int_a^\infty e^{-zt} dt = -\frac{1}{z} [e^{-zt}]_{t=a}^{t=\infty} = \frac{e^{-az}}{z}.$$

SATZ 47 (Linearität der Laplacetransformation). *Wenn f und g stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ sind, dann gilt*

$$L(f + g) = L(f) + L(g) \text{ und } L(cf) = cL(f) \text{ für alle } c \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS. Linearität des Integrals □

BEISPIEL 120 (Polynome). Es sei $p(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j$ mit reellen Koeffizienten $a_j \in \mathbb{R}$. Dann ist die Laplace-Transformierte

$$L(p)(x) = \int_0^\infty e^{-zt} p(t) dt = \sum_{j=0}^n a_j \int_0^\infty e^{-zt} t^j dt = \sum_{j=0}^n a_j \frac{j!}{z^{j+1}}.$$

BEISPIEL 121 (Laplace-transformierte der Sinus- und Kosinusfunktion). Aus der Linearität folgt für $\Re(z) > 0$ und $\omega > 0$

$$\begin{aligned} L(\cos(\omega t))(z) + iL(\sin(\omega t))(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \cos(\omega t) dt + i \int_0^\infty e^{-zt} \sin(\omega t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-zt} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) dt = \int_0^\infty e^{-zt} e^{i\omega t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{(i\omega - z)t} dt = \frac{1}{z - i\omega} = \frac{z + i\omega}{z^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

und damit

$$L(\cos(-\omega t))(z) + iL(\sin(-\omega t))(z) = L(\cos(\omega t))(z) - iL(\sin(\omega t))(z) = \frac{z - i\omega}{z^2 + \omega^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$L(\cos(\omega t))(z) = \frac{z}{z^2 + \omega^2}, \quad L(\sin(\omega t))(z) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2}.$$

3. Eigenschaften der Laplace-Transformation

SATZ 48 (Ähnlichkeit). *Wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ , dann gilt für alle $\alpha > 0$*

$$L(f(\alpha t))(z) = \frac{1}{\alpha} L(f(t))\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

BEWEIS. Für alle $\alpha > 0$ gilt mit der Substitution $s = \alpha t$, $ds = \alpha dt$

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{\alpha}s} f(s) ds.$$

□

BEISPIEL 122. Es gilt

$$L(\sin(\omega t))(z) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{(z/\omega)^2 + 1} = \frac{1}{\omega} L(\sin t)(z/\omega).$$

SATZ 49 (Dämpfung). *Wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ , dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re(z) > \sigma - \alpha$*

$$L(e^{-\alpha t} f(t))(z) = L(f(t))(z + \alpha).$$

BEWEIS. Es gilt für alle $\Re(z) + \alpha > \sigma$

$$\int_0^\infty e^{-zt} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(z+\alpha)t} f(t) dt = L(f(t))(z + \alpha).$$

□

BEISPIEL 123. Für $\Re(z) > \alpha$ gilt

$$L(1)(z) = \frac{1}{z} = L(e^{-\alpha t} e^{\alpha t})(z) = L(e^{\alpha t})(z + \alpha) = \frac{1}{z + \alpha - \alpha}, \text{ also } L(e^{\alpha t})(z) = \frac{1}{z - \alpha}.$$

SATZ 50 (Transformation von Ableitungen). Wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar und f und f' von exponentieller Ordnung σ , dann gilt

$$L(f')(z) = zL(f)(z) - f(0).$$

Wenn $f \in C^n([0, \infty))$ und alle Ableitungen $f^{(j)}$ von exponentieller Ordnung sind, dann gilt

$$L(f^{(n)})(z) = z^n L(f)(z) - \sum_{j=1}^n z^{j-1} f^{(n-j)}(0).$$

BEWEIS. Die Voraussetzungen an f und f' sichern, dass die auftretenden uneigentlichen Integrale existieren. Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} L(f')(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f'(t) dt = [e^{-zt} f(t)]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \\ &= -f(0) + zL(f)(z). \end{aligned}$$

Die Aussage für die Laplacetransformierte der n -ten Ableitung folgt durch Induktion über n , z.B. $L(f'')(z) = zL(f')(z) - f'(0) = z(zL(f) - f(0)) - f'(0)$. □

BEISPIEL 124. Anwendung der Formel für die Laplacetransformierte der Ableitung auf $f(t) = t^n$ und $f(t) = \sin t$ führt zu

$$nL(t^{n-1})(z) = zL(t^n)$$

$$L(\cos t)(z) = L(\sin' t)(z) = zL(\sin t)(z) - \sin 0 = z \frac{1}{z^2 + 1}.$$

SATZ 51 (Ableitung der Laplacetransformierten). Wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ , dann gilt

$$\frac{d^n L(f)(z)}{dz^n} = (-1)^n L(t^n f(t))(z).$$

BEWEIS. Da f von exponentieller Ordnung ist, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ gleichmäßig und Integration nach t und Differentiation nach z können vertauscht werden. Also gilt

$$\frac{dL(f)(z)}{dz} = \int_0^\infty \frac{de^{-zt}}{dz} f(t) dt = - \int_0^\infty e^{-zt} t f(t) dt = (-1)L(tf(t))(z).$$

Die Aussage für die n -te Ableitung folgt mit vollständiger Induktion durch mehrmaliges Ableiten. □

BEISPIEL 125. Da $\frac{1}{t} \sin t$ auf $[0, \infty)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung ist, gilt

$$\frac{1}{z^2 + 1} = L(\sin t)(z) = L\left(t \frac{\sin t}{t}\right) = -L\left(\frac{\sin t}{t}\right)'(z).$$

Durch Integration der Gleichung folgt

$$L\left(\frac{\sin t}{t}\right)(z) = c - \arctan z$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

FOLGERUNG 12 (Laplace-transformierte einer Stammfunktion). *Wenn f und $g(t) := \int_0^t f(s) ds$ Laplace-transformierbar, dann gilt*

$$L\left(\int_0^t f(s) ds\right)(z) = \frac{1}{z} L(f)(z).$$

BEWEIS. Es gilt $f(t) = g'(t)$ und $g(0) = 0$, also $L(f)(z) = zL(g)(z) - g(0) = zL(g)(z)$. $\square$

SATZ 52 (Grenzwertsätze). *Wenn f und f' stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ , dann gilt*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} L(f)(z) = 0 \text{ und } \lim_{z \rightarrow \infty} zL(f)(z) = f(0),$$

falls f zusätzlich in $[0, \infty)$ stetig ist.

BEWEIS. Da f von exponentieller Ordnung ist, existieren Konstanten M, t_0, σ , so dass $|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$ für alle $t \geq t_0$. Nun gilt für $\Re(z) > 0, \sigma$

$$\begin{aligned} |L(f)(z)| &= \left| \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-\Re(z)t} |f(t)| dt \\ &\leq \int_0^{t_0} e^{-\Re(z)t} |f(t)| dt + \int_{t_0}^\infty M e^{-(\Re(z)-\sigma)t} dt \\ &= \int_0^{t_0} e^{-\Re(z)t} |f(t)| dt + M \left[\frac{1}{\sigma - \Re(z)} e^{-(\Re(z)-\sigma)t} \right]_{t_0}^\infty \\ &= \int_0^{t_0} e^{-\Re(z)t} |f(t)| dt + M \frac{e^{-(\Re(z)-\sigma)t_0}}{\Re(z) - \sigma} \end{aligned}$$

und $\lim_{z \rightarrow \infty} |L(f)(z)| = 0$, da beide Summanden für $z \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren. Die zweite Aussage folgt aus $L(f')(z) = zL(f)(z) - f(0)$. $\square$

BEISPIEL 126. Da $L(t^{-1} \sin t)(z) = c - \arctan z$ und $\lim_{z \rightarrow \infty} \arctan z = \pi/2$, folgt $c = \pi/2$, d.h. $L(t^{-1} \sin t)(z) = \pi/2 - \arctan z$.

SATZ 53 (Verschiebung). *Wenn $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } 0 \leq t \leq c \\ g(t-c) & , \text{ falls } t > c \end{cases}$$

und g stückweise stetig und von exponentieller Ordnung, dann gilt

$$L(f)(z) = e^{-cz} L(g)(z).$$

BEWEIS. Mit der Substitution $s = t - c$ folgt

$$\begin{aligned} L(f)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = \int_c^\infty e^{-zt} g(t-c) dt = \int_0^\infty e^{-z(s+c)} g(s) ds \\ &= e^{-cz} \int_0^\infty e^{-zs} g(s) ds. \end{aligned}$$

$\square$

4. Inverse der Laplace-Transformation

SATZ 54 (Eindeutigkeitssatz). Wenn f, g stückweise stetig, von exponentieller Ordnung σ und $L(f)(z) = L(g)(z)$ für alle $\Re(z) > \sigma$, dann gilt $f(t) = g(t)$ für alle Stetigkeitsstellen t .

BEMERKUNG 39. Die Laplacetransformation ist auf der Menge der stetigen Funktionen exponentieller Ordnung injektiv.

4.1. Inverse Laplacetransformation als komplexes Kurvenintegral. Die inverse Laplacetransformation $L^{-1}(F)(t)$ kann mit Hilfe eines Kurvenintegrals in der komplexen Ebene berechnet werden:

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{zt} F(z) dz \\ L(f(t))(w) &= \int_0^\infty e^{-wt} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{zt} F(z) dz dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \int_0^\infty e^{(z-w)t} F(z) dt dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(z)}{z-w} [e^{(z-w)t}]_0^\infty dz \quad \Re(w) > \Re(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(z)}{z-w} dz = F(w) \end{aligned}$$

4.2. Inverse Laplacetransformation mit Residuensatz. Für eine stückweise stetige Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$ für alle $t > t_0$ mit Konstanten $t_0, M, \sigma \geq 0$ erfüllt, ist die Laplacetransformierte das uneigentliche Integral

$$L(f)(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt, \quad \Re(z) > \sigma.$$

Die inverse Laplacetransformation läßt sich mit Hilfe eines komplexen Kurvenintegrals beschreiben:

LEMMA 11. Wenn f zusätzlich stückweise glatt ist, dann gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\tau} L(z)e^{zt} dz, \quad \tau > \sigma, \quad \gamma_\tau = \{z : \Re(z) = \tau\}.$$

BEWEIS. Setzt man f durch $f(t) = 0$ für alle $t < 0$ zu einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fort, so gilt mit $g(t) = f(t)e^{-\tau t}$

$$\begin{aligned} L(z) &= \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-zt} dt \\ L(\tau + iy) &= \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-(\tau+iy)t} dt = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-\tau t} e^{-iyt} dt = F(g)(y). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Umkehrformel für die Fouriertransformation

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{iyt} dy \\ f(t) &= g(t) e^{\tau t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{iyt} e^{\tau t} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\tau + iy) e^{(\tau + iy)t} dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} L(\tau + iy) e^{(\tau + iy)t} i dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\tau}} L(z) e^{zt} dz, \end{aligned}$$

weil $\gamma_{\tau}(y) = iy$ für $y \in \mathbb{R}$ und $\gamma'_{\tau}(y) = i$. $\square$

Auch dieses komplexe Kurvenintegral entlang einer unendlich langen Kurve kann man, wenn einige Bedingungen erfüllt sind, mit Hilfe des Residuensatzes berechnen.

THEOREM 24. Wenn $L(f)(z)$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ holomorph ist, $\Re(z_j) < \tau$ für ein $\tau > \sigma$ und $\lim_{|z| \rightarrow \infty} L(z) = 0$, dann gilt

$$(36) \quad f(t) = \sum_{j=1}^m \text{Res}((L(z)e^{zt}, z_j)).$$

BEWEIS. Weil L nur endlich viele Singularitäten hat und nahe ∞ beschränkt ist, ist L holomorph in ∞ und kann nahe ∞ durch eine Potenzreihe in $1/z$ beschrieben werden. Da $\lim_{|z| \rightarrow \infty} L(z) = 0$, gilt $L(1/z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ für $|z| > R$. Daraus folgt $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zL(z) = a_1 \in \mathbb{C}$. Falls $a_1 \neq 0$, so gilt $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z\tilde{L}(z) = 0$ für

$$\tilde{L}(z) := L(z) - c(z - z_0)^{-1} = L(z) - cL(e^{z_0 t})(z)$$

mit beliebigem, festen $z_0 \in \mathbb{C}$. Man kann also $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zL(z) = 0$ voraussetzen.

Für einen geschlossenen Weg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1(t) = \tau + it$ für $t \in [-R, R]$ und $\gamma_2(t) = Re^{it}$ für $t \in [\alpha, \beta]$ für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und R groß gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} L(z) e^{zt} dz &= 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}((L(z)e^{zt}, z_j)) \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} L(z) e^{zt} dz &= \int_{\gamma_{\tau}} L(z) e^{zt} dz \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} L(z) e^{zt} dz &= 0, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} L(z) e^{zt} dz \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} L(Re^{is}) e^{\gamma_2(s)t} Re^{is} i dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |L(\gamma_2(s))| Re^{\Re(\gamma_2(s))t} dt \\ &\leq e^{\tau t} \int_{\alpha}^{\beta} |L(\gamma_2(s))| R dt \leq e^{\tau t} (\beta - \alpha) \varepsilon < e^{\tau t} 2\pi \varepsilon, \end{aligned}$$

falls R so groß ist, dass $|L(\gamma_2(s))\gamma_2(s)| = |L(\gamma_2(s))|R < \varepsilon$. $\square$

BEISPIEL 127. Die Funktion $L(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 5}$ Pole erster Ordnung in $z = \pm 2i - 1$, da $z^2 + 2z + 5 = (z + 1)^2 + 4$. Es gilt auch $\lim_{|z| \rightarrow \infty} L(z) = 0$. Daraus folgt

$$\text{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2 + 2z + 5}, \pm 2i - 1\right) = \frac{e^{(\pm 2i - 1)t}}{2(\pm 2i - 1) + 2} = \frac{e^{(\pm 2i - 1)t}}{\pm 4i}$$

und, da $\Re(\pm 2i - 1) < 0$,

$$f(t) = \frac{e^{(2i-1)t}}{4i} + \frac{e^{(-2i-1)t}}{-4i} = \frac{e^{-t}}{2} \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = \frac{\sin(2t)}{2} e^{-t}.$$

5. Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten das Anfangswertproblem $y'' + 5y' + 4y = t$, $y(0) = y'(0) = 0$. Die Laplacetransformierte der Differentialgleichung ist

$$\begin{aligned} L(t)(z) &= L(y'')(z) + 5L(y')(z) + 4L(y)(z) \\ \frac{1}{z^2} &= z^2 L(y)(z) - zy(0) - y'(0) + 5(zL(y)(z) - y(0)) + 4L(y)(z) \\ \frac{1}{z^2} &= (z^2 + 5z + 4)L(y)(z), \end{aligned}$$

also

$$L(y)(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 5z + 4)}.$$

Hier können wir y mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und ermitteln. Es existieren $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(z^2 + 5z + 4)} &= \frac{1}{z^2(z+1)(z+4)} = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} + \frac{c}{z+1} + \frac{d}{z+4} \\ &= aL(t) + bL(1) + cL(e^{-t}) + dL(e^{-4t}) = L(at + b + ce^{-t} + de^{-4t}). \end{aligned}$$

Also gilt $y(t) = at + b + ce^{-t} + de^{-4t}$ für diese reellen Konstanten a, b, c, d .

Die Gleichung einer harmonischen Schwingung $y'' + \omega^2 y = 0$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = v_0$ wird durch die Laplacetransformation in

$$\begin{aligned} 0 &= L(y'')(z) + \omega^2 L(y)(z) = z^2 L(y)(z) - zy(0) - y'(0) + \omega^2 L(y)(z) \\ &= (z^2 + \omega^2)L(y)(z) - v_0 \\ L(y)(z) &= \frac{v_0}{z^2 + \omega^2} = \frac{v_0}{\omega} L(\sin(\omega t))(z) \end{aligned}$$

verwandelt. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt, dass $y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems in der Menge der stetigen Funktionen von exponentieller Ordnung ist.

6. δ -Distribution

Die δ -Distribution ist eine „Dichtefunktion“ δ_x mit Masse 1, deren ganze Masse in einem Punkt x konzentriert ist. Für Funktionen sind die Eigenschaften $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1$ und $f(t) = 0$ für alle $t \neq x$ unvereinbar. Darum existiert δ_x nur im Sinne von Distributionen, einem verallgemeinerten Funktionenbegriff. Wir können eine δ -Funktion als „Grenzwert“ echter Funktionen behandeln, nämlich $\delta_x = \lim_{h \rightarrow \infty} f_h$ mit

$$f_h(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < x \text{ oder } t > x + 1/h \\ h & x \leq t \leq x + 1/h \end{cases}.$$

Da

$$\begin{aligned}
 L(f_h)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f_h(t) dt = \int_x^{x+1/h} e^{-zt} h dt = -\frac{h}{z} [e^{-zt}]_x^{x+1/h} \\
 &= \frac{h}{z} e^{-zx} (1 - e^{-z/h}) \\
 \lim_{h \rightarrow \infty} L(f_h)(z) &= e^{-xz} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-z/h}}{z/h} = e^{-xz} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s}}{s} = e^{-xz} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{-s}}{1} = e^{-xz},
 \end{aligned}$$

kann man die δ -Distribution auch als $L^{-1}(e^{-xz})$, also eine Funktionen, deren Laplacetransformierte e^{-xz} ist, definieren.

7. $2L$ -periodische Funktionen

Zur Berechnung der Laplacetransformierten $2L$ -periodischer Funktionen genügt es, über das Intervall $[0, 2L]$ zu integrieren. Wenn f eine $2L$ -periodische stückweise stetige Funktion von exponentieller Ordnung ist, dann gilt

$$\begin{aligned}
 L(f)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{2nL}^{(2n+1)L} e^{-zt} f(t) dt \\
 &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^{2L} e^{-z(s+2nL)} f(s+2nL) ds \quad (t = s + 2nL) \\
 &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^{2L} e^{-z(s+2nL)} f(s) ds = \sum_{n=0}^\infty \int_0^{2L} e^{-2znL} e^{-zs} f(s) ds \\
 &= \int_0^{2L} e^{-zs} f(s) ds \sum_{n=0}^\infty (e^{-2zL})^n = \frac{1}{1 - e^{-2zL}} \int_0^{2L} e^{-zs} f(s) ds.
 \end{aligned}$$

BEISPIEL 128 (Rechteckimpuls). Die 2π -periodische Fortsetzung f der Funktion

$$t \mapsto \begin{cases} 1 & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

ist

$$\begin{aligned}
 L(f)(z) &= \frac{1}{1 - e^{-2z\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-zs} f(s) ds = \frac{1}{1 - e^{-2z\pi}} \int_0^\pi e^{-zs} ds \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2z\pi}} \frac{1 - e^{-z\pi}}{z} = \frac{1}{z(1 + e^{-z\pi})}.
 \end{aligned}$$

8. Faltung

Der Multiplikation im Bildbereich, also von Laplacetransformierten, entspricht im Originalbereich die Faltung von Funktionen.

DEFINITION 32. Das **Faltungsprodukt** zweier (integrierbarer) Funktionen f, g ist

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s) ds.$$

Das Faltungsprodukt ist kommutativ, denn mit $u = t - s$, $du = -ds$ gilt

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s) ds = - \int_t^0 f(u)g(t-u) du = \int_0^t g(t-u)f(u) du = (g * f)(t).$$

Das Faltungsprodukt glättet (siehe periodisches Faltungsprodukt).

SATZ 55. Wenn $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung, dann gilt $L(f * g) = L(f)L(g)$.

BEWEIS. Die Funktion $f(t-s)g(s)$ ist auf der Menge $D = \{(t, s) : 0 \leq t, 0 \leq s \leq t\}$ integrierbar, weil f und g von exponentieller Ordnung sind. Die iterierten Integrale auf der Menge D existieren dann auch und sind unabhängig von der Reihenfolge der Integration.

$$\begin{aligned} L(f * g)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \int_0^t f(t-s)g(s) ds dt \\ &= \int_0^\infty e^{-z(u+s)} \int_0^\infty f(u)g(s) ds du \quad (u = t-s) \\ &= L(f)(z)L(g)(z) \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 129. Wir suchen h mit

$$L(h)(z) = \frac{1}{z^2(z+1)(z+4)},$$

ohne eine Partialbruchzerlegung durchzuführen. Es gilt

$$\frac{1}{z^2} = L(t)(z), \quad \frac{1}{z+1} = L(e^{-t})(z), \quad \frac{1}{z+4} = L(e^{-4t})(z).$$

Nun folgt mit Hilfe der Faltung

$$\frac{1}{z^2(z+4)} = L(t)(z)L(e^{-4t})(z) = L\left(\int_0^t (t-s)e^{-4s} ds\right).$$

Zur Berechnung des Integrals benötigen wir die durch partielle Integration herleitbaren Formeln

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha s} ds &= \frac{e^{\alpha s}}{\alpha} \\ \int s e^{\alpha s} ds &= \frac{1}{\alpha} s e^{\alpha s} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha s} = \frac{e^{\alpha s}}{\alpha^2} (\alpha s - 1) \\ \int s^2 e^{\alpha s} ds &= \frac{e^{\alpha s}}{\alpha^3} (\alpha^2 s^2 - 2\alpha s + 2). \end{aligned}$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)e^{-4s} ds &= \int_0^t t e^{-4s} - s e^{-4s} ds \\ &= -\frac{t}{4} [e^{-4s}]_0^t - \frac{1}{16} [e^{-4s}(-4s-1)]_0^t \\ &= \frac{t}{4} + \frac{e^{-4t}}{16} - \frac{1}{16} \\ \frac{1}{z+1} \cdot \frac{16}{z^2(z+4)} &= L\left(\int_0^t e^{-(t-s)}(4s + e^{-4s} - 1) ds\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \int_0^t e^{-(t-s)}(4s + e^{-4s} - 1) ds &= e^{-t} \int_0^t e^s(4s + e^{-4s} - 1) ds \\
 &= e^{-t} \int_0^t e^s(4s - 1) + e^{-3s} ds \\
 &= e^{-t} \left[e^s(4s - 5) - \frac{e^{-3s}}{3} \right]_0^t \\
 &= 4t - 5 - \frac{e^{-4t}}{3} + e^{-t} \frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

Also

$$L^{-1} \left(\frac{1}{z^2(z+1)(z+4)} \right) = \frac{t}{4} - \frac{5}{16} - \frac{e^{-4t}}{48} + e^{-t} \frac{1}{3}.$$

BEISPIEL 130. Mit Hilfe des Faltungsproduktes berechnen wir

$$\begin{aligned}
 L^{-1} \left(\frac{1}{z^2(1+z^2)} \right) &= L^{-1} (L(t)(z)L(\sin t)(z)) = t * \sin t = \int_0^t (t-s) \sin s ds \\
 &= t [-\cos s]_0^t - \int_0^t s \sin s ds \\
 &= t(1 - \cos t) + \left([s \cos s]_0^t - \int_0^t \cos s ds \right) = t - \sin t.
 \end{aligned}$$

BEISPIEL 131. Mit Hilfe der Faltung berechnen wir für $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 L \left(\frac{1}{(z^2 + \beta^2)^2} \right) &= L \left(\frac{1}{\beta} L(\sin(\beta t))(z) \cdot \frac{1}{\beta} L(\sin(\beta t))(z) \right) \\
 &= \frac{1}{\beta^2} \int_0^t \sin(\beta(t-s)) \sin(\beta s) ds \\
 &= \frac{1}{2\beta^2} \int_0^t \cos(\beta(t-2s)) - \cos(\beta t) ds \quad (\text{Additionstheoreme}) \\
 &= \frac{1}{2\beta^2} \left[-\frac{1}{2\beta} \sin(\beta(t-2s)) - s \cos(\beta t) \right]_{s=0}^{s=t} \\
 &= \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{\sin(\beta t)}{\beta} - t \cos(\beta t) \right).
 \end{aligned}$$

Fouriertransformation

Wendet man die Fouriermethode auf PDGLen an, bei denen alle Argumente der gesuchten Funktion unbeschränkt sind, so ist man gezwungen eine kontinuierliche Version der Fourierreihen zu definieren.

1. Motivation – unendlich ausgedehnte Probleme

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung $u_t = a^2 u_{xx}$ auf einem unendlich langen Stab, also für $t, x \geq 0$, mit der homogenen Randbedingung $u(0, t) \equiv 0$, der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \phi(x)$ und der zusätzlichen Bedingung $\lim_{x \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

Die *Wachstumsbedingung* $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) < \infty$ ersetzt die zweite Randbedingung $u(l, t) = \Psi_2(t)$ bei begrenzten Wärmeleitungsproblemen. Sie bedeutet, dass die „Temperatur“ u überall beschränkt ist.

Der Produktansatz $u(x, t) = h(x)g(t)$ führt zu

$$\begin{aligned} h(x)g'(t) &= a^2 h''(x)g(t) \\ \frac{1}{a^2} \cdot \frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{h''(x)}{h(x)} \equiv -\mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben für h sich die Eigenwertaufgabe

$$h'' + \mu h = 0, \quad h(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |h(x)| < \infty$$

und für g die DGL

$$g' + \mu a^2 g = 0.$$

Die allgemeinen Lösungen der DGL $h'' + \mu h = 0$ sind (siehe Beispiel ??)

$$\begin{cases} h(x) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}x) & \mu > 0 \\ h(x) = c_1 + c_2 x & \mu = 0 \\ h(x) = c_1 e^{\sqrt{-\mu}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\mu}x} & \mu < 0 \end{cases}.$$

Durch Auswertung der Anfangsbedingung $h(0) = 0$ erhält man

$$\begin{cases} h(x) = c_2 \sin(\sqrt{\mu}x) & \mu > 0 \\ h(x) = c_2 x & \mu = 0 \\ h(x) = c_1 (e^{\sqrt{-\mu}x} - e^{-\sqrt{-\mu}x}) = 2c_1 \sinh(\sqrt{-\mu}x) & \mu < 0 \end{cases}.$$

Von diesen drei Funktionen ist nur $\sin(\sqrt{\mu}x)$ für $x \rightarrow \infty$ beschränkt. Also sind alle reellen $\mu > 0$ Eigenwerte. Die dazugehörigen Eigenfunktionen sind $h_\mu(x) = \sin(\sqrt{\mu}x)$. Eine Lösung der homogenen DGL $g' + \mu a^2 g = 0$ ist $g_\mu(t) = e^{-\mu a^2 t}$.

Die Summation über alle Eigenwerte μ wird ersetzt durch das Integral über das Intervall $(0, \infty)$ und wir erhalten analog zu Gleichung (??) die Lösung

$$u(x, t) = \int_0^\infty c(\mu) e^{-\mu^2 t} \sin(\sqrt{\mu} x) d\mu$$

mit $c(\mu) \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung $u(x, 0) = \phi(x)$ liefert die Gleichung

$$\int_0^\infty c(\mu) \sin(\sqrt{\mu} x) d\mu = \phi(x).$$

Als die Menge der Eigenwerte μ diskret war, z.B. $\mathbb{N}$, konnte man die Koeffizienten $c(\mu)$ durch Vergleich mit der Fourierreihe der periodischen Fortsetzung der Funktion ϕ auf $\mathbb{R}$ bestimmen. Nun benötigen wir eine eindeutige Darstellung der Funktion ϕ als Integral der Form $\phi = \int_0^\infty c(\mu) \sin(\sqrt{\mu} x) d\mu$.

2. Definition und Eigenschaften

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion, die im Unendlichen verschwindet, also $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, und absolut integrierbar ist, also $\int_{-\infty}^\infty |f(t)| dt < \infty$. Dann ist die **Fouriertransformierte** definiert als uneigentliches Integral

$$(37) \quad F(f)(s) := \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-ist} dt.$$

Die Abbildung $f \mapsto F(f)$ heißt **Fouriertransformation**

Wir beweisen jetzt grundlegende Eigenschaften der Fouriertransformation und berechnen die Fouriertransformierte einiger Funktionen. Dabei nehmen wir an, dass die Voraussetzungen für die Existenz der Fouriertransformierten erfüllt sind und man Ableitung und Integration vertauschen kann. Es gilt

$$\begin{aligned} F(f)(s) &= \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^\infty f(t) (\cos(-st) + i \sin(-st)) dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(st) dt - i \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin(st) dt. \end{aligned}$$

2.1. Fouriertransformierte einer geraden Funktion. Wenn f gerade ist, also $f(-t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann folgt

$$F(f)(s) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos(st) dt,$$

weil $f(t) \cos(st)$ gerade und $f(t) \sin(st)$ ungerade.

2.2. Fouriertransformierte einer ungeraden Funktion. Wenn f ungerade ist, also $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann folgt

$$F(f)(s) = -2i \int_0^\infty f(t) \sin(st) dt,$$

weil $f(t) \cos(st)$ ungerade und $f(t) \sin(st)$ gerade.

2.3. Fouriertransformierte der Rechteckfunktion. Die Funktion

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

ist gerade und für $s \neq 0$ gilt

$$F(f_1)(s) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos(st) dt = 2 \int_0^1 \cos(st) dt = \frac{2}{s} [\sin(st)]_{t=0}^{t=1} = \frac{2 \sin s}{s}.$$

2.4. Fouriertransformierte der ungeraden Rechteckfunktion. Die Funktion

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & -1 < t < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ungerade und für $s \neq 0$ gilt

$$F(f_2)(s) = -2i \int_0^\infty f(t) \sin(st) dt = 2 \int_0^1 \sin(st) dt = \frac{2i}{s} [\cos(st)]_{t=0}^{t=1} = 2i \frac{\cos s - 1}{s}.$$

2.5. Fouriertransformierte von $e^{-|t|}$. Die Funktion $f_3(t) = e^{-|t|}$ ist gerade und es gilt

$$\begin{aligned} F(f_3)(s) &= 2 \int_0^\infty f(t) \cos(st) dt = 2 \int_0^\infty e^{-|t|} \cos(st) dt = 2 \int_0^\infty e^{-t} \Re(e^{ist}) dt \\ &= 2 \Re \left(\int_0^\infty e^{-t} e^{ist} dt \right) = 2 \Re \left(\int_0^\infty e^{t(is-1)} dt \right) \\ &= 2 \Re \left(\frac{1}{is-1} [e^{t(is-1)}]_{t=0}^{t=\infty} \right) = 2 \Re \left(\frac{-1}{is-1} \right) = 2 \Re \left(\frac{1+is}{s^2+1} \right) = \frac{2}{s^2+1}. \end{aligned}$$

2.6. Fouriertransformierte der ungeraden Fortsetzung von $e^{-|t|}$. Die Funktion

$$f_4(t) = \begin{cases} e^{-t} & t > 0 \\ -e^t & t < 0 \end{cases}$$

ist ungerade und es gilt

$$\begin{aligned} F(f_4)(s) &= -2i \int_0^\infty f(t) \sin(st) dt = -2i \int_0^\infty e^{-t} \sin(st) dt = -2i \int_0^\infty e^{-t} \Im(e^{ist}) dt \\ &= -2i \Im \left(\int_0^\infty e^{-t} e^{ist} dt \right) = -2i \Im \left(\int_0^\infty e^{t(is-1)} dt \right) \\ &= -2i \Im \left(\frac{1+is}{s^2+1} \right) = -2i \frac{s}{s^2+1}. \end{aligned}$$

2.7. Fouriertransformierte von e^{-t^2} . Die Funktion $f(t) = e^{-t^2}$ ist gerade und es gilt

$$F(e^{-t^2})(s) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(st) dt = \sqrt{\pi} e^{-(s/2)^2}.$$

Dies haben wir mit Hilfe der Ableitung eines parameterabhängigen Integrals bewiesen.

2.8. Linearität der Fouriertransformation. Die Fouriertransformation ist *linear*, also $F(f + g) = F(f) + F(g)$ und $F(\alpha f) = \alpha F(f)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, weil das Integral linear ist.

2.9. Streckung. Die Fouriertransformation verändert sich bei Streckung des Arguments der Funktion f von t auf αt mit $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$ so:

$$\begin{aligned} F(f(\alpha t))(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-is\frac{\tau}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} d\tau, \quad (\tau = \alpha t) \\ &= \frac{1}{\alpha} F(f(t))\left(\frac{s}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

2.10. Verschiebung. Die Fouriertransformation verändert sich bei Verschiebung des Arguments der Funktion f von t auf $\alpha + t$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ so:

$$\begin{aligned} F(f(\alpha + t))(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha + t) e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-is(\tau - \alpha)} d\tau, \quad (\tau = t + \alpha) \\ &= e^{is\alpha} F(f(t))(s) \end{aligned}$$

2.11. Dämpfung. Die Fouriertransformation verändert sich bei Dämpfung der Funktion f mit $e^{-i\alpha t}$ so:

$$F(e^{-i\alpha t} f(t))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} f(t) e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(s+\alpha)t} dt = F(f(t))(s + \alpha)$$

2.12. Fouriertransformierte der Ableitung. Mit Hilfe der partiellen Integration erhält man

$$\begin{aligned} F(f'(t))(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-ist} dt = [f(t) e^{-ist}]_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-is) e^{-ist} dt \\ &= is F(f(t))(s), \quad \text{denn } f(\pm\infty) = 0. \end{aligned}$$

Mehrfache Anwendung dieser Formel liefert

$$F(f^{(n)}(t))(s) = (is)^n F(f(t))(s).$$

2.13. Ableitung der Fouriertransformierten. Für die *Ableitung der Fouriertransformierten* gilt

$$F(t^n f(t))(s) = i^n \frac{d^n}{ds^n} F(f(t))(s),$$

denn

$$\begin{aligned} F(t^n f(t))(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds} (it^{n-1} f(t) e^{-ist}) dt \\ &= \frac{d}{ds} \left(\int_{-\infty}^{\infty} it^{n-1} f(t) e^{-ist} dt \right). \end{aligned}$$

2.14. Faltung. Die Faltung zweier gegebener Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - u) g(u) du$. Es gilt $F(f * g) = F(f) F(g)$. Der Beweis dieser Gleichung ähnelt den Beweisen dieser Aussage für die Fourierkoeffizienten und die Laplacetransformation.

3. Umkehrformel

Die Fouriertransformation genügt einer einfachen Umkehrformel

$$(38) \quad F(F(f))(s) = 2\pi f(-s), \quad F^{-1}(F(s))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ist} ds.$$

3.1. Fouriertransformierte von $\frac{1}{t} \sin t$.

$$F\left(\frac{\sin t}{t}\right)(s) = F\left(\frac{1}{2} 2 \frac{\sin t}{t}\right)(s) = \frac{1}{2} F(F(f_1)(t))(s) = \frac{1}{2} 2\pi f_1(-s) = \pi f_1(s)$$

3.2. Fouriertransformierte von $\frac{1}{t}(-1 + \cos t)$.

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\cos t - 1}{t}\right)(s) &= F\left(\frac{1}{2i} 2i \frac{\cos t - 1}{t}\right)(s) = \frac{1}{2i} F(F(f_2)(t))(s) = \frac{1}{2i} 2\pi f_2(-s) \\ &= i\pi f_2(s) \end{aligned}$$

3.3. Fouriertransformierte von $\frac{1}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{t^2 + 1}\right)(s) &= F\left(\frac{1}{2} \frac{2}{t^2 + 1}\right)(s) = \frac{1}{2} F(F(f_3)(t))(s) = \frac{1}{2} 2\pi f_3(-s) = \pi e^{-|s|} \\ F\left(\frac{t}{t^2 + 1}\right)(s) &= F\left(\frac{1}{-2i} \frac{-2it}{t^2 + 1}\right)(s) = \frac{1}{-2i} F(F(f_4)(t))(s) \\ &= \frac{1}{-2i} 2\pi f_4(-s) = -i\pi f_4(s) \end{aligned}$$

Alternativ berechnet man die letzte Fouriertransformation als

$$\begin{aligned} F\left(\frac{t}{t^2 + 1}\right)(s) &= F\left(t \frac{1}{t^2 + 1}\right)(s) = i \frac{d}{ds} F\left(\frac{1}{t^2 + 1}\right)(s) = i \frac{d}{ds} \pi e^{-|s|} \\ &= i\pi \frac{d}{ds} e^{-|s|} = i\pi \begin{cases} -e^{-s} & s > 0 \\ e^s & s < 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

wobei die Ableitung nach s nur für $s \neq 0$ ausgeführt werden kann.

3.4. Anwendung der Formeln für Dämpfung, Verschiebung und Streckung.

Mit Hilfe der Formel für die Verschiebung für $\alpha = 2$ berechnen wir

$$F(e^{-|t+2|})(s) = e^{is2} F(e^{-|t|})(s) = e^{2is} \frac{2}{1 + s^2}.$$

Mit Hilfe der Formel für die Streckung für $\alpha = 3$ berechnen wir

$$F(e^{-|3t|})(s) = \frac{1}{3} F(e^{-|t|})\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{2}{1 + (s/3)^2} = \frac{6}{9 + s^2}.$$

Mit Hilfe der Formel für die Dämpfung berechnen wir

$$\begin{aligned}
 F(f(t) \cos(\alpha t))(s) &= F\left(f(t) \frac{1}{2}(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t})\right)(s) \\
 &= \frac{1}{2} (F(f(t)e^{i\alpha t})(s) + F(f(t)e^{-i\alpha t})(s)) \\
 &= \frac{1}{2} (F(f)(s - \alpha) + F(f)(s + \alpha)) \\
 F(f(t) \sin(\alpha t))(s) &= F\left(f(t) \frac{1}{2i}(e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t})\right)(s) \\
 &= \frac{1}{2i} (F(f)(s - \alpha) - F(f)(s + \alpha)).
 \end{aligned}$$

4. Fouriertransformation mit Residuensatz

Für eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Fouriertransformierte $F(f)(s)$ das uneigentliche reelle Integral

$$\begin{aligned}
 F(f)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(-st) + i \sin(-st)) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(st) - i \sin(st)) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt.
 \end{aligned}$$

Die beiden Summanden lassen sich mit Hilfe des Residuensatzes berechnen, falls $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit isolierten Singularitäten $x_j \in \mathbb{R}$, die Polstellen 1. Ordnung sind, $z_j \notin \mathbb{R}$ und $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ (siehe Theorem 22 und Theorem 23).

Die dort auftretenden Singularitäten hängen nur von der Funktion f ab. Die Residuen der Funktion $f(z)e^{isz}$ sind aber auch vom Parameter s abhängig. Mit

$$(39) \quad u(s) := 2\pi i \sum_{\Im(z_j) > 0} \text{Res}(f(z)e^{isz}, z_j) + \pi i \sum_{x_j} \text{Res}(f(z)e^{isz}, x_j)$$

folgt wegen $\sin(st) = -\sin(-st)$

$$(40) \quad F(f)(s) = \begin{cases} \overline{u(s)} & s > 0 \\ \Re(u(0)) & s = 0 \\ u(|s|) & s < 0 \end{cases}.$$

BEISPIEL 132. Die Funktion $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, hat Pole erster Ordnung in $\pm ia$. Nur der Pol ia liegt in der oberen Halbebene. Daraus folgt

$$\text{Res}\left(\frac{e^{isz}}{a^2 + z^2}, ia\right) = \frac{e^{is(ia)}}{2(ia)} = \frac{e^{-sa}}{2ia}, \quad u(s) = \frac{\pi}{a} e^{-sa}$$

und

$$F(f)(s) = \begin{cases} \frac{\pi}{a} e^{-sa} & s > 0 \\ \frac{\pi}{a} & s = 0 \\ \frac{\pi}{a} e^{sa} & s < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{a} e^{-a|s|}.$$

BEISPIEL 133. Die Funktion $f(t) = \frac{t}{a^2+t^2}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, hat Pole erster Ordnung in $\pm ia$. Nur der Pol ia liegt in der oberen Halbebene. Daraus folgt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{isz}}{a^2+z^2}, ia\right) = \frac{(ia)e^{is(ia)}}{2(ia)} = \frac{e^{-sa}}{2}, \quad u(s) = \pi i e^{-sa}$$

und

$$F(f)(s) = \begin{cases} -\pi i e^{-sa} & s > 0 \\ 0 & s = 0 \\ \pi i e^{sa} & s < 0 \end{cases}.$$

5. Lösung PDGL mit Hilfe der Fouriertransformation

Sucht man eine Lösung $u(x, t)$ einer PDGL, die auf einem unbeschränkten Gebiet existiert, so stellt man eine äquivalente PDGL für die Fouriertransformierte

$$U(s, t) := F(u(x, t))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ixs} dx$$

bezüglich der Variablen x auf. Wir nehmen an, dass Ableitungen nach der anderen Variablen, t , mit der Fouriertransformation vertauschbar sind, also $F(u_t(x, t))(s) = U_t(s, t)$ und $F(u_{tt}(x, t))(s) = U_{tt}(s, t)$. Die Fouriertransformierten der Ableitungen nach der Variablen x berechnen sich nach der Formel

$$F\left(\frac{d^n}{dx^n} u(x, t)\right)(s) = (is)^n F(u(x, t))(s),$$

also $F(u_x(x, t))(s) = isU(s, t)$ und $F(u_{xx}(x, t))(s) = -s^2 U(s, t)$.

Treten in der PDGL für die Funktion $U(s, t)$ nur die partiellen Ableitungen nach einer Variablen auf, t , so betrachten wir sie als gewöhnliche DGL für eine von t abhängige Funktion, deren Koeffizienten noch vom Parameter s abhängen. Die frei wählbaren Funktionen von s , die in der allgemeinen Lösung $U(s, t)$ auftreten, bestimmen wir durch Auswertung der Anfangsbedingungen, weil $F(u(x, 0))(s) = U(s, 0)$ und $F(u_t(x, 0))(s) = U_t(s, 0)$.

Mit Hilfe der Umkehrformel $F(F(f))(x) = 2\pi f(-x)$ berechnen wir die Lösung $u(x, t)$ aus $U(s, t)$ als

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} F(F(u)(s, t))(-x) = \frac{1}{2\pi} F(U(s, t))(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(s, t) e^{ixs} ds.$$

5.1. Wärmeleitung auf beidseitig unbeschränktem Stab. Wir betrachten die PDGL $u_t = a^2 u_{xx}$ für $t \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit den Randbedingungen $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |u(x, t)| < \infty$ und der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \phi(x)$.

Die DGL für $U(s, t) = F(u(x, t))(s)$ ist $U_t(s, t) = -a^2 s^2 U(s, t)$. Sie hat das charakteristische Polynom $\lambda = -(as)^2$ und die allgemeine Lösung

$$U(s, t) = c(s) e^{-(as)^2 t}.$$

Aus der Anfangsbedingung folgt $c(s) = F(\phi)(s)$, denn

$$U(s, 0) = c(s) = F(u(x, 0))(s) = F(\phi(x))(s).$$

Damit ist die gesuchte Lösung

$$(41) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\phi)(s) e^{-(as)^2 t} e^{ixs} ds.$$

5.2. Wärmeleitung auf einseitig unbeschränktem Stab. Wir betrachten die PDGL $u_t = a^2 u_{xx}$ für $t, x \geq 0$ mit den Randbedingungen $\lim_{x \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty$, $u(0, t) \equiv 0$ und der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \phi(x)$.

Um die Fouriertransformation durchführen zu können, setzen wir u und ϕ zu ungeraden Funktionen auf $\mathbb{R}$ fort. Wie in Abschnitt 5.1 erhält man aus der Anfangsbedingung die Lösung

$$(42) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\phi)(s) e^{-(as)^2 t} e^{ixs} ds.$$

Diese erfüllt auch die Anfangsbedingung $u(0, t) \equiv 0$, denn nach der Formel gilt $u(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\phi)(s) e^{-(as)^2 t} ds = 0$, denn $F(\phi)(s)$ ist als Fouriertransformation einer ungeraden Funktion wieder ungerade, $e^{-(as)^2 t}$ ist eine gerade Funktion in s , ihr Produkt ist ungerade, und das Integral einer ungeraden Funktion über $\mathbb{R}$ verschwindet, falls es existiert.

5.3. Wellengleichung. Wir betrachten die PDGL $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ für $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit den Randbedingungen $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |u(x, t)| < \infty$ und den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = \phi(x)$ und $u_t(x, 0) = \psi(x)$.

Die DGL für $U(s, t) = F(u(x, t))(s)$ ist $U_{tt}(s, t) = -a^2 s^2 U(s, t)$. Sie hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 = -(as)^2$ und die allgemeine Lösung

$$U(s, t) = c_1(s) \cos(ast) + c_2(s) \sin(ast).$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} U(s, 0) &= c_1(s) = F(u(x, 0))(s) = F(\phi(x))(s) \\ U_t(s, t) &= c_1(s)(-as) \sin(ast) + c_2(s)(as) \cos(ast) \\ U_t(s, 0) &= c_2(s)as = F(u_t(x, 0))(s) = F(\psi(x))(s), \end{aligned}$$

also

$$U(s, t) = F(\phi)(s) \cos(ast) + \frac{F(\psi)(s)}{as} \sin(ast)$$

und

$$(43) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(\phi)(s) \cos(ast) + \frac{F(\psi)(s)}{as} \sin(ast) \right) e^{ixs} ds.$$