Mathematik III für ET/IT im WS 10/11

Annett Püttmann

Fakultät für Mathematik, NA 4/70, Ruhr-Universität Bochum
E-mail address: annett.puettmann@rub.de

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) der Ordnung** n ist eine Gleichung der Form $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ mit einer Funktion $F : \mathbb{R}^{n+2} \supset D(F) \to \mathbb{R}$, die auf einer offenen Teilmenge des $D(F) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ definiert ist. Die Zahl n heißt auch **Grad** der Differentialgleichung.

Beispiele:

- $y' = c$ mit $c \in \mathbb{R}$, $n = 1$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, y') = y' - c$
- $y' = y$, $n = 1$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, y') = y' - y$
- $y'' + \omega^2 y = g(x)$ mit einer beliebigen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 2$, $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit $F(x, y, y', y'') = y'' + \omega^2 y - g(x)$.
- $xy'' + \ln x = 0$, $n = 2$, $F : \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, y', y'') = xy'' + \ln x$
- $yy^{(3)} + \left(y^{(2)}\right)^2 = 0$, $n = 3$, $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, y', y'', y^{(3)}) = yy^{(3)} + \left(y^{(2)}\right)^2$

Eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung heißt **explizite** gewöhnliche DGL, wenn $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ für eine Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \supset D(f) \to \mathbb{R}$, sonst heißt sie **implizit**.

Eine explizite DGL läßt sich also nach der höchsten Ableitung auflösen. Manchmal erhält man durch Verkleinerung des Definitionsgebietes $D(F)$ aus einer impliziten DGL eine explizite.

Beispiele:

- $y' = c$, $y' = y$ und $y'' + \omega^2 y = g(x)$ sind explizit.
- $xy'' + \ln x = 0$ ist explizit, weil auf dem Definitionsgebiet $D(F) = \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^3$ immer $x \neq 0$ gilt und Division durch 0 möglich ist , also $y'' + \frac{\ln x}{x} = 0$.
- $yy^{(3)} + \left(y^{(2)}\right)^2 = 0$ ist implizit auf ihrem Definitionsgebiet $\mathbb{R}^4$. Schränkt man dieses jedoch auf $\{y \neq 0\} \subset \mathbb{R}^4$ ein. so kann man die Gleichung durch y dividieren und die explizite DGL $y^{(3)} = -\frac{1}{y}\left(y^{(2)}\right)^2$ betrachten.

Es sei $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ eine gewöhnlichen DGL n-ter Ordnung. Eine **Lösung auf einem Intervall** $I \subset \mathbb{R}$ ist eine n-mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ mit $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ für alle $x \in I$.

Eine **Anfangswertaufgabe (AWA)** ist das Problem, zu einer gegebenen gewöhnlichen DGL n-ter Ordnung und $\xi, \eta, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ eine Lösung y auf einer Umgebung des Anfangsargumentes ξ mit $y(\xi) = \eta$ und $y^{(j)}(\xi) = \eta^{(j)}$ für alle $j = 1, \ldots, n-1$ zu finden.

Bei einer sinnvoll gestellten AWA gilt $(\xi, \eta, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n-1)})^T \in D(F)$ für die Anfangsbedingungen. Zu Anfangswertaufgaben gibt es mehrere **Grundfragen**:

(1) *Existiert* eine Lösung der AWA?
(2) Ist diese Lösung *eindeutig*?
(3) Wie groß ist das Definitionsgebiet der Lösungsfunktion?
(4) Wie hängt die Lösung der AWA von den Anfangswerten ab?

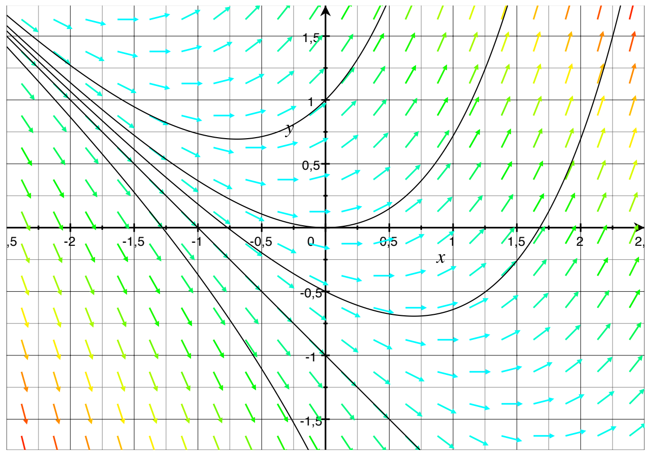

Abbildung 1. Vektorfeld und Feldlinien

1. Explizite gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir untersuchen DGLen der Form $y' = f(x,y)$ mit Anfangsbedingungen $y(\xi) = \eta$ für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ und $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ mit $(\xi,\eta)^T \in D$.

1.1. Geometrische Deutung. Einer Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ auf $I \subset \mathbb{R}$ der AWA $y' = f(x,y)$ mit $y(\xi) = \eta$ kann man durch $\gamma(t) = (t, y(t))$ für $t \in I$ eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ durch den Punkt $(\xi,\eta)^T$ zuordnen. Dies ist der Graph der Funktion y.

Da $\dot\gamma(t) = (1, y'(t))^T = (1, f(t, y(t)))^T$, ist der Tangentialvektor an die Kurve γ im Punkt $\gamma(t)$ gerade $(1, f(t, y(t)))^T$. Die Lösung ist also eine Feldlinie zum Vektorfeld $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{v}(x,y) = (1, f(x,y))^T$$

durch den Anfangspunkt $(\xi,\eta)^T$. Abbildung 1 zeigt das Vektorfeld $(1, x+y)^T$ und Lösungen $y(x) = (\eta+1)e^x - x - 1$ der DGL $y' = x + y$ zu den Anfangswerten $\xi = 0$ und $\eta = 1,\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -1$ und -2.

1.2. Graphische Lösungsmethoden. Mit Hilfe des Vektorfeldes $\vec{v}(x,y) = (1, f(x,y))^T$ kann man Lösungskurven der AWA durch Polygonzüge annähern. Dabei ist es nützlich, Punkte mit gleicher Steigung zu kennen.

Eine **Isokline** ist eine Niveaulinie des Vektorfeldes $(1, f(x,y))^T$. Zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ist $K_c = \{(x,y)^T \in D : f(x,y) = c\}$ eine Isokline.

Zum Beispiel sind die Isoklinen des Vektorfeldes $\vec{v}(x,y) = (1, x+y)^T$ zur Steigung c die Geraden $y = -x + c$.

1.3. Existenz- und Eindeutigkeitssätze. Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ für die gilt: Wenn (x,y) und $(x,\tilde{y}) \in D$, dann $(x, y + t(\tilde{y} - y)) \in D$ für alle $0 \leq t \leq 1$. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ genügt auf D einer **Lipschitzbedingung** bezüglich y, falls eine Konstante M existiert, so dass

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq M|y - \tilde{y}| \quad \text{für alle } (x,y)^T, (x,\tilde{y})^T \in D.$$

Lemma 1 (Kriterium für Lipschitzbedingung bezüglich y). *Wenn für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ die partielle Ableitung f_y auf D existiert und stetig und beschränkt ist, dann erfüllt f auf D eine Lipschitzbedingung bezüglich y.*

Beweis. Aus dem Mittelwertsatz folgt $|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq ||f_y||_D |y - \tilde{y}|$. □

Beispiele:

- Die Funktion $f(x,y) = e^{xy}$ ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ mit $f_y(x,y) = xe^{xy}$. Auf der unbeschränkten Menge $\mathbb{R}^2$ ist auch f_y unbeschränkt, da $\lim_{x\to\infty} f_y(x,0) = \infty$. Aber die partielle Ableitung f_y ist als stetige Funktion auf jeder beschränkten Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt. Damit erfüllt f auf jeder beschränkten Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ eine Lipschitzbedingung bezüglich y.
- Wenn $f(x,y) = g(x)h(y)$, g stetig auf einem Intervall $[a,b]$ und h stetig differenzierbar auf einem Intervall $[c,d]$, dann erfüllt f eine Lipschitzbedingung bezüglich y auf dem Intervall $[a,b] \times [c,d]$, denn in diesem Fall ist $f_y(x,y) = g(x)h'(y)$ stetig.

Theorem 1 (**Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf**). *Es seien $(\xi,\eta)^T \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, $I = \{(x,y)^T : |x-\xi| \leq \alpha, |y-\eta| \leq \beta\}$ ein Intervall um $(\xi,\eta)^T$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*

Wenn f auf I eine Lipschitzbedingung bezüglich y erfüllt, dann hat die AWA $y' = f(x,y)$ mit $y(\xi) = \eta$ eine eindeutige Lösung $y : U_\delta \to \mathbb{R}$, wobei $U_\delta = \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \delta\}$ eine Umgebung von ξ ist, die durch $K = ||f||_I$ und $\delta = \min\{\alpha, \beta/K\}$ gegeben ist.

Beweis. Die rekursiv definierte Folge stetiger Funktionen $y_n : U_\delta \to \mathbb{R}$

$$y_0(x) \equiv \eta \tag{1}$$

$$y_n(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y_{n-1}(t))\, dt \tag{2}$$

erfüllt die Anfangsbedingung $y_n(\xi) = \eta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ist wohldefiniert. Aus der Lipschitzbedingung folgert man die Konvergenz der Folge gegen eine Grenzfunktion $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$. Für die Grenzfunktion folgt aus der Iterationsgleichung $y(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y(t))dt$. Leitet man diese Gleichung nach x ab, ergibt sich die DGL $y'(x) = f(x,y)$. Also ist die Grenzfunktion eine Lösung der AWA. □

1.3.1. *Verfahren von Picard-Lindelöf für $y' = x + y$ mit $y(0) = 0$.* Aus dem Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf erhält man ein Näherungverfahren (Verfahren von Picard-Lindelöf) zur Lösung von Anfangswertproblemen, da die Funktionenfolge y_n gegen eine Lösung konvergiert.

Die DGL $y' - y = x$ ist eine lineare inhomogene DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom der dazugehörigen homogenen DGL $y' - y = 0$ ist $\lambda - 1$. Also sind $y_h(x) = Ce^x$ mit $C \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der homogenen DGL $y' - y = 0$. Eine spezielle Lösung der DGL $y' - y = x$ erhält man zum Beispiel durch Variation der Konstanten mit dem Ansatz $y_s(x) = C(x)e^x$.

$$\begin{aligned}
y_s'(x) - y_s(x) = C'(x)e^x = x \\
C'(x) &= xe^{-x} \\
C(x) &= \int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} \\
y_s(x) &= -x - 1
\end{aligned}$$

Ein allgemeine Lösung der DGL $y' - y = x$ ist also $y(x) = Ce^x - x - 1$. Durch Auswertung der Anfangsbedingung $y(0) = C - 1 = 0$ bestimmt man den Wert der Konstante $C = 1$. Damit ist $y(x) = e^x - x - 1$ die gesuchte Lösung der AWA.

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf folgt die Existenz einer eindeutigen Lösung der AWA, weil die Funktion $f(x, y) = x + y$ eine Lipschitzbedingung bezüglich y auf $\mathbb{R}^2$ erfüllt, denn $f_y(x, y) = 1$. Wir erzeugen diese eindeutige Lösung auch mit dem Verfahren von Picard-Lindelöf mit $f(x, y) = x + y$ und $\xi = \eta = 0$

$$\begin{aligned}
y_0(x) &\equiv 0 \\
y_1(x) &= 0 + \int_0^x f(t, y_0(t))\,dt = \int_0^x (t + 0)\,dt = \frac{1}{2}x^2 \\
y_2(x) &= 0 + \int_0^x f(t, y_1(t))\,dt = \int_0^x t + \frac{1}{2}t^2\,dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 \\
y_n(x) &= \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j!}x^j \quad \text{(Induktion!)}
\end{aligned}$$

Nun folgt $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!}x^j = e^x - x - 1$.

1.3.2. *Mehrere Lösungen einer AWA.* Wir betrachten die AWA $y' = 3y^{2/3}$ mit $y(0) = 0$. Die Funktionen $y(x) \equiv 0$ und $y(x) = x^3$ sind Lösungen der AWA. Die Funktion $f(x, y) = f(y) = 3y^{2/3}$ erfüllt keine Lipschitzbedingung bezüglich y, denn $f_y(x, y) = f'(y) = 2y^{-1/3}$ ist nur für $y \neq 0$ definiert und $\lim_{y\to 0} f'(y) = \pm\infty$, also f_y ist nahe des Startpunktes $(0, 0)^T$ unbeschränkt.

Theorem 2 (**Existenzsatz von Peano**). *Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $I = \{(x, y)^T : |x - \xi| \leq \alpha, |y - \eta| \leq \beta\}$ um einen Punkt $(\xi, \eta)^T$ ist, dann hat die AWA $y' = f(x, y)$ mit $y(\xi) = \eta$ eine Lösung $y : U_\delta \to \mathbb{R}$, wobei $U_\delta = \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \delta\}$ eine Umgebung von ξ ist, die durch $K = ||f||_I$ und $\delta = \min\{\alpha, \beta/K\}$ gegeben ist.*

Bemerkung 1. Im Existenzsatz von Peano wird nicht angenommen, dass die Funktion f bezüglich y Lipschitz stetig ist. Deshalb kann man nur die Existenz, aber nicht die Eindeutigkeit einer Lösung folgern.

1.4. Abhängigkeit von den Anfangswerten. Die Funktion $y_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung der AWA $y' = f(x, y)$ mit $y(\xi) = \eta$. Für $\alpha > 0$ ist die Menge $S_\alpha := \{(x, y) : |y - y_0(x)| < \alpha\}$ eine Umgebung des Graphs der Funktion y_0. Eine AWA $y' = g(x, y)$ mit $y(\xi) = \zeta$ heißt **δ-Störung** der AWA $y' = f(x, y)$ mit $y(\xi) = \eta$, falls $|\zeta - \eta| < \delta$, g stetig auf S_α und $|g(x, y) - f(x, y)| < \delta$ für alle $(x, y) \in S_\alpha$.

Theorem 3 (**Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten**). *Wenn für ein $\alpha > 0$ die Funktion f auf S_α stetig ist und einer Lipschitzbedingung bezüglich y*

genügt, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$*, so dass* $|z(x) - y_0(x)| < \varepsilon$ *für alle* $a \leq x \leq b$ *für jede Lösung* $z : [a,b] \to \mathbb{R}$ *einer* δ*-Störung der AWA* $y' = f(x,y)$*,* $y(\xi) = \eta$ *gilt.*

Unter gewissen Voraussetzungen bewirkt also eine kleine Änderung des Anfangswertes oder des Vektorfeldes nur ein kleine Änderung des Lösungsfunktion einer AWA.

In manchen Fällen kann man dieses theoretische Resultat auch konkret nachrechnen. Zum Beispiel ist die Lösung der AWA $y' = y$ mit $y(0) = \eta$ die Funktion $y(x) = ce^x$ mit $y(0) = C = \eta$, also $y(x) = \eta e^x$. Die Funktion $y(x,\eta) = \eta e^x$ ist stetig. Die DGL $z' = z + \delta x$ ist eine δ-Störung auf $[-1,1] \times \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung ist $z(x) = ce^x - \delta x - \delta$. Die Anfangsbedingung $z(0) = C - \delta = \zeta$ liefert $z(x) = (\delta + \zeta)e^x - \delta x - \delta$ und $z(x, \delta, \zeta) \to y(x, \eta)$ für $\delta \to 0$ und $\zeta \to \eta$.

1.5. Trennung der Variablen. Wenn die AWA die Form $y' = g(x)h(y)$ mit $y(\xi) = \eta$ hat und $g : \xi \in [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : \eta \in [c,d] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, dann hat diese AWA nach dem Existenzsatz von Peano eine Lösung, da $f(x,y) = g(x)h(y)$ stetig ist. Ist h sogar stetig differenzierbar, so folgt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf, dass diese Lösung eindeutig ist.

- Wenn $h(\eta) = 0$, dann ist $y(x) \equiv \eta$ die gesuchte Lösung.
- Sonst ist die Lösung durch Auflösung der Gleichung

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx \tag{3}$$

  nach y und Auswertung der Anfangsbedingungen gegeben.

Für den Spezialfall $h(y) \equiv 1$ erhält man die allgemeine Lösung $y(x) = \int g(x)\,dx$ durch Bestimmung der Stammfunktion.

1.6. Substitution vom Typ $u = y/x$. Wenn die AWA die Form $y' = g(y/x)$ mit $y(\xi) = \eta$ hat, dann führt die Substitution $u(x) = y(x)/x$ zu einer DGL, die man mit Trennung der Variablen lösen kann.

1.6.1. *Herleitung der neuen AWA.* Aus Ketten- und der Quotientenregel folgt

$$u'(x) = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(y'(x) - \frac{y(x)}{x}\right) = \frac{1}{x}(g(u(x)) - u(x)).$$

Die zu lösende AWA ist nun

$$u' = (g(u) - u)/x, \quad u(\xi) = \eta/\xi. \tag{4}$$

1.6.2. *Beispiel.* Wir betrachten die AWA

$$y' = \frac{y^2 + 3xy}{x^2} \quad (x > 0), \quad y(1) = 2.$$

Es gilt

$$\frac{y^2 + 3xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\frac{y}{x}.$$

Also ist hier $g(u) = u^2 + 3u$ und die neue AWA $u' = (u^2 + 2u)/x$ mit $u(1) = 2$. Durch Trennung der Variablen erhält man

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{u(u+2)}\,du &= \int \frac{1}{x}\,dx \\
\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+2}\right) du &= \ln x + C \\
\frac{1}{2} \ln \frac{u}{u+2} &= \ln x + C \\
\frac{u}{u+2} &= x^2 \tilde{C}.
\end{aligned}$$

Wegen $u(1) = 2$, gilt $\tilde{C} = 1/2$ und

$$u(x) = \frac{2x^2}{2 - x^2} \text{ und } y(x) = u(x)x = \frac{2x^3}{2 - x^2} \text{ für } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

1.7. Substitution vom Typ $u = ax + by + c$ mit $b \neq 0$. Wenn die AWA die Form $y' = g(ax + by + c)$ mit $y(\xi) = \eta$ und $b \neq 0$ hat, dann führt die Substitution $u(x) = ax + by(x) + c$ zu einer DGL, die man mit Trennung der Variablen lösen kann.

1.7.1. *Herleitung der neuen AWA.* Es gilt $u'(x) = a + by'(x) = a + bg(u(x))$. Die zu lösende AWA ist nun

$$u' = a + bg(u), \quad u(\xi) = a\xi + b\eta + c. \tag{5}$$

1.7.2. *Beispiel.* Wir betrachten die AWA $y' = (x + y)^2$ mit $y(0) = 0$. Hier sind $a = b = 1$, $c = 0$ und $g(u) = u^2$ und die neue AWA ist $u' = 1 + u^2$ mit $u(0) = 0$. Durch Trennung der Variablen erhält man

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+u^2}\,du &= \int 1\,dx \\
\arctan u &= x + C \\
u(x) &= \tan(x + C).
\end{aligned}$$

Wegen $u(0) = 0$, gilt $\tilde{C} = 0$,

$$u(x) = \tan x \text{ und } y(x) = u(x) - x = -x + \tan x \text{ für } -\pi/2 < x < \pi/2.$$

1.8. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Eine lineare DGL erster Ordnung ist eine DGL der Form $y' = g(x)y + h(x)$ mit stetigen Funktionen $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$. Mit $f(x, y) = g(x)y + h(x)$ gilt $f_y = g$. Also ist jede AWA $y' = g(x)y + h(x)$, $y(\xi) = \eta$, mit $\xi \in [a, b]$ eindeutig lösbar.

1.8.1. *Zerlegung des Problems.* Wenn y_1 und y_2 zwei Lösungen der inhomogenen DGL $y' = g(x)y + h(x)$ sind, so ist ihre Differenz $y_1 - y_2$ eine Lösungen der *dazugehörigen homogenen* DGL $y' = g(x)y$, denn

$$\begin{aligned}
(y_1 - y_2)' = y_1' - y_2' &= g(x)y_1 + h(x) - (g(x)y_2 + h(x)) = g(x)y_1 - g(x)y_2 \\
&= g(x)(y_1 - y_2).
\end{aligned}$$

Um alle Lösungen der inhomogenen DGL $y' = g(x)y + h(x)$ zu bestimmen, muss man alle Lösungen y_h der dazugehörigen homogenen DGL $y' = g(x)y$ und eine Lösung y_s der inhomogenen DGL $y' = g(x)y + h(x)$ bestimmen.

1.8.2. *Bestimmung der Lösungen der homogenen DGL.* Durch Trennung der Variablen bestimmt man die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' = g(x)y$.

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int g(x)\, dx \Rightarrow \ln y = c + \int g(x)\, dx \Rightarrow y_h(x) = Ce^{\int g(x)\, dx} \text{ mit } C \in \mathbb{R} \tag{6}$$

1.8.3. *Bestimmung einer Lösung der inhomogenen DGL.* Durch Variation der Konstanten, also mit dem Ansatz $y_s(x) = C(x)y_h(x)$, bestimmt man eine Lösung der DGL $y' = g(x)y + h(x)$. Es folgt

$$\begin{aligned} g(x)y_s(x) + h(x) &= y_s'(x) = C'(x)y_h(x) + C(x)y_h'(x) \\ g(x)C(x)y_h(x) + h(x) &= C'(x)y_h(x) + C(x)g(x)y_h(x) \\ C'(x) &= \frac{h(x)}{y_h(x)} \\ y_s(x) &= y_h(x) \int \frac{h(x)}{y_h(x)}\, dx \end{aligned}$$

1.8.4. *Lösung der AWA.* Die *allgemeine* Lösung der DGL $y' = g(x)y + h(x)$ ist dann

$$y(x) = Cy_h(x) + y_h(x) \int \frac{h(x)}{y_h(x)}\, dx = Ce^{\int g(x)\, dx} + e^{\int g(x)\, dx} \int \frac{h(x)}{e^{\int g(x)\, dx}}\, dx. \tag{7}$$

Die Konstante $C \in \mathbb{R}$ bestimmt man durch Auswertung der Anfangsbedingung.

1.8.5. *Beispiel.* Wir betrachten die AWA $y' = \frac{1}{x}y + x^2$ für $x > 0$ mit $y(2) = 0$. Dies ist eine lineare DGL mit $g(x) = 1/x$ und $h(x) = x^2$. Nun folgt

$$y_h(x) = e^{\int g(x)\, dx} = e^{\int \frac{1}{x}\, dx} = e^{\ln x} = x$$

und

$$y_s(x) = y_h(x) \int \frac{h(x)}{y_h(x)}\, dx = x \int \frac{x^2}{x}\, dx = x \int x\, dx = \frac{1}{2}x^3.$$

Die allgemeine Lösung der DGL $y' = \frac{1}{x}y + x^2$ ist $y(x) = Cx + \frac{1}{2}x^3$. Die Anfangsbedingung liefert $0 = y(2) = 2C + 4$, also $C = -2$ und die Lösung $y(x) = -2x + \frac{1}{2}x^3$.

1.9. Bernoullische Differentialgleichungen. Eine AWA der Form

$$y' = g(x)y + h(x)y^\alpha$$

mit stetigen Funktionen $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $0, 1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ und einer Anfangsbedingung $y(\xi) = \eta$ mit $\xi \in [a, b]$ ist vom Bernoulli-Typ. Mit $f(x) = g(x)y + h(x)y^\alpha$ gilt $f_y(x, y) = g(x) + \alpha h(x)y^{\alpha-1}$. Diese partielle Ableitung ist stetig für $y \neq 0$ oder $\alpha > 1$. Für $\eta \neq 0$ oder $\alpha > 1$ ist diese AWA eindeutig lösbar. Für $\eta = 0$ und $\alpha < 1$, z.B. $\alpha = 2/3$, kann sie aber auch mehrere Lösungen haben (siehe Abschnitt 1.3.2).

Wenn $\eta = 0$ und $\alpha > 0$, dann ist die Funktion $y(x) \equiv 0$ eine Lösung der AWA. Sonst erhält man durch die Substitution $u(x) = y(x)^{1-\alpha}$ die neue AWA mit einer linearen inhomogenen DGL für $u(x)$:

$$u' = (1-\alpha)g(x)u + (1-\alpha)h(x), \quad u(\xi) = \eta^{1-\alpha}. \tag{8}$$

1.9.1. *Herleitung der neuen DGL.*

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1-\alpha)y(x)^{-\alpha}y'(x) = (1-\alpha)y(x)^{-\alpha}(g(x)y(x) + h(x)y(x)^\alpha) \\ &= (1-\alpha)(g(x)y(x)^{1-\alpha} + h(x)) = (1-\alpha)(g(x)u(x) + h(x)). \end{aligned}$$

1.9.2. *Beispiel.* Die AWA $y' = xy + x^2y^2$ mit $y(0) = 1$ ist vom Bernoulli-Typ mit $g(x) = x$, $h(x) = x^2$ und $\alpha = 2$. Die neue AWA für $u(x) = y(x)^{-1} = 1/y(x)$ lautet $u' = -xu - x^2$ mit $u(0) = 1$.

2. Implizite gewöhnliche Differentialgleichungen 1.Ordnung

Wir behandeln drei Typen impliziter gewöhnlicher DGLen erster Ordnung: exakte Differentialgleichungen, Differentialgleichungen, die durch Multiplikation mit einer Funktion zu exakten werden, und Clairautsche Differentialgleichungen.

2.1. Exakte Differentialgleichungen. Eine DGL der Form

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

heißt **exakt**, wenn $f_y = g_x$ auf einer einfach zusammenhängenden Menge $D \subset \mathbb{R}^2$.

2.1.1. *Vektorfeld und Potentialfunktion.* Wenn die DGL $f(x, y) + g(x, y)y' = 0$ exakt ist, so besitzt das Vektorfeld $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))^T$ auf D eine Potentialfunktion $u : D \to \mathbb{R}$, weil die Bedingung $f_y = g_x$ bedeutet, dass die Rotation des Vektorfeldes verschwindet. Es gilt also $\operatorname{grad} u = (u_x, u_y)^T = (f, g)^T$.

2.1.2. *Integralkurven.* Wenn $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL ist, dann ist u entlang der Kurve $\{(x, y(x))^T : x \in I\}$ konstant, es gilt also $u(x, y(x)) = c$ für alle $x \in I$, denn die Ableitung der Funktion $h(x) = u(x, y(x))$ verschwindet für alle x, weil

$$h'(x) = u_x(x, y(x)) + u_y(x, y(x))y'(x) = f(x, y(x)) + g(x, y(x))y'(x) = 0.$$

2.1.3. *Algorithmus für exakte DGL.* Um eine AWA $f(x, y) + g(x, y)y' = 0$ mit $y(\xi) = \eta$ zu lösen, geht man so vor:

- Potential u des Vektorfeldes $(f, g)^T$ bestimmen
- Konstante $c = u(\xi, \eta)$ berechnen
- Gleichung $u(x, y) = c$ um $(\xi, \eta)^T$ nach y auflösen

2.1.4. *Beispiel.* Wir betrachten die AWA $2x + y^3 + 3xy^2y' = 0$ mit $y(2) = 0$. Mit $f(x, y) = 2x + y^3$ und $g(x, y) = 3xy^2$ überprüfen wir $f_y(x, y) = 3y^2 = g_x(x, y)$. Also ist die DGL exakt. Ein Potential u ist $u(x, y) = x^2 + xy^3$. Es gilt $u(2, 0) = 4$. Die Auflösung der Gleichung $x^2 + xy^3 = 4$ nach y liefert die Lösung

$$y(x) = \left(\frac{4 - x^2}{x}\right)^{1/3}, \quad (x > 0).$$

2.2. Integrierender Faktor (Euler-Multiplikator). Gegeben ist eine DGL der Form $f(x, y) + g(x, y)y' = 0$ mit $f_y \not\equiv g_x$. Diese DGL ist also nicht exakt.

2.2.1. *Idee des integrierenden Faktors.* Man sucht eine Funktion $\mu(x, y)$, so dass die DGL $\mu(x, y)f(x, y) + \mu(x, y)g(x, y)y' = 0$ exakt ist. Dann löst man die exakte DGL. Mit den Bezeichnungen $F(x, y) = \mu(x, y)f(x, y)$ und $G(x, y) = \mu(x, y)g(x, y)$ gilt nach der Produktregel $F_y = \mu_y f + \mu f_y$ und $G_x = \mu_x g + \mu g_x$, also

$$F_y = G_x \Leftrightarrow \mu_y f - \mu_x g = \mu(-f_y + g_x).$$

2.2.2. *Spezialfälle.* Die Bedingung $F_y = G_x$ liefert eine partielle DGL für die Funktion μ, die wir bis jetzt nur in Spezialfällen lösen können:

Falls $\frac{f_y - g_x}{g}$ eine von y unabhängige Funktion ist, so kann man auch annehmen, dass μ nur von x abhängt, und erhält aus der linearen homogenen gewöhnlichen DGL $\mu_x = \mu(f_y - g_x)/g$ den Multiplikator

$$\mu(x) = e^{\int \frac{f_y - g_x}{g}\, dx}. \tag{9}$$

Falls $\frac{f_y - g_x}{f}$ eine von x unabhängige Funktion ist, so kann man auch annehmen, dass μ nur von y abhängt, und erhält aus der linearen homogenen gewöhnlichen DGL $\mu_y = \mu(-f_y + g_x)/f$ den Multiplikator

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-f_y + g_x}{f}\, dy}. \tag{10}$$

2.2.3. *Beispiel.* Die DGL $(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$ ist nicht exakt, denn mit $f(x, y) = 1 - xy$ und $g(x, y) = xy - x^2$ gilt $f_y = -x \not\equiv y - 2x = g_x$. Aber $f_y - g_x = x - y$ und

$$\frac{f_y - g_x}{g} = \frac{x - y}{xy - x^2} = \frac{x - y}{x(y - x)} = -\frac{1}{x}$$

ist eine Funktion, die nur von x abhängt. Der integrierende Faktor

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}\, dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

führt für $x \neq 0$ zu der neuen DGL

$$\frac{1}{x} - y + (y - x)y' = 0$$

mit den Koeffizientenfunktionen $F(x, y) = -y + 1/x$ und $G(x, y) = y - x$. Tatsächlich gilt $F_y = -1 = G_x$. Ein Potential ist $u(x, y) = -xy + \ln x + y^2/2$. Die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ führt zu $c = u(1, 0) = 0$. Auflösen der Gleichung $0 = -xy + \ln x + y^2/2$ nach y um $(1, 0)^T$ liefert

$$y(x) = x - \sqrt{x^2 - 2\ln x}.$$

2.3. Clairautsche Differentialgleichungen. Eine DGL der Form

$$y = xy' + g(y')$$

mit $g \in \mathcal{C}^2([a, b])$ heißt *Clairautsche* Differentialgleichung. Sie besitzt als Lösungen die Geraden $y(x) = xc + g(c)$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und die Kurve

$$\left\{ \begin{pmatrix} -g'(t) \\ g(t) - tg'(t) \end{pmatrix} : t \in [a, b] \right\}.$$

2.3.1. *Beispiel.* Die DGL $y = xy' + (y')^3$ ist eine Clairautsche DGL mit $g(t) = t^3$. Ihre Lösungen sind die Geraden $y(x) = xc + c^3$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und die Kurve

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3t^2, \\ t^3 - t3t^2 \end{pmatrix} : t \in [a, b] \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3t^2, \\ -2t^3 \end{pmatrix} : t \in [a, b] \right\},$$

da $g'(t) = 3t^2$. Die Spur dieser Kurve ist die Menge der Punkte $(x, y)^T \subset \mathbb{R}^2$, die die Gleichung $4x^3 = -27y^2$ erfüllen. Dies liefert die expliziten Lösungen

$$y(x) = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{-x^3}$$

für $x \leq 0$. Die DGL mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ist also nicht eindeutig lösbar.

2.3.2. *Herleitung der Lösungen.* Die Lösungen der Clairautschen DGL findet man durch folgende Überlegung: Es sei $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der impliziten DGL $F(x, y, y') = 0$. Dann ist $y' : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion von x.

- Wenn $y' \equiv c$, dann gilt $F(x, y, c) = 0$ und durch Umstellung nach y erhält man die Lösung $y(x)$.
- Wenn $y'(x) \not\equiv c$, dann besitzt, wenigstens lokal, eine Umkehrfunktion. Wir nennen y' nun t und schreiben x als Funktion von t. Auch y ist als Funktion von x nun eine Funktion von t. Für die beiden Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ gilt:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'\dot{x}(t) = t\dot{x}(t) \quad \text{DGL für } y \\ 0 &= F(x(t), y(t), t) \\ 0 &= F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_t \\ 0 &= (F_x + tF_y)\dot{x}(t) + F_t \quad \text{DGL für } x \end{aligned}$$

Bei einer Clairautschen DGL ist $F(x, y, t) = y - xt - g(t)$. Da $F_x = -t$, $F_y = 1$ und $F_t = -x - g'(t)$ wird aus der DGL für $x(t)$ nun $x(t) = -g'(t)$. Die DGL $\dot{y}(t) = -tg''(t)$ löst man durch partielle Integration und erhält $y(t) = -tg'(t) + g(t)$.

3. Systeme erster Ordnung

Unter einem **System** von (expliziten) Differentialgleichungen erster Ordnung versteht man

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}$$

wobei für $i = 1, \ldots, n$ Funktionen $f_i : \mathbb{R}^{n+1} \supset D \to \mathbb{R}$ gegeben und Funktionen $y_i : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ gesucht sind. Eine AWA erhält man durch Vorgabe von Anfangswerten $y_i(\xi) = \eta_i$ mit $\xi \in I$ und $\eta_i \in \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Fasst man die gegebenen und die gesuchten Funktionen zu vektorwertigen Funktionen $\vec{f}$ und $\vec{y}$ und die Anfangswerte zu einem Vektor $\vec{\eta}$ zusammen,

$$\vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f} := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\eta} := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix},$$

so schreibt sich das System von Differentialgleichungen als

$$\vec{y}\prime = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}. \tag{11}$$

Eine Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^{n+1} \supset D \to \mathbb{R}^n$ genügt auf D einer **Lipschitzbedingung bezüglich** $\vec{y}$, falls eine Konstante M existiert, so dass

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}) - \vec{f}(x, \tilde{\vec{y}})\| \leq M\|\vec{y} - \tilde{\vec{y}}\|$$

für alle $(x, \vec{y})^T, (x, \tilde{\vec{y}})^T \in D$.

LEMMA 2 (**Kriterium für Lipschitzbedingung bezüglich $\vec{y}$**). *Wenn für eine Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^{n+1} \supset D \to \mathbb{R}^n$ in allen Punkten $(x, \vec{y})^T \in D$ alle partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$$

existieren, stetig und beschränkt sind, dann erfüllt $\vec{f}$ auf D eine Lipschitzbedingung bezüglich $\vec{y}$.

Zum Beispiel erfüllen die Funktionen $f_i(x, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(x)y_j + b_i(x)$ eine Lipschitzbedingung bezüglich $\vec{y}$, falls die Funktionen $a_{ij}, b_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig sind, denn dann gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = a_{ij}(x)$$

.

THEOREM 4 (**Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Systeme erster Ordnung**). *Gegeben ist die AWA*

$$\vec{y}\prime = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(\xi) = \vec{\eta}.$$

Wenn $\vec{f}$ stetig auf einem Intervall $I = \{(x, y)^T : |x - \xi| \leq \alpha, ||\vec{y} - \vec{\eta}|| \leq \beta\}$ ist und dort eine Lipschitzbedingung bezüglich $\vec{y}$ erfüllt, dann hat die AWA eine eindeutige Lösung $\vec{y} : U_\delta \to \mathbb{R}$, wobei $U_\delta = \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \delta\}$ eine Umgebung von ξ ist, die durch $K = ||\vec{f}||_I$ und $\delta = \min\{\alpha, \beta/K\}$ gegeben ist, und $||(a_1, \dots, a_n)^T|| = \max_i\{|a_i|\}$ die Maximumnorm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

3.1. Lineare Systeme erster Ordnung. Ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung heißt **lineares System**, falls

$$f_i(x, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + b_i(x) \text{ für alle } i, j = 1, \dots, n,$$

wobei $a_{ij}, b_i : (a, b) \to \mathbb{R}$ Funktionen auf dem Intervall $(a, b) \in \mathbb{R}$ sind. Fasst man die Koeffizientenfunktionen a_{ij} zu einer Matrix $A(x)$ und die Funktionen $b_i(x)$ zu einem Spaltenvektor $\vec{b}(x)$ zusammen, so schreibt sich ein lineares System als

$$\vec{y}\prime = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x). \tag{12}$$

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für System von Differentialgleichungen folgt:

THEOREM 5 (**Eindeutige Lösbarkeit**). *Eine AWA eines linearen Systems erster Ordnung ist eindeutig lösbar, wenn alle Koeffizientenfunktionen a_{ij}, b_i stetig sind.*

3.1.1. *Struktur der Lösungsmenge eines linearen Systems.* Zwei Lösungen des inhomogenen Systems $\vec{y}\prime = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$ unterscheiden sich um die Lösung des dazugehörigen homogenen Systems $\vec{y}\prime = A(x)\vec{y}$, denn für zwei Lösungen $\vec{y}_1$ und $\vec{y}_2$ des inhomogenen Systems gilt

$$\begin{aligned}(\vec{y}_1 - \vec{y}_2)\prime = \vec{y}_1\prime - \vec{y}_2\prime &= A(x)\vec{y}_1 + \vec{b}(x) - (A(x)\vec{y}_2 + \vec{b}(x)) \\ &= A(x)\vec{y}_1 - A(x)\vec{y}_2 = A(x)(\vec{y}_1 - \vec{y}_2).\end{aligned}$$

Wir versuchen also, alle Lösungen des homogenen Systems und eine Lösung des inhomogenen Systems zu bestimmen. Eine allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist dann gerade Summe dieser einen Lösung des inhomogenen Systems und einer allgemeinen Lösung des homogenen Systems.

Die Lösungen des homogenen Systems $\vec{y}\prime = A(x)\vec{y}$ bilden einen n-dimensionalen Vektorraum, denn die Anfangswertaufgaben $\vec{y}\prime = A(x)\vec{y}$ mit $\vec{y}(\xi) = \vec{e}_i$ sind für $i = 1, \dots, n$ eindeutig lösbar und jeder Anfangswert $\vec{\eta}$ ist Linearkombination $\vec{\eta} = \sum_{i=1}^n \eta_i \vec{e}_i$. Eine Basis des Vektorraumes der Lösungen des homogenen Systems heißt **Fundamentalsystem**.

3.1.2. *Wronskideterminante - linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems.* Wenn man Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ des homogenen Systems $\vec{y}\prime = A(x)\vec{y}$ kennt, so möchte man wissen, ob diese linear unabhängig sind, also ein Fundamentalsystem bilden. Die Funktion $W(x) = \det(\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x))$ heißt **Wronskideterminante**.

Lemma 3. *Die Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ des homogenen Systems $\vec{y}\prime = A(x)\vec{y}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $W(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$.*

Beweis. $W(x_0) = 0$ genau dann, wenn $\vec{y}_1(x_0), \dots \vec{y}_n(x_0)$ linear abhängig, also $\sum_{j=1}^n a_j \vec{y}_j(x_0) = \vec{0}$ mit $a = (a_1, \dots, a_n) \neq \vec{0}$. Da AWA $\vec{y}\prime = A(x)\vec{y}$ mit $\vec{y}(x_0) = \vec{0}$ eindeutige Lösung $\vec{y} \equiv \vec{0}$ hat, gilt $\sum_{j=1}^n a_j \vec{y}_j(x_0) = \vec{0}$ genau dann, wenn $\sum_{j=1}^n a_j \vec{y}_j \equiv \vec{0}$. □

3.1.3. *Variation der Konstanten - Bestimmung einer Lösung des inhomogenen Systems.* Wenn man ein Fundamentalsystem $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ kennt, so kann man durch Variation der Konstanten, d.h. mit dem Ansatz $\vec{y}_s(x) = \sum_{i=1}^n \vec{y}_i(x) c_i(x)$ eine Lösung des inhomogenen Systems $\vec{y}\prime = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$ bestimmen. Dazu benötigt man die Funktionen

$$W_i(x) = \det(\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_{i-1}(x), \vec{b}(x), \vec{y}_{i+1}(x), \dots, \vec{y}_n(x)). \tag{13}$$

Lemma 4. *Wenn $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ ein Fundamentalsystem des homogenen Systems $\vec{y}\prime = A(x)\vec{y}$ ist, so ist*

$$\vec{y}_s(x) = \sum_{i=1}^n \vec{y}_i(x) \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx \tag{14}$$

eine Lösung des inhomogenen Systems $\vec{y}\prime = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $\vec{y}\prime = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$ ist dann

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_s(x) + \sum_{i=1}^n c_i \vec{y}_i(x) \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}.$$

Die größte Schwierigkeit bei der Lösung linearer Systeme erster Ordnung ist also die Bestimmung eines Fundamentalsystems. Nur falls $A(x)$ konstant ist, gibt es dafür ein Verfahren, das auf der Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A beruht.

3.1.4. *Beispiel.* Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 + e^x \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2 + e^{-x}, \end{aligned}$$

das sich als $\vec{y}\prime = A\vec{y} + \vec{b}(x)$ mit

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

schreiben läßt.

Das dazugehörige *homogene* System

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2, \end{aligned}$$

läßt sich entkoppeln, denn aus $y_2 = 3y_1 - y_1'$ folgt

$$y_2' = 3y_1' - y_1'' = 4y_1 - 2(3y_1 - y_1'),$$

also die DGL $y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$, deren Lösungen Linearkombinationen der Funktionen e^{-x} und e^{2x} sind, da das charakteristische Polynom $\lambda^2 - \lambda - 2$ die Nullstellen $\lambda = -1$ und $\lambda = 2$ hat. Beachten wir nun $y_2 = 3y_1 - y_1' = (3 - \lambda)e^{\lambda x}$, so erhalten wir die Lösungen

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-x}, \text{ und } \vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}$$

des homogenen Systems, die ein Fundamentalsystem bilden, denn

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ 4e^{-x} & e^{2x} \end{pmatrix} = e^{-x}e^{2x} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -3e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir berechnen eine *spezielle* Lösung nach der Formel

$$\vec{y}_s(x) = \vec{y}_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + \vec{y}_2(x) \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx.$$

$$\begin{aligned} W_1 &= e^{2x} \begin{vmatrix} e^x & 1 \\ e^{-x} & 1 \end{vmatrix} = e^{2x}(e^x - e^{-x}) \\ W_2 &= e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 4 & e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x}(e^{-x} - 4e^x) \\ \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx &= \int -\frac{1}{3} e^x (e^x - e^{-x}) dx = -\frac{1}{6} e^{2x} + \frac{1}{3} x \\ \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx &= \int -\frac{1}{3} e^{-2x} (e^{-x} - 4e^x) dx = \frac{1}{9} e^{-3x} - \frac{4}{3} e^{-x} \\ \vec{y}_s(x) &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} (2xe^{-x} - e^x) + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (e^{-x} - 12e^x) \end{aligned}$$

3.2. Lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ein lineares System mit konstanten Koeffizienten ist von der Form $\vec{y}\prime = A\vec{y} + \vec{b}(x)$, wobei A eine reelle $n \times n$-Matrix und $\vec{b} : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion ist. Ein Fundamentalsystem ist aus den Eigenwerten und Eigenvektoren der Matrix A berechenbar.

3.2.1. *Reelle Eigenwerte, diagonalisierbar.* Wenn die Matrix A nur reelle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ besitzt, z.B. wenn A symmetrisch ist, und dazugehörige, linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ existieren, dann bilden die Funktionen

$$\vec{y}_i(x) = \vec{c}_i e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{15}$$

ein Fundamentalsystem, denn

$$\vec{y}_i{}' = \vec{c}_i \lambda e^{\lambda_i x}, \quad A\vec{y}_i = A\vec{c}_i e^{\lambda_i x}, \quad \vec{y}_i{}' = A\vec{y}_i \Leftrightarrow \vec{c}_i \lambda = A\vec{c}_i \Leftrightarrow (A - \lambda_i E)\vec{c}_i = 0.$$

Dieser Fall tritt ein, wenn die Dimension der Eigenräume E_{λ_i} gleich der Vielfachheit der Eigenwerte λ_i ist, z.B. wenn alle Eigenwerte nur einfach auftauchen. In den folgenden *Beispielen* ist die Vielfachheit der (reellen) Eigenwerte gleich der Dimension der Eigenräume:

- Die Eigenwerte Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$
sind $\lambda = -1$ und $\lambda = 2$, denn $\det(A - \lambda E) = (3 - \lambda)(-2 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$. Wir berechnen die Eigenräume:
$$A + E = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Wir können $\vec{c}_1 = (1,4)^T$ und $\vec{c}_2 = (1,1)^T$ wählen und erhalten wie im Beispiel in Abschnitt 3.1.4 das Fundamentalsystem
$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-x}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$
- Die symmetrische Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
hat den einfachen reellen Eigenwert $\lambda = 7$ und den doppelten reellen Eigenwert $\lambda = 1$, denn
$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -2+2\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 2 \\ 1 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((2-\lambda)(6-\lambda) - 5) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 7) = (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 7).\end{aligned}$$
Die dazugehörigen Eigenräume sind
$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ 2s \\ -t-s \end{pmatrix} s, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad E_7 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} t \in \mathbb{R} \right\},$$
denn
$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$A - 7E = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -24 & 12 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Dimension der Eigenräume ist gleich der Vielfachheit der Eigenwerte, $\dim E_1 = 2$ und $\dim E_7 = 1$. Wir wählen die linear unabhängigen Eigenvektoren $(2, 0, -1)^T$ und $(0, 2, -1)^T$ in E_1 und $(1, 1, 2)^T$ in E_7 und erhalten das Fundamentalsystem

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^x, \quad \vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^x, \quad \vec{y}_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{7x}$$

des linearen Systems von Differentialgleichungen $\vec{y}\prime = A\vec{y}$.

3.2.2. *Reelle Eigenwerte, nicht diagonalisierbar.* Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ein l-facher Eigenwert ist und $\dim E_\lambda = 1$ gilt, der dazugehörige Eigenraum aber nur eindimensional ist, dann hat der Jordanblock zum Eigenwert λ die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Es existieren also ein Vektor $\vec{0} \neq \vec{c}_1$ mit $(A - \lambda E)\vec{c}_1 = \vec{0}$, eine Vektor $\vec{c}_2$ mit $(A - \lambda E)\vec{c}_2 = \vec{c}_1$ und allgemein Vektoren $\vec{c}_i$ mit

$$(A - \lambda E)\vec{c}_i = \vec{c}_{i-1} \text{ für } i = 1, \ldots, l. \tag{16}$$

Dann bilden die Funktionen

$$\vec{y}_i(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{k!} x^k \vec{c}_{i-k} \text{ für } i = 1, \ldots, l \tag{17}$$

ein Fundamentalsystem. Falls $l = 2$, so bedeuten diese Formeln

$$\vec{y}_1(x) = e^{\lambda x}\vec{c}_1, \quad \vec{y}_2(x) = e^{\lambda x}(x\vec{c}_1 + \vec{c}_2).$$

Zum *Beispiel* hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

den einfachen reellen Eigenwert $\lambda = 4$ und den doppelten reellen Eigenwert $\lambda = 1$, denn

$$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda)-2) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4).$$

Der Eigenraum E_4 zum Eigenwert $\lambda = 4$ ist $\{(8t, 3t, 6t)^T : t \in \mathbb{R}\}$, denn

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum E_1 zum Eigenwert $\lambda = 1$ ist $\{(t,0,0)^T : t \in \mathbb{R}\}$, denn

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\dim E_1 = 1 < 2 = l$. Wir wählen $\vec{c}_1 = (1,0,0)^T$ und lösen das Gleichungssystem $(A-E)\vec{c}_2 = \vec{c}_1$:

$$(A - E|\vec{c}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Lösung ist $\vec{c}_2 = (0,-1,1)^T$. Mit der Wahl des Eigenvektors $\vec{c} = (8,3,6)^T \in E_4$ erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^x,\ \vec{y}_2(x) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^x = \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x,\ \vec{y}_3(x) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} e^{4x}$$

des linearen Systems von Differentialgleichungen $\vec{y}\prime = A\vec{y}$.

3.2.3. *Komplexe Eigenwerte.* Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein einfacher komplexer Eigenwert der Matrix A ist, $\lambda \notin \mathbb{R}$, dann bestimmt man einen Eigenvektor $\vec{c}$ zum Eigenwert λ, d.h. man löst das Gleichungssystem $(A - \lambda E)\vec{c} = \vec{0}$, wobei man komplexe Koeffizienten zuläßt. Dann sind

$$\vec{y}_1(x) = \Re(\vec{c}e^{\lambda x}) \text{ und } \vec{y}_2(x) = \Im(\vec{c}e^{\lambda x}) \tag{18}$$

die zu den Eigenwerten λ und $\bar{\lambda}$ gehörenden Fundamentallösungen.

Zum *Beispiel* hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

den einfachen reellen Eigenwert $\lambda = 2$ und die komplexen Eigenwerte $\lambda = 1 \pm i$, denn $\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 + 1$.

Der Eigenraum E_2 zum Eigenwert $\lambda = 2$ ist $\{(t,0,0)^T : t \in \mathbb{R}\}$, denn

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum E_{1+i} zum Eigenwert $\lambda = 1 + i$ ist $\{(t, it, t)^T : t \in \mathbb{R}\}$, denn

$$A - (1+i)E = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & -1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-i & 1 & -1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-i & 0 & i-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen $\vec{c} = (1, i, 1)^T$ und erhalten die zu $1 \pm i$ gehörenden Fundamentallösungen

$$\vec{y}_1(x) = \Re\left(\begin{pmatrix}1\\ i\\ 1\end{pmatrix} e^{(1+i)x}\right) = e^x \Re\left(\begin{pmatrix}1\\ i\\ 1\end{pmatrix} e^{ix}\right) = e^x \begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_2(x) = \Im\left(\begin{pmatrix}1\\ i\\ 1\end{pmatrix} e^{(1+i)x}\right) = e^x \Im\left(\begin{pmatrix}1\\ i\\ 1\end{pmatrix} e^{ix}\right) = e^x \begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\\ \sin x\end{pmatrix},$$

da $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Die dritte Fundamentallösung ergibt sich aus dem Eigenvektor $(1, 0, 0)^T \in E_2$ als

$$\vec{y}_3(x) = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} e^{2x}.$$

3.2.4. *Spezielle Ansätze.* Hat man die Fundamentallösungen eines linearen Systems mit konstanten Koeffizienten bestimmt, so kann man mit der Formel (14) eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems $\vec{y}\prime = A\vec{y} + \vec{b}(x)$ bestimmen. Es ist aber oft effektiver, einen speziellen Ansatz für $\vec{y}_s(x)$ zu wählen, wenn der inhomogene Anteil $\vec{b}(x)$ von der Form $\vec{b}\cos(\beta x)e^{\alpha x}$ oder $\vec{b}\sin(\beta x)e^{\alpha x}$ mit $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist.

- Wenn $\beta = 0$ und α kein Eigenwert der Matrix A, dann existiert eine spezielle Lösung der Form

(19) $$\vec{y}_s(x) = \vec{c}e^{\alpha x}$$

  mit einem Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$, denn $\vec{y}_s(x)' = \vec{c}\alpha e^{\alpha x}$, $A\vec{y}_s(x) = A\vec{c}e^{\alpha x}$ und

$$\vec{y}_s(x)' = A\vec{y}_s(x) + \vec{b}(x) \Leftrightarrow \vec{c}\alpha = A\vec{c} + \vec{b} \Leftrightarrow -\vec{b} = (A - \alpha E)\vec{c},$$

  wobei dieses letzte Gleichungssystem für $\vec{c}$ lösbar ist, weil $\det(A - \alpha E) \neq 0$, denn α ist kein Eigenwert der Matrix A.
- Wenn $\beta = 0$ und α ein l-facher Eigenwert der Matrix A ist, dann existiert eine spezielle Lösung der Form

(20) $$\vec{y}_s(x) = (\vec{c}_0 + x\vec{c}_1 + \ldots + x^l\vec{c}_l)e^{\alpha x}$$

  mit Vektoren $\vec{c}_j \in \mathbb{R}^n$, denn

$$\vec{y}_s(x)' = e^{\alpha x}\sum_{i=0}^{l} \vec{c}_i(\alpha x^i + ix^{i-1})$$
$$A\vec{y}_s(x) = A(\vec{c}_0 + x\vec{c}_1 + \ldots + x^l\vec{c}_l)e^{\alpha x}$$

  und das Gleichungssystem $\vec{y}_s(x)' = A\vec{y}_s(x) + \vec{b}(x)$ besteht aus den Gleichungen

$$\vec{0} = (A - \alpha E)\vec{c}_l,\ j\vec{c}_j = (A - \alpha E)\vec{c}_{j-1},\ (j = l, \ldots, 2),\ \vec{c}_1 - \vec{b} = (A - \alpha E)\vec{c}_0,$$

  die lösbar sind, weil α ein l-facher Eigenwert der Matrix A ist.
- Wenn $\beta \neq 0$, also $\vec{b}(x) = \vec{b} = \cos(\beta x)e^{\alpha x}$, dann gilt $\vec{b}(x) = \Re(\vec{b}e^{(i\beta+\alpha)x})$. Man bestimmt einen Vektor $\vec{c}$, der die lineare Gleichung $(A - (i\beta + \alpha)E)\vec{c} = -\vec{b}$ erfüllt, und eine spezielle Lösung ist

(21) $$\vec{y}_s(x) = \Re(\vec{c}e^{(i\beta+\alpha)x}).$$

Beispiel: Wir betrachten das inhomogene, lineare System

$$\vec{y}\prime = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Im Beispiel in Abschnitt 3.1.4 wurden die Fundamentallösungen bestimmt. Insbesondere ist 2 ein reeller Eigenwert der Matrix A. Dies führt zum Ansatz $\vec{y}_s(x) = (\vec{c}_0 + \vec{c}_1 x)e^{2x}$ und den Gleichungen $\vec{0} = (A - 2E)\vec{c}_1$ und $\vec{c}_1 - \vec{b} = (A - 2E)\vec{c}_0$ mit $\vec{b} = (1, 0)^T$. Da $\vec{c}_1$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist, gilt $\vec{c}_1 = (t, t)^T$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Nun wird die Gleichung für $\vec{c}_0$ zu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & t-1 \\ 4 & -4 & | & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & t-1 \\ 0 & 0 & | & -3t+4 \end{pmatrix},$$

also $t = 4/3$ und $\vec{c}_0 = (a + 1/3, a)^T$. Damit ist eine spezielle Lösung

$$\vec{y}_s(x) = \left(\begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{2x}.$$

4. Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung heißt **linear**, falls sie von der Form

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x) = f(x)$$

mit stetigen Funktionen $a_j, f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist. Sie ist in **Normalform**, wenn $a_n(x) \equiv 1$. Sie heißt **homogen**, falls $f(x) \equiv 0$, und **inhomogen**, falls $f(x) \not\equiv 0$.

Wir kürzen die linke Seite der DGL mit $L[y]$ ab, also $L[y] = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)y^{(j)}$. Die zur inhomogenen DGL $L[y] = f(x)$ gehörende homogene DGL ist $L[y] = 0$.

4.1. Umwandlung in ein System erster Ordnung. Eine lineare gewöhnliche DGL n-ter Ordnung in Normalform ist zu einem linearen System erster Ordnung äquivalent.

4.1.1. *Definiton einer vektorwertigen Funktion.* Wir definieren neue Funktionen $y_i(x) := y^{(i-1)}(x)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt $y_i'(x) = y^{(i)}(x) = y_{i+1}(x)$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und

$$y_n'(x) = y^{(n)}(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)y^{(j)}(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)y_{j+1}(x)$$

falls $a_n(x) \equiv 1$, die DGL also in Normalform gegeben ist, und $y(x)$ eine Lösung ist.

Fassen wir die neu definierten Funktionen y_i zu einer vektorwertigen Funktion $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ zusammen, so wird aus der linearen DGL n-ter Ordnung das lineare System

$$\vec{y}\prime = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

4.1.2. *Umformulierung der Resultate für Systeme erster Ordnung.* Aus den Eigenschaften linearer Systeme:

- Die Lösungen der homogenen DGL $L[y] = 0$ bilden einen n-dimensionalen Vektorraum.
- Zwei Lösungen der inhomogenen DGL $L[y] = f(x)$ unterscheiden sich um eine Lösung der homogenen DGL.
- Jede AWA zu einer linearen DGL n-ter Ordnung ist eindeutig lösbar.

Bemerkung 2. Aus linearen gewöhnlichen DGLen n-ter Ordnung entstehen lineare Systeme einer sehr speziellen Form. Die gesuchte Lösungsfunktion $y(x)$ ist die erste Komponente der vektorwertigen Funktion $\vec{y}$, die Lösung des Systems ist.

4.1.3. *Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.* Eine lineare gewöhnliche DGL n-ter Ordnung hat genau dann konstante Koeffizienten $a_j(x)$, wenn das dazugehörige System eine konstante Koeffizientenmatrix A hat. In dem Fall gilt

$$\det(A - \lambda E) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j. \tag{23}$$

Bei der Bestimmung der Fundamentallösungen kann man auf die Berechnung der Eigenvektoren verzichten, falls das System $\vec{y}\prime = A\vec{y}$ von einer linearen DGL n-ter Ordnung $L[y] = 0$ kommt:

- Für paarweise verschiedene reelle Eigenwerte λ_j der Matrix A bilden die Funktionen $e^{\lambda_j x}$ eine Basis des Vektorraumes der Lösungen der homogenen DGL $L[y] = 0$.
- Wenn $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Eigenwert ist, so bilden $\Re(e^{\lambda x})$ und $\Im(e^{\lambda x})$ linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL $L[y] = 0$.
- Wenn λ ein l-facher Eigenwert ist, so sind $x^j e^{\lambda x}$ für $j = 1, \ldots, l$ linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL $L[y] = 0$.

4.1.4. *Beispiel.* Die lineare homogene DGL $y'' + \omega^2 y = 0$ wird zu

$$\vec{y}\prime = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{y},$$

da $n = 2$, $a_0(x) \equiv \omega^2$ und $a_1(x) = f(x) \equiv 0$. Diese lineare DGL zweiter Ordnung hat die Eigenwerte $\lambda = \pm i\omega$. Also bilden $\Re(e^{i\omega}) = \Re(\cos\omega + i\sin\omega) = \cos\omega$ und $\Im(e^{i\omega}) = \Im(\cos\omega + i\sin\omega) = \sin\omega$ eine Fundamentalsystem.

4.2. Reduktion der Ordnung, Produktansatz. Kennt man eine Lösung y_1 der homogenen DGL $L[y] = 0$, so kann man mit Hilfe des Ansatzes

$$y(x) = y_1(x)v(x) \tag{24}$$

die Ordnung der inhomogenen DGL $L[y] = f(x)$ um 1 verringern.

Bemerkung 3. Die Funktion y_1 muss „erraten“ werden. Erreicht man jedoch durch schrittweise Reduktion der Ordnung eine lineare DGL erster Ordnung, so kann man diese dann mit expliziten Formeln lösen.

4.2.1. *Herleitung der DGL kleinerer Ordnung.* Aus dem Produktansatz $y(x) = y_1(x)v(x)$ folgt aus der Produktregel und durch Ordnen nach Ableitungen der Funktion v:

$$y^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y_1^{(k-j)} v^{(j)}$$

$$\begin{aligned} L[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} &= \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y_1^{(k-j)} v^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^{n} v^{(j)} \left(\sum_{k=j}^{n} a_k(x) \binom{k}{j} y_1^{(k-j)} \right) = f(x) \end{aligned}$$

Der Koeffizient vor $v^{(n)}$ ist $a_n(x)y_1(x)$. Der Koeffizient vor $v^{(0)}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \binom{k}{0} y_1^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y_1^{(k)} = 0,$$

da y_1 eine Lösung der homogenen DGL $L[y] = 0$ ist. Also haben wir eine lineare DGL der Ordnung $n-1$ für die Funktion v' erhalten.

4.2.2. *Beispiel.* Gesucht sind alle Lösungen der DGL

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + (6x - x^3) y' + (x^2 - 6) y = x^4 e^x, \quad (x \neq 0).$$

Man sieht, dass $y_1(x) = x$ eine Lösung der homogenen DGL, denn $y_1'''(x) = y_1''(x) \equiv 0$ und $y_1'(x) \equiv 1$. Mit dem Ansatz $y(x) = xv(x)$ erhalten wir $y' = v + xv'$, $y'' = 2v' + xv''$ und $y''' = 3v'' + xv'''$. Setzt man dies in die DGL ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= L[y] \\ x^4 e^x &= x^3(3v'' + xv''') - 3x^2(2v' + xv'') + (6x - x^3)(v + xv') + (x^2 - 6)xv \\ &= x^4 v''' - x^4 v' \\ e^x &= v''' - v', \end{aligned}$$

eine lineare DGL zweiter Ordnung für v', die sogar konstante Koeffizienten hat. Da ihr charakteristisches Polynom $\lambda^2 - 1$ die Nullstellen $\lambda = \pm 1$ hat, bilden e^x und e^{-x} ein Fundamentalsystem. Der inhomogene Anteil $f(x) = e^x$ ist von der speziellen Form $e^{\alpha x}$ mit $\alpha = 1$. Da 1 ein einfacher Eigenwert ist, liegt einfache Resonanz vor und der Ansatz $v_s'(x) = bxe^x$ liefert eine spezielle Lösung der DGL $v''' - v' = e^x$:

$$\begin{aligned} v'' &= (b + bx)e^x \\ v''' &= (2b + bx)e^x \\ v''' - v' &= (2b + bx)e^x - bxe^x = 2be^x = e^x = f(x) \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Man erhält die spezielle Lösung $v_s'(x) = xe^x/2$ und die allgemeine Lösung

$$v'(x) = \frac{1}{2} xe^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

durch Integration

$$v(x) = \frac{1}{2}(x-1)e^x + c_1 e^x - c_2 e^{-x} + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

und wegen $y(x) = xv(x)$

$$y(x) = \frac{1}{2}(x-1)xe^x + c_1 xe^x - c_2 xe^{-x} + c_3 x = \frac{x^2}{2}e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x$$

mit $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

4.3. Eulersche Differentialgleichung. Eine **Eulersche** DGL ist eine lineare DGL der Form

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j y^{(j)} = f(x), \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad x > 0. \tag{25}$$

4.3.1. *Substitution $x = e^t$ - Umwandlung in DGL mit konstanten Koeffizienten.* Mit der Substitution $x(t) = e^t$ für $x > 0$, also $t = \ln x$, wird y eine Funktion, die auch von der Variablen t abhängt; $\tilde{y}(t) := y(e^t)$. Es folgt aus der Kettenregel, der Produktregel und $\frac{dx}{dt} = x'(t) = e^t = x(t)$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}'(t) &= y'(e^t)x'(t) = y'(e^t)e^t \\
\tilde{y}''(t) &= \frac{d}{dt}(y'(e^t)e^t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t \\
\tilde{y}^{(3)}(t) &= \frac{d}{dt}(y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t) = y^{(3)}(e^t)e^{3t} + 3y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t
\end{aligned}$$

und allgemein

$$\tilde{y}^{(j)}(e^t) = y^{(j)}(e^t)e^{jt} + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k \tilde{y}^{(k)}(e^t)e^{kt} = y^{(j)}(x)x^j + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k \tilde{y}^{(k)}(x)x^k$$

mit reellen Koeffizienten $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass die DGL (25) zu einer linearen inhomogenen DGL $\sum_{j=0}^{n} \tilde{a}_j \tilde{y}^{(j)} = f(e^t)$ mit *konstanten* Koeffizienten $\tilde{a}_j \in \mathbb{R}$ für die Funktion $\tilde{y}(t)$.

4.3.2. *Ansatz $y(x) = x^\lambda$ - charakteristisches Polynom.* Wir haben keine expliziten Formeln für die Koeffizienten α_k und $\tilde{a}_j$ hergeleitet, aber für eine Funktion $\tilde{y}_h(t)$, die die lineare, homogene DGL mit konstanten Koeffizienten löst, können wir den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ machen.

Wegen $t = \ln x$ bedeutet dies, dass für die Lösungen der homogenen Eulerschen DGL als Funktion von x der Ansatz

$$y_h(x) = e^{\lambda \ln x} = e^{\ln(x^\lambda)} = x^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{26}$$

möglich ist. Wegen $(x^\lambda)^{(j)} = x^{\lambda - j} \prod_{k=0}^{j-1}(\lambda - k)$ erhalten wir

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j y_h^{(j)}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^\lambda \prod_{k=0}^{j-1}(\lambda - k) = x^\lambda \sum_{j=0}^{n} a_j \prod_{k=0}^{j-1}(\lambda - k).$$

Die homogene Eulersche DGL $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j y_h^{(j)} = 0$ wird zu

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \prod_{k=0}^{j-1}(\lambda - k) = 0. \tag{27}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist ein Polynom vom Grad n in λ. Es ist das charakteristische Polynom, der homogenen DGL $\sum_{j=0}^{n} \tilde{a}_j \tilde{y}^{(j)} = 0$.

4.3.3. *Beispiel ohne Resonanz im inhomogenen Anteil.* Wir betrachten die Eulersche DGL $x^2y'' + xy' + 4y = x^2$, also $n = 2$, $a_2 = a_1 = 1$, $a_0 = 4$ und $f(x) = x^2$. Für die Lösungen der homogenen DGL $x^2y'' + xy' + 4y = 0$ führt der Ansatz $y_h(x) = x^\lambda$ zu

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i.$$

Dies bedeutet $\tilde{y}_h(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, also

$$y_h(x) = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x).$$

Der inhomogene Anteil ist $f(x) = x^2 = (e^t)^2 = e^{2t}$, also ein spezieller inhomogener Anteil $e^{\alpha t}$ mit $\alpha = 2$. Da 2 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, liegt keine Resonanz vor und der Ansatz $\tilde{y}_s(t) = ce^{2t} = cx^2 = y_s(x)$ mit einer noch zu bestimmenden reellen Zahl c liefert eine spezielle Lösung. Einsetzen in die DGL ergibt $c(2+2+4)x^2 = x^2$, also $c = 1/8$. Allgemeine Lösung dieser Eulerschen DGL ist

$$y(x) = \frac{1}{8}x^2 + c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4.3.4. *Beispiel mit Resonanz im inhomogenen Anteil.* Wir betrachten die Eulersche DGL $x^2y'' - xy' + y = x$, also $n = 2$, $a_2 = a_0 = 1$, $a_1 = -1$ und $f(x) = x$. Für die Lösungen der homogenen DGL $x^2y'' - xy' + y = 0$ führt der Ansatz $y_h(x) = x^\lambda$ zu

$$\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Da $\lambda = 1$ doppelte Nullstelle ist, gilt $\tilde{y}_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, also

$$y_h(x) = c_1 x + c_2 x \ln x.$$

Der inhomogene Anteil ist $f(x) = x = e^t$, also ein spezieller inhomogener Anteil $e^{\alpha t}$ mit $\alpha = 1$. Da 1 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, liegt doppelte Resonanz vor und der Ansatz $\tilde{y}_s(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)e^t$ mit noch zu bestimmenden $a_j \in \mathbb{R}$ liefert eine spezielle Lösung. Da wir eine beliebige homogene Lösung von y_s abziehen können, setzen wir $a_0 = a_1 = 0$ und der vereinfachte Ansatz $\tilde{y}_s(t) = a_2 t^2 e^t$ oder eben $y_s(x) = a_2 x (\ln x)^2$ liefert

$$\begin{aligned} x = x^2 y_s - x y_s + y_s &= a_2 x (\ln x)^2 - x a_2((\ln x)^2 + 2 \ln x) + x^2 a_2 (2x^{-1} \ln x + 2x^{-1}) \\ &= 2a_2 x, \end{aligned}$$

also $a_2 = 1/2$ und $y(x) = \frac{1}{2} x (\ln x)^2 + c_1 x + c_2 x \ln x$.

4.4. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wir betrachten lineare DGLen zweiter Ordnung in **Normalform**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{28}$$

mit stetigen Funktionen $p, q, r : (a, b) \to \mathbb{R}$. Wir versuchen diese DGL durch einen speziellen Ansatz oder eine geeignete Substitution in eine lineare DGL mit *konstanten* Koeffizienten oder eine Eulersche DGL zweiter Ordnung zu verwandeln, deren Lösung man dann leicht bestimmen kann. Ist diese Vereinfachung nicht möglich, so kann man einen Potenzreihen bzw. einen verallgemeinerten Potenzreihenansatz versuchen, wenn man annehmen kann, dass die gesuchte Lösungsfunktion in eine solche Reihe entwickelbar ist. Wir werden als wichtige Beispiele die Hermiteschen, Legendreschen und Besselschen DGLen untersuchen.

4.4.1. *Produktansatz.* Der Ansatz

$$y(x) = u(x)v(x) \tag{29}$$

mit noch unbekannten zweimal differenzierbaren Funktionen u, v liefert wegen der Produktregel $y' = u'v + uv'$ und $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$ und damit die neue lineare DGL zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} r &= quv + p(u'v + uv') + (u''v + 2u'v' + uv'') \\ &= uv'' + (pu + 2u')v' + (u'' + pu' + qu)v \end{aligned}$$

für die Funktion v, deren Koeffizienten noch von der unbekannten Funktion $u(x)$ abhängen.

Man kann u so wählen, dass der Koeffizient vor v' verschwindet, denn die homogene lineare DGL $p(x)u + 2u' = 0$ hat die die Lösung

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}. \tag{30}$$

Mit dieser Wahl von u und der Bezeichnung $\int p(x)dx = h(x)$ folgt $h'(x) = p(x)$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\frac{1}{2}p(x)e^{-\frac{1}{2}h(x)} = -\frac{1}{2}p(x)u(x) \\ u''(x) &= \left(\frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x)\right)e^{-\frac{1}{2}h(x)} = \left(\frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x)\right)u(x) \\ u'' + pu' + qu &= \left(-\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p' + q\right)u. \end{aligned}$$

Wir betrachten

$$K(x) := \frac{u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x)}{u(x)} = -\frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) + q(x). \tag{31}$$

- Wenn dieser Koeffizient $K(x) \equiv c$ konstant ist, so erhält man eine lineare DGL zweiter Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten für v:

$$v'' + cv = \frac{r(x)}{u(x)}. \tag{32}$$

- Ist der Koeffizient $K(x) = cx^{-2}$ mit $c \in \mathbb{R}$, so ergibt sich eine *Eulersche* DGL für v:

$$x^2v'' + cv = x^2\frac{r(x)}{u(x)}. \tag{33}$$

In beiden Fällen läßt sich die Funktion $v(x)$ mit den Formeln aus den anderen Abschnitten leicht bestimmen.

Beispiel: Wir betrachten die DGL $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = x^{3/2}$ für $x > 0$. Division durch x^2 führt zu der Normalform

$$y'' + x^{-1}y' + \left(1 - \frac{1}{4}x^{-2}\right)y = x^{-1/2},$$

also $p(x) = x^{-1}$, $q(x) = 1 - \frac{1}{4}x^{-2}$ und $r(x)x^{-1/2}$. Wir berechnen

$$K(x) = -\frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) + q(x) = -\frac{1}{4}x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-2} + 1 - \frac{1}{4}x^{-2} = 1.$$

Also führt der Produktansatz $y(x) = u(x)v(x)$ mit

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2}\int x^{-1}dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln x} = x^{-1/2}$$

zu der linearen DGL mit konstanten Koeffizienten

$$v'' + v = \frac{r(x)}{u(x)} = 1.$$

Ihr charakteristisches Polynom ist λ^2+1 und hat die komplexen Nullstellen $\lambda = \pm i$. Also gilt $v_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Eine spezielle Lösung $v_s(x) \equiv 1$ sieht man. Also ist $v(x) = 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x$ die allgemeine Lösung für v. Wegen des Produktansatzes folgt

$$y(x) = u(x)v(x) = x^{-1/2}(1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

4.4.2. *Substitution.* Wir suchen eine Substitution $t = \varphi(x)$ die die gegebene DGL für die Funktion $y(x)$ in eine einfachere DGL für die Funktion $u(t)$, die durch

$$u(t) = u(\varphi(x)) = y(x) \tag{34}$$

definiert ist, überführt. Die Funktion φ muss zweimal stetig differenzierbar sein und es muss $\varphi'(x) \neq 0$ für alle x gelten, so dass die Umkehrfunktion $x = \varphi^{-1}(t)$ existiert. Aus Produkt- und Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = u'\varphi' \\ y''(x) &= \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}(u'(t)\varphi'(x)) = \frac{d}{dx}(u'(t))\varphi'(x) + u'(t)\frac{d}{dx}(\varphi'(x)) \\ &= \frac{d^2u}{dt^2}(\varphi'(x))^2 + u'(t)\varphi''(x) = u''(t)\varphi'(x)^2 + u'(t)\varphi''(x). \end{aligned}$$

und eine lineare DGL für u, deren Koeffizienten von der Substitution φ abhängen: $r(x) = u''\varphi'(x)^2 + u'(\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x)) + q(x)u$. Da $\varphi'(x) \neq 0$, kann man die ganze Gleichung durch $\varphi'(x)^2$ dividieren und erhält die Normalform

$$u'' + \frac{\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x)}{\varphi'(x)^2}u' + \frac{q(x)}{\varphi'(x)^2}u = \frac{r(x)}{\varphi'(x)^2}.$$

Wenn man die Funktion φ so wählen kann, dass die Gleichungen

$$q(x) = c\varphi'(x)^2, \quad \varphi''(x) + p(x)\varphi'(x) = \tilde{c}\varphi'(x)^2 \tag{35}$$

für reelle Zahlen $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$ erfüllt sind, dann ergibt sich eine lineare DGL zweiter Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten für $u(t)$:

$$u'' + \tilde{c}u' + cu = \frac{r(x)}{\varphi'(x)^2}. \tag{36}$$

Beispiel: Wir betrachten die DGL

$$y'' + (4x - x^{-1})y' + 4x^2 y = 3xe^{-x^2}, \quad (x > 0),$$

also $p(x) = 4x - x^{-1}$, $q(x) = 4x^2$ und $r(x) = 3xe^{-x^2}$. Aus der Gleichung $q(x) = 4x^2 = c\varphi'(x)^2$ erhält man mit $c = 1$ die Substitution $\varphi'(x) = 2x$, also $\varphi(x) = x^2$. Tatsächlich gilt auch

$$\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x) = 2 + (4x - x^{-1})2x = 8x^2 = 2\varphi'(x)^2.$$

Also $\tilde{c} = 2$ und

$$u'' + 2u' + u = \frac{3}{4}x^{-1}e^{-x^2} = \frac{3}{4}t^{-1/2}e^{-t}.$$

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ und hat die doppelte Nullstelle $\lambda = -1$, die die Fundamentallösungen $u_1(t) = e^{-t}$ und $u_2(t) = te^{-t}$ liefern. Diese entsprechen den vektorwertigen Fundamentallösungen

$$\vec{u}_1(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$
$$\vec{u}_2(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} e^{-t}$$

des dazugehörigen Systems von zwei linearen DGLen erster Ordnung. Nun kann man mit Hilfe der Wronskideterminanten und der Formel

$$\vec{u}_s(t) = \vec{u}_1(t) \int \frac{W_1(t)}{W(t)} dt + \vec{u}_2(t) \int \frac{W_2(t)}{W(t)} dt$$

eine spezielle vektorwertige Lösung des inhomogenen Systems bestimmen, deren erste Komponente gerade eine Lösung $u_s(t)$ ist. Es gilt mit $\vec{b}(t) = (0, \frac{3}{4} t^{-1/2} e^{-t})^T$:

$$W(t) = \det(\vec{u}_1(t)\, \vec{u}_2(t)) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} e^{-2t}$$
$$W_1(t) = \det(\vec{b}(t)\, \vec{u}_2(t)) = \begin{vmatrix} 0 & t \\ \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{t}} & 1-t \end{vmatrix} e^{-2t} = -\frac{3}{4} t^{1/2} e^{-2t}$$
$$W_2(t) = \det(\vec{u}_1(t)\, \vec{b}(t)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{t}} \end{vmatrix} e^{-2t} = \frac{3}{4} t^{-1/2} e^{-2t}$$
$$\int \frac{W_1(t)}{W(t)} dt = -\frac{3}{4} \int t^{1/2} dt = -\frac{1}{2} t^{3/2}$$
$$\int \frac{W_2(t)}{W(t)} dt = \frac{3}{4} \int t^{-1/2} dt = \frac{3}{2} t^{1/2}$$
$$\vec{u}_s(t) = -\frac{1}{2} t^{3/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{3}{2} t^{1/2} \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} e^{-t}$$
$$u_s(t) = e^{-t} t^{3/2}.$$

Mit $t = x^2$ erhalten wir $y(x) = u(x^2) = (x^3 + c_1 + c_2 x^2) e^{-x^2}$.

4.4.3. *Potenzreihenansatz.* Wenn die Koeffizientenfunktionen $p(x)$, $q(x)$ und $r(x)$ der DGL $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ um einen Punkt x_0 in Potenzreihen entwickelbar sind, die für alle x mit $|x - x_0| < R$ konvergieren, dann kann man davon ausgehen, dass sich auch die Lösung $y(x)$ um x_0 in eine Potenzreihe entwickeln läßt und diese für alle x mit $|x - x_0| < R$ gegen die Lösung $y(x)$ konvergiert.

Wir betrachten hier $x_0 = 0$. Es seien

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \tag{37}$$

die Potenzreihen der Koeffizientenfunktionen. Wir nehmen an, dass der Konvergenzradius jeder der drei Reihen $\geq R > 0$ ist. Mit dem Ansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{38}$$

erhalten wir

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$

Aus dem Cauchyschen Produktsatz folgt

$$y(x)q(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right) x^n$$
$$y'(x)p(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} p_{n-k}\right) x^n$$

und die DGL wird zu

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right) x^n.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt für $n \geq 2$ sich die *Rekursionsformel*

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(r_n - \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right). \tag{39}$$

Die Koeffizienten a_0 und a_1 kann man frei wählen, alle anderen a_n sind dann durch die Rekursionsformel eindeutig bestimmt. Es gilt $y(0) = a_0$ und $y'(0) = a_1$. Die Wahl der Koeffizienten a_0 und a_1 entspricht also der Festlegung einer Anfangsbedingung.

Jede durch die Rekursionsformel (39) definierte Potenzreihe hat einen Konvergenzradius $\geq R$.

4.4.4. *Hermitesche Differentialgleichung.* Wir betrachten die homogene DGL $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Hier sind $p(x) = -2x$, $q(x) = \lambda$ und $r(x) \equiv 0$. Bis auf $p_1 = -2$ und $q_0 = \lambda$ verschwinden alle p_n, q_n und r_n. Die Rekursionsformel wird zu

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(2na_n - \lambda a_n) = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

Aus dieser rekursiven Formel erhält man die expliziten Formeln

$$a_{2m+2} = \frac{a_0}{(2m+2)!}\prod_{j=0}^{m}(4j - \lambda), \quad a_{2m+3} = \frac{a_1}{(2m+3)!}\prod_{j=0}^{m}(4j + 2 - \lambda).$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

4.4.5. *Legendre Differentialgleichung.* Wir betrachten die lineare, homogene DGL $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$ mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Um sie in Normalform zu bringen, muss man durch $(1 - x^2)$ dividieren. Dies ist für $-1 < x < 1$ möglich:

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2} y' + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1 - x^2} y = 0$$

Hier gilt $r(x) \equiv 0$ und aus der Summenformel für die geometrische Reihe folgt

$$q(x) = \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda(\lambda+1)x^{2m},$$
$$p(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = -2x\sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} -2x^{2m+1}.$$

Aus der Rekursionsformel erhält man

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(-\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right).$$

Wir unterscheiden die Fälle $n = 2m$ und $n = 2m+1$ und leiten daraus explizite Formeln für die Koeffizienten a_n ab:

$$\begin{aligned}
a_{2m+2} &= \frac{1}{(2m+2)(2m+1)}\left(\sum_{j=0}^{m} 2(2j)a_{2j} - a_{2j}\lambda(\lambda+1)\right)\\
&= \frac{4m-\lambda(\lambda+1)}{(2m+2)(2m+1)}a_{2m} + \frac{1}{(2m+2)(2m+1)}\sum_{j=0}^{m-1}(2(2j)a_{2j} - a_{2j}\lambda(\lambda+1))\\
&= \frac{4m-\lambda(\lambda+1)}{(2m+2)(2m+1)}a_{2m} + \frac{2m(2m-1)}{(2m+2)(2m+1)}a_{2m}\\
&= \frac{4m-\lambda^2+\lambda+4m^2-2m}{(2m+2)(2m+1)}a_{2m} = -\frac{(\lambda-2m)(\lambda+2m+1)}{(2m+2)(2m+1)}a_{2m}\\
&= \frac{a_0}{(2m+2)!}(-1)^m\prod_{j=0}^{m}(\lambda-2j)(\lambda+2j+1)\\
a_{2m+3} &= \frac{1}{(2m+3)(2m+2)}\left(\sum_{j=0}^{m} 2(2j+1)a_{2j+1} - a_{2j+1}\lambda(\lambda+1)\right)\\
&= \frac{4m+2-\lambda(\lambda+1)}{(2m+3)(2m+2)}a_{2m+1} + \frac{2m(2m+1)}{(2m+3)(2m+2)}a_{2m+1}\\
&= \frac{4m+2-\lambda^2+\lambda+4m^2+2m}{(2m+3)(2m+2)}a_{2m+1}\\
&= -\frac{(\lambda-(2m+1))(\lambda+2m+2)}{(2m+3)(2m+2)}a_{2m+1}\\
&= \frac{a_1}{(2m+3)!}(-1)^m\prod_{j=0}^{m}(\lambda-(2j+1))(\lambda+2j+2)
\end{aligned}$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle x mit $|x| < 1$ konvergiert.

4.4.6. *Verallgemeinerter Potenzreihenansatz - Besselsche DGL.* Hat eine der Koeffizientenfunktionen der DGL $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ in $x = \xi$ ein Singularität, kann der Ansatz

$$y(x) = x^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \rho \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0 \tag{40}$$

zu einer Rekursionsformel für die Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ der Potenzreihenentwicklung einer Lösung führen. Wir betrachten diese Methode für die *Besselsche DGL*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0, x > 0. \tag{41}$$

Die Koeffizientenfunktionen der dazugehörigen Normalform

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right) y = 0$$

lassen sich um $x = 0$ nicht in eine Potenzreihe entwickeln. Mit dem verallgemeinerten Potenzreihenansatz $y(x) = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ erhält man

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\rho) x^{n+\rho-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\rho)(n+\rho-1) x^{n+\rho-2}$$

und die Gleichung (41) wird zu

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\rho} a_n ((n+\rho)^2 - \lambda^2) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\rho+2}.$$

- Vergleich der Koeffizienten vor x^ρ ergibt die Bedingung $\rho^2 - \lambda^2 = 0$, weil $a_0 \neq 0$, also $\rho = \pm\lambda$.
- Vergleich der Koeffizienten vor $x^{\rho+1}$ ergibt die Bedingung $a_1(1+2\rho) = 0$. Falls $\rho = -1/2$, so ist diese Bedingung erfüllt. Aber für $\lambda = 1/2$ haben wir ein Fundamentalsystem schon mit Hilfe des Produktansatzes (siehe Abschnitt 4.4.1) bestimmt. Falls $\lambda \neq 1/2$, so folgt $a_1 = 0$.
- Für $n \geq 2$ liefert der Koeffizientenvergleich vor $x^{n+\rho}$ liefert die Rekursionsformel $0 = a_n n(n+2\rho) + a_{n-2}$.
  - Falls $-2\rho \notin \mathbb{N}$, so ist der Faktor $n + 2\rho \neq 0$ fur alle $n \in \mathbb{N}$ und die Rekursionsformel liefert $a_{2m+1} = 0$, da $a_1 = 0$, und $a_{2m} 4m(m+\rho) = -a_{2m-2}$, also
  $$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{4^m m! \prod_{j=1}^{m} (j+\rho)}.$$
  - Auch für $-\rho \notin \mathbb{N}$ aber $-2\rho \in \mathbb{N}$ löst die mit den oben definierten Koeffizienten a_n definierte Potenzreihe die Besselsche DGL.
  - Falls $-\rho \in \mathbb{N}$, so folgt aus der Rekursionsformel $a_0 = 0$, was der Annahme $a_0 \neq 0$ widerspricht. Ein anderer Ansatz liefert die Neumann-Funktion, eine zweite linear unabhängige Lösung der Besselschen DGL mit $\lambda = -\rho$.

4.5. Randwertaufgaben und Eigenwertaufgaben. Wir haben bisher Anfangswertaufgaben (AWA) untersucht, also eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung und Anfangsbedingungen $y^{(j)}(\xi) = \eta_j$ für $j = 0, \dots, n-1$ und $\xi, \eta_j \in \mathbb{R}$. Betrachtet man die gegebene DGL auf einem Intervall $[a, b]$, so ist auch es sinnvoll, die Anfangsbedingungen durch Vorgaben für die Werte der Lösungsfunktion $y(x)$ oder ihrer Ableitungen $y^{(j)}$ an den Rändern des Intervalls zu ersetzen.

Eine Anfangswertaufgabe einer linearen DGL n-ter Ordnung ist immer eindeutig lösbar, weil aus $W(\xi) \neq 0$ folgt, dass das lineare Gleichungssystem $y^{(j)}(\xi) = y_s^{(j)}(\xi) + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(j)}(\xi) = \eta_j$ mit $j = 1, \dots, n$ für die reellen Parameter c_k eindeutig lösbar ist.

Auch wenn die allgemeine Lösung einer linearen DGL n-ter Ordnung von n reellen Parametern abhängt, kann eine dazugehörige Randwertaufgabe mit n Randwertbedingungen nicht, eindeutig oder mehrdeutig lösbar sein.

4.5.1. *Fundamentalbeispiel einer nicht lösbaren Randwertaufgabe.* Gesucht sind alle Lösungen der DGL $y''+y=0$ mit $y(0)=0$ und $y(\pi)=1$. Die allgemeine Lösung dieser homogenen linearen DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$ mit $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, da ihr charakteristisches Polynom λ^2+1 die beiden komplexen Nullstellen $\lambda=\pm i$ hat.

Aus den Randwertbedingungen erhalten wir die Gleichungen $0=y(0)=c_1$ und $1=y(\pi)=-c_1$. Das ist ein Widerspruch. Die Randwertaufgabe ist nicht lösbar.

4.5.2. *Fundamentalbeispiel einer mehrdeutig lösbaren Randwertaufgabe.* Man sucht alle Lösung der DGL $y''+y=0$ mit $y(0)=0=y(\pi)$. Die allgemeine Lösung dieser DGL ist $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$ mit $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, da ihr charakteristisches Polynom λ^2+1 die beiden komplexen Nullstellen $\lambda=\pm i$ hat.

Aus den Randwertbedingungen erhalten wir die Gleichungen $0=y(0)=c_1$ und $0=y(\pi)=-c_1$, also $c_1=0$. Die Randwertaufgabe besitzt die Lösungen $y(x)=c_2\sin x$ mit $c_2\in\mathbb{R}$.

4.5.3. *Homogene Randbedingungen.* Auswertung der Randbedingungen einer linearen DGL n-ter Ordnung, deren allgemeine Lösung von n reellen Parametern abhängt, liefert ein lineares Gleichungssystem.

Randbedingungen einer linearen DGL n-ter Ordnung heißen **homogen**, wenn sie von der folgenden Form sind:

$$0=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k y^{(k)}(a)+\beta_k y^{(k)}(b),\quad \alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}$$

Die Randwertbedingungen im Beispiel in Abschnitt 4.5.1 sind nicht homogen. Die Randwertbedingungen im Beispiel in Abschnitt 4.5.2 sind homogen.

Homogene lineare DGLen mit homogenen Randbedingungen haben immer die triviale Lösung $y(x)\equiv 0$. Eine nichttriviale Lösung existiert genau dann, wenn das lineare Gleichungssystem bestehend aus den Gleichungen der Form

$$\sum_{j=1}^{n}c_j\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k y_j^{(k)}(a)+\beta_k y_j^{(k)}(b)=0$$

eine nichttriviale Lösung besitzt, die Determinante seiner Koeffizientenmatrix also verschwindet.

Beispiel: Wir betrachten die Randwertaufgabe $y''+\mu^2y=0$ mit den homogenen Randwertbedingungen $y(0)-y(1)=0$ und $y'(0)-y'(1)=0$ für $\mu\in\mathbb{R}$ auf dem Intervall $[0,1]$. Die allgemeine Lösung dieser homogenen linearen DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist $y(x)=c_1\cos(\mu x)+c_2\sin(\mu x)$ mit $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, da ihr charakteristisches Polynom $\lambda^2+\mu^2$ die beiden komplexen Nullstellen $\lambda=\pm i\mu$ hat.

Es gilt $y'(x)=-c_1\mu\sin(\mu x)+c_2\mu\cos(\mu x)$ Die Auswertung der Randbedingungen führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}0&=c_1(1-\cos\mu)-c_2\sin\mu\\0&=c_1\mu\sin\mu+c_2\mu(1-\cos\mu).\end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1-\cos\mu & -\sin\mu \\ \mu\sin\mu & \mu(1-\cos\mu) \end{pmatrix}$$

hat die Determinante $\det A = \mu((1-\cos\mu)^2+\sin^2\mu) = \mu(2-2\cos\mu) = 2\mu(1-\cos\mu)$. Es gilt genau dann $\det A = 0$, wenn $1 = \cos\mu$, also $\mu = 2k\pi$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. In dem Fall gilt $A = 0$ und alle Funktionen $y_k(x) = c_1\cos(2k\pi x) + c_2\sin(2k\pi x)$ sind Lösungen der Randwertaufgabe.

4.5.4. *Eigenwertaufgaben, Eigenwerte und Eigenfunktionen.* Eine **Eigenwertaufgabe** (EWA) besteht aus einer homogenen linearen DGL, die von einem Parameter μ abhängt, und homogenen Randwertbedingungen. Alle $\mu \in \mathbb{R}$, für die die EWA eine nichttriviale Lösung besitzt, heißen **Eigenwerte** der EWA, die dazugehörigen Lösungen heißen **Eigenfunktionen**.

4.5.5. *Fundamentalbeispiel einer Eigenwertaufgabe.* Wir betrachten die Randwertaufgabe $y''+\mu y = 0$ mit den homogenen Randwertbedingungen $y(0) = y(l) = 0$ und für $\mu \in \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[0,l]$ mit $l > 0$. Die allgemeine Lösung dieser homogenen linearen DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hängt vom Vorzeichen des Parameters μ ab:

$\mu > 0$: Die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_1\cos(\sqrt{\mu}x)+c_2\sin(\sqrt{\mu}x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, da das charakteristische Polynom $\lambda^2 + \mu$ die beiden komplexen Nullstellen $\lambda = \pm i\sqrt{\mu}$ hat. Die Auswertung der Randbedingungen führt zu dem linearen Gleichungssystem $0 = c_1$ und $0 = c_2\sin(\sqrt{\mu}l)$. Es besitzt nur genau dann nichttriviale Lösungen, falls $\sin(\sqrt{\mu}l) = 0$, also $\sqrt{\mu}l = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Die Eigenwerte und dazugehörige Eigenfunktionen sind

$$\mu = \frac{k^2}{l^2}\pi^2, \quad y_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

$\mu = 0$: Die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_1 + c_2x$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, da das charakteristische Polynom λ^2 die doppelte reelle Nullstelle $\lambda = 0$ hat. Die Auswertung der Randbedingungen führt zu dem linearen Gleichungssystem $0 = c_1$ und $0 = c_2l$. Es besitzt nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = 0$.

$\mu < 0$: Die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_1e^{\sqrt{-\mu}x} + c_2e^{-\sqrt{-\mu}x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, da das charakteristische Polynom $\lambda^2 + \mu$ die beiden reellen Nullstellen $\lambda = \pm\sqrt{-\mu}$ hat. Die Auswertung der Randbedingungen führt zu dem linearen Gleichungssystem $0 = c_1 + c_2$ und $0 = c_1e^{\sqrt{-\mu}l} + c_2e^{-\sqrt{-\mu}l}$. Es besitzt nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = 0$, denn die Determinante der Koeffizientenmatrix ist $e^{-\sqrt{-\mu}l} - e^{\sqrt{-\mu}l} = 2\sinh(-\sqrt{-\mu}l) \neq 0$ für $-\sqrt{-\mu}l \neq 0$.

5. Reduktion auf Systeme erster Ordnung

Wir haben bereits gesehen, dass sich lineare DGLen n-ter Ordnung in ein lineares System von DGLen erster Ordnung umwandeln lassen (siehe Abschnitt 4). Jedes System von DGLen höherer Ordnung läßt sich in ein System erster Ordnung überführen, dabei steigt jedoch die Anzahl der unbekannten (reellwertigen) Funktionen.

Sei $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = y^{(n)}$ eine explizite DGLen n-ter Ordnung. Wir definieren $y_j(x) := y^{(j-1)}(x)$ für $j = 1, \ldots, n$ und erhalten

$$\begin{aligned} y_j' &= (y^{(j-1)})' = y^{(j)} = y_{j+1}, \quad (j = 1, \ldots, n-1) \\ y_n' &= y^{(n)} = f(x, y_1, \ldots, y_n), \end{aligned}$$

ein äquivalentes System aus n DGLen erster Ordnung für n unbekannte Funktionen y_j mit $j = 1, \ldots, n$.

Hat man ein System aus DGLen höherer Ordnung gegeben, in dem die Funktionen y_k für $k = 1, \ldots, m$ und ihre Ableitungen $y_k^{(j)}$ mit $j = 0, \ldots, n_k$ auftreten, so definiert man neue Funktionen $y_{kj} := y_k^{(j-1)}$ für $j = 1, \ldots, n_k$. Diese erfüllen dann ein äquivalentes System aus DGLen erster Ordnung.

Beispiel: Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} u'' &= -u + 3v - 2u' + 3v' \\ v'' &= u + v + u', \end{aligned}$$

das aus zwei linearen DGLen zweiter Ordnung für die unbekannten Funktionen u und v besteht. Wir definieren $y_{11} = u$, $y_{12} = u'$, $y_{21} = v$ und $y_{22} = v$ und erhalten das lineare System

$$\begin{aligned} y_{11}' &= y_{12} \\ y_{12}' &= -y_{11} + 3y_{21} - 2y_{12} + 3y_{22} \\ y_{21}' &= y_{22} \\ y_{22}' &= y_{11} + y_{21} + y_{12}. \end{aligned}$$

KAPITEL 2

Partielle Differentialgleichungen

Eine partielle Differentialgleichung (PDGL) für eine gesuchte reellwertige Funktion $u : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ von n Veränderlichen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ist eine Gleichung der Form

$$F\left(\vec{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u, \dots\right) = 0.$$

Die hier benutzte Multiindexschreibweise für partielle Ableitungen höherer Ordnung bedeutet mit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$ und $|\alpha| = \sum_{j=0}^n \alpha_j$ gerade

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u\right).$$

Man bildet eine partielle Ableitung $|\alpha|$-ter Ordnung und leitet nach der Variable x_j genau α_j mal ab.

Oft verwenden wir die Bezeichnungen $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, z.B. wenn die gesuchte Funktion von den Ortskoordinaten abhängt, oder $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, t)$, z.B. wenn die gesuchte Funktion den zeitlichen Verlauf einer Größe beschreibt, die von ebenen Ortskoordinaten (x, y) abhängt.

Eine **lineare** PDGL der Ordnung m ist von der Form

$$f(\vec{x}) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(\vec{x}) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u,$$

wobei die Funktionen f und a_α gegeben sind. Wir betrachten hier nur lineare PDGL. Eine lineare PDGL heißt **homogen**, falls $f \equiv 0$. Ähnlich wie für gewöhnliche Differentialgleichungen gilt $u = u_s + u_h$, also eine allgemeine Lösung u einer linearen inhomogenen PDGL ist Summe einer speziellen Lösung u_s der inhomogenen PDGL und der allgemeinen Lösung u_h der homogenen PDGL.

1. Einfache Beispiele - Lösung durch Integration

1.1. Integration nach einer Variablen. Zu einer beliebigen, stetigen, gegeben Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind alle Funktionen $u(x, y)$ gesucht, die die Gleichung

$$u_x(x, y) = f(x, y)$$

erfüllen. Die allgemeine Lösung findet man durch Integration nach x, also $u(x, y) = \int f(x, y)dx + c(y)$ mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $f(x, y) = 2xy^2$ ergibt sich zum Beispiel die allgemeine Lösung $u(x, y) = x^2y^2 + c(y)$.

1.2. Integration nach zwei Variablen in beliebiger Reihenfolge. Gesucht sind alle Funktionen $u(x,y)$, die die Gleichung

$$u_{xy}(x,y) = 0$$

erfüllen. Integriert man erst nach y und dann nach x, so erhält man:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \int 0 dy + c_1(x) = c_1(x) \\ u(x,y) &= \int c_1(x) dx + c_2(y) = C_1(x) + C_2(y), \end{aligned}$$

wobei C_1 und C_2 beliebige (differenzierbare) Funktionen sind.

1.3. Integration nach zwei Variablen in spezieller Reihenfolge. Gegeben sind stetige Funktionen $a, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Gesucht sind alle Funktionen $u(x,y)$, die die Gleichung

$$u_{xy} + a(x,y)u_x = f(x,y)$$

erfüllen. Wir bestimmen zuerst die Funktion $u_x(x,y)$. Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $v(y) := u_x(x,y)$, eine Funktion, die nur von einer Variablen abhängt, und der gewöhnlichen linearen DGL erster Ordnung $v' + a(x,y)v = f(x,y)$ genügt. Mit Hilfe der Lösungsformel ergibt sich für festes $x \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung $v(y) = cv_h(y) + v_s(y)$ mit

$$v_h(y) = e^{-\int a(x,y)dy}, \quad v_s(y) = v_h(y) \int \frac{f(x,y)}{v_h(x,y)} dy.$$

Läßt man nun x wieder frei, so folgert man $u_x(x,y) = c(x)v_h(x,y) + v_s(x,y)$, denn in die Definition der Funktionen v_h und v_s geht der feste Parameter x ein. Nun folgt durch Integration nach x, dass die allgemeine Lösung durch

$$u(x,y) = \int c_1(x)v_h(x,y) + v_s(x,y) dx + c_2(y)$$

mit beliebigen Funktionen c_1, c_2 gegeben ist.

2. Eindimensionale Wellengleichung

Die *eindimensionale Wellengleichung* ist

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), \quad c \in \mathbb{R}, c \neq 0, \tag{42}$$

mit gegebener Funktion $f(x,t)$ und gesuchter Funktion $u(x,t)$. Es handelt sich um eine inhomogene lineare PDGL zweiter Ordnung.

2.1. Umwandlung in integrierbare PDGL durch Substitution. Mit der Substitution $\xi := x - ct$ und $\tau := x + ct$ folgt aus der Kettenregel und $u_{tx} = u_{xt}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\xi + \tau) \\ t &= \frac{1}{2c}(\tau - \xi) \\ U(\xi,\tau) &:= u(\tfrac{1}{2}(\xi+\tau), \tfrac{1}{2c}(\tau - \xi)) \\ U_\xi &= u_x \frac{1}{2} - u_t \frac{1}{2c} \\ U_{\xi\tau} &= -\frac{1}{2}\left(u_{xx}\frac{1}{2} + u_{xt}\frac{1}{2c}\right) - \frac{1}{2c}\left(u_{tx}\frac{1}{2} + u_{tt}\frac{1}{2c}\right) = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c^2}u_{tt} \end{aligned}$$

$-4c^2 U_{\xi\tau} = u_{tt} - c^2 u_{xx}.$

Schreiben wir auch f als von ξ und τ abhängige Funktion, also

$$F(\xi, \tau) := f(\frac{1}{2}(\xi + \tau), \frac{1}{2c}(\tau - \xi)),$$

so kann die allgemeine Lösung U der Differentialgleichung $U_{\xi\tau} = F(\xi, \tau)$ durch Integration bestimmen.

2.2. Allgemeine Lösung der Wellengleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen PDGL $U_{\xi\tau} = 0$ ist $U_h(\xi, \tau) = C_1(\xi) + C_2(\tau)$ mit beliebigen Funktionen C_1, C_2 (siehe Beispiel in Abschnitt 1.2). Eine spezielle Lösung ist

$$U_s(\xi, \tau)) = -\frac{1}{4c^2} \iint F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \tag{43}$$

Nun werden ξ und τ wieder durch x und t ausgedrückt. Die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung ist

$$u(x, t) = U_s(x - ct, x + ct) + C_1(x - ct) + C_2(x + ct) \tag{44}$$

mit zwei beliebigen Funktionen C_1, C_2.

Bemerkung 4. Benutzt man die Schreibweise der partiellen Differentialoperatoren, so gilt $u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\frac{\partial}{\partial t})^2 u - c^2 (\frac{\partial}{\partial x})^2 u = (\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})u$ und die neuen Koordinaten ξ und τ sind dual zu den Faktoren.

2.3. Homogene Wellengleichung mit Anfangsbedingungen. Nun betrachten wir die homogene Wellengleichung mit Anfangsbedingungen:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = \phi(x),\, u_t(x, t) = \psi(x), \tag{45}$$

mit gegebenen Funktionen ϕ und ψ und einer gesuchten Funktion $u(x, t)$. Die allgemeine Lösung der PDGL $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ist $u(x, t) = C_1(x - ct) + C_2(x + ct)$ mit beliebigen Funktionen C_1, C_2. Dann gilt $u_t(x, t) = -cC_1'(x - ct) + cC_2'(x + ct)$.

Durch Auswertung der Anfangsbedingungen erhält man ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Funktionen C_1 und C_2:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= u(x, 0) = C_1(x) + C_2(x) \\ \psi(x) &= u_t(x, t) = -cC_1'(x) + cC_2'(x). \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt durch Integration $-C_1(x) + C_2(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} \psi(s) ds$. Nun löst man das Gleichungssystem und erhält

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} \psi(s) ds = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_{x}^{x_0} \psi(s) ds \\ C_2(x) &= \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} \psi(s) ds. \end{aligned}$$

Aus der Formel für die allgemeine Lösung folgt die eindeutige Lösung:

$$u(x, t) = C_1(x - ct) + C_2(x + ct) = \frac{1}{2}(\phi(x - ct) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \tag{46}$$

Bemerkung 5. Der Funktionswert $u(x, t)$ hängt nur von $\phi(x - ct)$, $\phi(x + ct)$ und den Werten der Funktion ψ auf dem Intervall $[x - ct, x + ct]$ ab.

3. Nebenbedingungen

Wir beschreiben verschiedene Typen von Nebenbedingungen für eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$, die Lösung einer PDGL ist.

3.1. Anfangsbedingungen. Gesucht ist eine Funktion $u(x,t)$ für $t \geq t_0$. Anfangswertbedingungen sind Vorgaben für die Werte der gesuchten Funktion u und ihrer partiellen Ableitungen nach t, wie u_t, zum Zeitpunkt $t = t_0$ (siehe Abschnitt 2 und Abbildung 1a).

3.2. Cauchy- oder Dirichletbedingungen. Für eine Lösung $u : D \to \mathbb{R}$ betrachtet man die Integralfläche $\{(x, y, u(x,y))^T : (x,y)^T \in D\} \subset \mathbb{R}^3$, eine Fläche im $\mathbb{R}^3$. Man spricht von einer Cauchybedingung, wenn eine vorgegebene Kurve $C \subset \mathbb{R}^3$ in der Integralfläche enthalten sein soll. Ist die Kurve C geschlossen, so nennt man eine Cauchybedingung auch Dirichletbedingung.

Zum *Beispiel* hat die Lösung einer zweidimensionalen Wellengleichung, deren Integralfläche die Kurve $C = \{(x,y,0)^T : x^2 + y^2 = 1\}$ enthält, also der Cauchybedingung genügt, entlang der Kreislinie $\{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ den Wert 0 (siehe Abbildung 1b).

3.3. Neumannbedingungen. Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \subset D \to \mathbb{R}$. Das Gebiet D wird von einer glatten Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ berandet. Es sei $\vec{n}$ der nach außen gerichtete Normalenvektor der Kurve C. Vorgaben für die Richtungsableitung

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_C = f(x,y)|_C$$

entlang der Kurve (des Randes) C heißen Neumannbedingungen (siehe Abbildung 1c).

3.4. Rand–Anfangswertbedingungen. Gesucht ist eine Funktion $u(x,t)$ mit $x \in [a,b]$ und $t \geq t_0$. Rand- und Anfangswertbedingungen sind Vorgaben für die Werte der gesuchten Funktion u oder ihrer partiellen Ableitungen für Argumente in

$$\{(x,t_0) : x \in [a,b]\} \cup \{(a,t) : t \geq t_0\} \cup \{(b,t) : t \geq t_0\},$$

also zum Zeitpunkt t_0 und zu einem beliebigen Zeitpunkt an den Rändern des interessanten Intervalls für die Koordinate x (siehe Abbildung 1d).

3.5. Sachgemäß gestellte Probleme. Hat man eine PDGL mit Nebenbedingungen gegeben, so hofft man, dass

- eine lokale Lösung *existiert*,
- diese lokale Lösung *eindeutig* ist,
- die Lösung *stetig* von der Wahl der Nebenbedingung *abhängt*.

Bemerkung 6. Die eindimensionale Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ mit einer Dirichletnebenbedingung ist oft nicht lösbar. Wenn u eine Lösung der Laplacegleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ mit einer Neumannbedingung $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \equiv 0$ ist, so ist auch $u + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

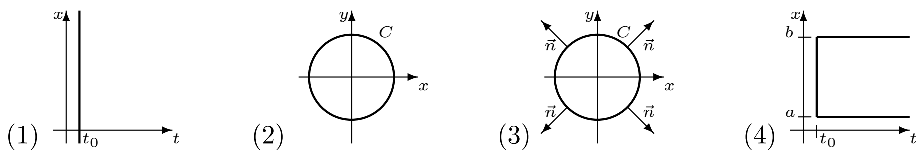

Abbildung 1. Nebenbedingungen partieller Differentialgleichungen

4. Satz von Cauchy-Kovalevskaja

Wir betrachten die PDGL

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} u = f(\vec{x}, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, \ldots),$$

wobei die Funktion f von $\vec{x}$ und partiellen Ableitungen der Funktion $u(\vec{x}, t)$ der Ordnung $\leq n$, jedoch nicht von $\frac{\partial^n}{\partial t^n} u$ abhängt, mit den Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(\vec{x}, 0) = \phi_k(\vec{x}), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Wenn f und ϕ_k um $(\vec{x}_0, 0)^T$ analytisch (also in eine Potenzreihe entwickelbar) sind, dann *existiert* eine *eindeutige* lokale analytische Lösung $u(\vec{x}, t)$ des Anfangswertproblems.

4.1. Beweisidee: Läßt sich die gesuchte Lösung bezüglich t in eine Potenzreihe

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(\vec{x}, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k(x)$$

entwickeln, so folgt aus den Anfangsbedingungen $a_k(x) = \phi_k(x)$ für $k = 0, \ldots, n-1$ und aus der PDGL eine Rekursionsformel für a_k mit $k \geq n$. Mit der (sehr technischen) Methode der Majoranten beweist man, dass die so konstruierte Reihe auf einer offenen Menge um den Startpunkt $(x_0, 0)^T$ konvergiert.

4.2. Gegenbeispiel: Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ für $x \in (-1, 1)$ und $t > 0$ mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Dieses Problem erfüllt die Voraussetzungen des Satzes nicht, weil u_{xx} eine partielle Ableitung zweiter Ordnung ist und u_t nur eine erster Ordnung.

Ein Potenzreihenansatz führt nun zu

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(\vec{x}, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k(x) \\
u_t(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} a_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_{k+1}(x) \\
u_{xx}(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k(x)'',
\end{aligned}$$

also $a_0(x) = \frac{1}{1-x}$ und $a_k(x) = a_{k-1}(x)'' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-2k)!} x^{n-2k}$. Mit diesen Werten für die Koeffizientenfunktionen a_k erhält man

$$u(0,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (2k)!.$$

Doch diese Potenzreihe in t hat den Konvergenzradius 0, konvergiert also nur für $t = 0$ und liefert keine Definition einer Funktion $u(x,t)$ in einer offenen Umgebung des Startpunktes $(0,0)^T$.

5. Quasilineare PDGL erster Ordnung

Eine PDGL für eine Funktion $u(x,y)$ der Form

$$a_1(x,y,u)u_x + a_2(x,y,u)u_y = b(x,y,u) \tag{47}$$

mit gegebenen stetigen Funktionen a_1, a_2, b heißt **quasilineare** PDGL.

Falls a_1 und a_2 nicht von u abhängen und $b(x,y,u) = b_1(x,y) + b_2(x,y)u$, so ist es sogar eine *lineare* PDGL.

Die allgemeine Form einer quasilinearen PDGL einer gesuchten Funktion $u(\vec{x})$ ist

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\vec{x},u) u_{x_j} = b(\vec{x},u)$$

mit gegebenen stetigen Funktionen $a_j, b : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

5.1. Charakteristisches System. Das folgende System besteht aus drei gewöhnlichen DGLen erster Ordnung und ist äquivalent zur PDGL (47). Es wird **charakteristisches System** genannt.

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= a_1(x(t),y(t),u(t)) \\
\dot{y}(t) &= a_2(x(t),y(t),u(t)) \\
\dot{u}(t) &= b(x(t),y(t),u(t))
\end{aligned}$$

5.1.1. *Beweis der Äquivalenz des charakteristischen Systems.* Wenn $x(t)$ und $y(t)$ das charakteristische System erfüllen und $u(x,y)$ die PDGL (47) löst, dann definieren wir $U(t) := u(x(t),y(t))$. Es gilt $U' = u_x\dot{x} + u_y\dot{y} = u_x a_1 + u_y a_2 = b$ und $u(t) = u(x(t),y(t))$ löst auch das charakteristische System.

Wenn die Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und $u(t)$ das charakteristische System lösen, dann definiert $\gamma(t) = (x(t),y(t),u(t))^T$ eine Kurve im $\mathbb{R}^3$. Die (Spur dieser) Kurve kann auch durch Gleichungen beschrieben werden. Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $\phi(x(t),y(t),u(t)) = 0$. Falls $\phi_u \neq 0$, so kann man diese Gleichung (lokal) nach u umstellen und die Gleichung $\phi(x,y,u) = 0$ definiert implizit eine Funktion $u(x,y)$. Nun folgt durch Ableitung der Gleichung $\phi = 0$ nach x, y bzw. t:

$$\begin{aligned}
0 &= \phi_x + \phi_u u_x \quad \Rightarrow \phi_x = -\phi_u u_x \\
0 &= \phi_y + \phi_u u_y \quad \Rightarrow \phi_y = -\phi_u u_y \\
0 &= \phi_x\dot{x} + \phi_y\dot{y} + \phi_u\dot{u} \\
\phi_u b &= \phi_u a_1(x,y,u)u_x + \phi_u a_2(x,y,u)u_y \\
b &= a_1(x,y,u)u_x + a_2(x,y,u)u_y,
\end{aligned}$$

weil die Funktionen x, y, u das charakteristische System lösen und $\phi_u \neq 0$. Also ist die implizit definierte Funktion $u(x, y)$ eine Lösung der PDGL (47).

5.1.2. *Erste Integrale und allgemeine Lösung der quasilinearen PDGL.* Eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ heißt **Integral** des charakteristischen Systems, falls die Funktion $\phi(x(t), y(t), u(t))$ für jede Lösung $x(t), y(t), u(t)$ des charakteristischen Systems *konstant* ist. Falls ϕ_1 und ϕ_2 zwei linear unabhängige Integrale des charakteristischen Systems sind, d.h. wenn die Ableitungsmatrix

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(x, y, u)} = \begin{pmatrix} (\phi_1)_x & (\phi_1)_y & (\phi_1)_u \\ (\phi_2)_x & (\phi_2)_y & (\phi_2)_u \end{pmatrix}$$

den Rang zwei hat, so ist die allgemeine Lösung u der PDGL implizit gegeben durch die Gleichung

$$\Omega(\phi_1(x, y, u), \phi_2(x, y, u)) = 0, \tag{48}$$

wobei $\Omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion ist.

5.2. Bestimmung unabhängiger Integrale in Beispielen.

5.2.1. *PDGL $x^2 u_x + y^2 u_y = u^2$.* Wir betrachten die PDGL

$$x^2 u_x + y^2 u_y = u^2, \text{ also } a_1(x) = x^2,\ a_2(y) = y^2,\ b(u) = u^2.$$

Das dazugehörige charakteristische System $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = y^2$, $\dot{u} = u^2$ ist durch Trennung der Variablen lösbar, falls $x, y, u \neq 0$.

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow \int x^{-2} dx = \int 1 dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + c.$$

Also gilt

$$x(t) = -\frac{1}{t + c_1}, \quad y(t) = -\frac{1}{t + c_2}, \quad u(t) = -\frac{1}{t + c_3}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ und Integrale sind zum Beispiel

$$\phi_1(x, y, u) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \quad \phi_2(x, y, u) = \frac{1}{x} - \frac{1}{u}.$$

Wir überprüfen, ob ϕ_1 und ϕ_2 unabhängig sind. Die Ableitungsmatrix

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(x, y, u)} = \begin{pmatrix} -x^{-2} & y^{-2} & 0 \\ -x^{-2} & 0 & u^{-2} \end{pmatrix}$$

hat für $xy \neq 0$ oder $xu \neq 0$ oder $yu \neq 0$ den Rang 2. Die allgemeine Lösung der PDGL $x^2 u_x + y^2 u_y = u^2$ ist implizit gegeben durch $\Omega(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{1}{x} - \frac{1}{u}) = 0$ für beliebige Funktionen Ω. Zum Beispiel erhält man

- mit $\Omega(\phi_1, \phi_2) = \phi_2$ die Gleichung $\frac{1}{x} - \frac{1}{u} = 0$, also $u(x, y) = x$.
- mit $\Omega(\phi_1, \phi_2) = \phi_1 - \phi_2$ die Gleichung $-\frac{1}{y} + \frac{1}{u} = 0$, also $u(x, y) = y$.
- mit $\Omega(\phi_1, \phi_2) = \phi_1 + \phi_2$ die Gleichung $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{u} = 0$, also $u(x, y) = \frac{xy}{2y - x}$ für $2y \neq x$. Probe:

$$x^2 \frac{y(2y - x) + xy}{(2y - x)^2} + y^2 \frac{x(2y - x) - 2xy}{(2y - x)^2} = \frac{x^2 2y^2 + y^2(-x^2)}{(2y - x)^2} = \left(\frac{xy}{2x - y}\right)^2$$

5.2.2. *PDGL $yu_x - xu_y = -x^2 + y^2$.* Wir betrachten die PDGL

$$yu_x - xu_y = -x^2 + y^2 \text{ für } y > 0.$$

Division der Gleichung durch $y = a_1(x, y)$ ergibt die neue PDGL

$$u_x - \frac{x}{y}u_y = -\frac{x^2}{y} + y.$$

Wir lösen das charakteristische System

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = 1 \Rightarrow x = t \\
&\dot{y} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y'(x) = -\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{1}{2}y^2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + c_2 \text{ (Trennung der Variablen)} \\
&\dot{u} = -\frac{x^2}{y} + y \Rightarrow u'(x) = -\frac{x^2}{y} + y = (xy(x))' \Rightarrow u(x) = xy(x) + c_3
\end{aligned}$$

Die beiden Integrale $2c_2 = \phi_1(x, y, u) = y^2 + x^2$ und $c_3 = \phi_2(x, y, u) = u - xy$ sind unabhängig, denn die Ableitungsmatrix

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(x, y, u)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ -y & -x & 1 \end{pmatrix}$$

hat für $y > 0$ den Rang 2. Die allgemeine Lösung der PDGL $x^2u_x + y^2u_y = u^2$ ist implizit gegeben durch $\Omega(x^2 + y^2, u - xy) = 0$ für beliebige Funktionen Ω. Zum Beispiel erhält man

- mit $\Omega(\phi_1, \phi_2) = \phi_2$ die Gleichung $u - xy = 0$, also $u(x, y) = xy$.
- mit $\Omega(\phi_1, \phi_2) = -\phi_1 + \phi_2$ die Gleichung $-x^2 - y^2 + u - xy = 0$, also $u(x, y) = xy + x^2 + y^2$.
- mit $\Omega(\phi_1, \phi_2) = \phi_1 + 2\phi_2$ die Gleichung $2u - 2xy + x^2 + y^2 = 0$, also $u(x, y) = -(x - y)^2/2$.

5.3. Vereinfachungen des charakteristischen Systems.

5.3.1. *Eliminierung der Variablen t.* Falls $a_1 \equiv 1$, so ist $\dot{x} = 1$ die erste Gleichung des charakteristischen Systems. Sie hat die allgemeine Lösung $x(t) = t + c_1$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$. Da es genügt, zwei unabhängige Integrale zu finden, und die allgemeine Lösung des charakteristischen Systems von drei Parametern c_1, c_2, c_3 abhängt, wählen wir hier $c_1 = 0$ und können die Variable t durch die Variable x ersetzen.

Die beiden verbleibenden gewöhnlichen DGLen des charakteristischen Systems bilden dann ein System aus DGLen erster Ordnung für Funktionen $y(x)$ und $u(x)$. Deshalb ist es oft sinnvoll, eine gegeben lineare PDGL erster Ordnung durch $a_1(x, y)$ zu dividieren und dann erst das charakteristische System aufzustellen. In Kurzform:

$$(49) \qquad a_1 \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad x = t,\ y'(x) = a_2(x, y(x), u(x)),\ u'(x) = b(x, y(x), u(x))$$

5.3.2. *Homogene PDGL.* Falls eine homogene PDGL gegeben ist, also $b \equiv 0$, dann lautet die letzte DGL des charakteristischen Systems $\dot{u} = 0$, also $u \equiv c$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $\phi_2(u) = u$ ist ein Integral des charakteristischen Systems.

Ist dann $\phi_1(x, y)$ ein weiteres unabhängiges Integral, so wird die allgemeine Lösung implizit durch die Gleichung $\Omega(\phi_1(x, y), u) = 0$ definiert. Man muss ohnehin annehmen, dass diese Gleichung nach der zweiten Variable auflösbar ist, also $\Omega(s_1, s_2) = 0$ genau dann, wenn $s_2 = \omega(s_1)$ für eine Funktion ω. Dann ist $u(x, y) = \omega(\phi_1(x, y))$ die allgemeine Lösung. In Kurzform:

$$(50) \qquad b \equiv 0,\ \phi(x, y) \text{ Integral } \Rightarrow\ u(x, y) = \omega(\phi(x, y)) \text{ mit beliebiger Funktion } \omega$$

5.3.3. *Beispiel.* Wir betrachten die homogene PDGL

$$(1+x)u_x - (1+y)u_y = 0, \quad (x > -1).$$

Division durch $1+x$ ergibt $u_x - \frac{1+y}{1+x}u_y = 0$ und das charakteristische System

$$\dot{x} = 1 \quad \dot{y} = -\frac{1+y}{1+x}, \quad \dot{u} = 0,$$

also $x = t$, $\phi_2(u) = u$ und $\phi_1(x,y) = (1+y)(1+x)$, weil

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{1+y}{1+x} \\ \int \frac{1}{1+y}dy &= -\int \frac{1}{1+x}dx \\ \ln(1+y) &= -\ln(1+x) + c_1 \\ 1+y &= C_1(1+x)^{-1}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist $u(x,y) = \omega((1+x)(1+y))$ mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

5.4. Nebenbedingungen. Setzt man die Nebenbedingungen in die Integrale ϕ_1 und ϕ_2 ein, so erhält man zwei Funktionen von s_1 bzw. s_2 in einer Variablen. Eine Relation $F(s_1, s_2) = 0$ führt zu einer Gleichung $F(\phi_1(x,y,u), \phi_2(x,y,u)) = 0$, durch die eine Funktion $u(x,y)$ implizit definiert ist.

5.4.1. $(1+x)u_x - (1+y)u_y = 0$ *mit* $u(x,0) = x^2$. Die homogene PDGL

$$(1+x)u_x - (1+y)u_y = 0 \text{ für } x > -1$$

hat die allgemeine Lösung $u(x,y) = \omega((1+x)(1+y))$ (siehe Beispiel in Abschnitt 5.3.3). Betrachten wir zusätzlich die Anfangsbedingung $u(x,0) = x^2$, so erhalten wir $x^2 = \omega(1+x)$, also $\omega(s) = (s-1)^2$ und die eindeutige Lösung

$$u(x,y) = \omega((1+x)(1+y)) = ((1+x)(1+y)-1)^2 = (x+y+xy)^2.$$

5.4.2. $u_x + yu_y = xy$ *mit* $u(0,y) = 0$. Wir betrachten die PDGL $u_x + yu_y = xy$ mit der Anfangsbedingung $u(0,y) \equiv 0$. Das charakteristische System ist $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = y$, $\dot{u} = xy$. Aus der ersten Gleichung folgt $x = t$. Wir verbleiben mit den beiden DGLen $y'(x) = y$ und $u'(x) = xy$. Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^x \qquad \text{(Trennung der Variablen)} \\ u'(x) &= c_1 x e^x \\ u(x) &= c_1(x-1)e^x + c_2 = (x-1)y(x) + c_2. \end{aligned}$$

Auflösung nach c_1 und c_2 ergibt die Integrale $\phi_1(x,y) = ye^{-x}$ und $\phi_2(x,y,u) = u - (x-1)y$. Diese sind unabhängig, denn die Ableitungsmatrix

$$\frac{\partial(\phi_1,\phi_2)}{\partial(x,y,u)} = \begin{pmatrix} -ye^{-x} & e^{-x} & 0 \\ -y & 1-x & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 2. Deshalb ist die allgemeine Lösung $u(x,y)$ implizit durch die Gleichung $\Omega(ye^{-x}, u - xy + y) = 0$ gegeben.

Aus der Anfangsbedingung $u(0,y) = 0$, also $x = u = 0$ folgt $s_1 = \phi_1(0,y) = y$ und $s_2 = \phi_2(0,y,0) = y$. Die Terme s_1 und s_2 erfüllen die Gleichung $s_1 = s_2$. Aus der Gleichung $\phi_1(x,y) = \phi_2(x,y,u)$ folgt $u(x,y) = ye^{-x} + xy - y$. Man beachte, dass die Lösung auch die Randbedingung $u(x,0) = 0$ erfüllt.

5.4.3. *$u_x + 2xu_y = 2x$ mit (nicht) erfüllbarer Nebenbedingung.* Wir betrachten die PDGL

$$u_x + 2xu_y = 2x \text{ mit } u(0,y) \equiv 1 \text{ bzw. } u(x,0) \equiv 1.$$

Das charakteristische System ist $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 2x$, $\dot{u} = 2x$. Aus der ersten Gleichung folgt $x = t$. Wir verbleiben mit den beiden DGLen $y'(x) = 2x$ und $u'(x) = 2x$. Die allgemeine Lösung des Systems ist $y(x) = x^2 + c_1$ und $u(x) = x^2 + c_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die Integrale $\phi_1(x,y) = y - x^2$ und $\phi_2(x,u) = u - x^2$ sind unabhängig, denn die Ableitungsmatrix

$$\frac{\partial(\phi_1,\phi_2)}{\partial(x,y,u)} = \begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 2. Deshalb ist die allgemeine Lösung $u(x,y)$ implizit durch die Gleichung $\Omega(y - x^2, u - x^2) = 0$ gegeben.

Aus der Anfangsbedingung $u(0,y) = 1$, also $x = 0$ und $u = 1$ folgt $s_1 = \phi_1(0,y) = y$ und $s_2 = \phi_2(0,1) = 1$. Die Terme s_1 und s_2 erfüllen die Gleichung $s_2 = 1$. Aus der Gleichung $\phi_2(x,u) = 1$ folgt $u(x) = 1 + x^2$.

Aus der Anfangsbedingung $u(x,0) = 1$, also $y = 0$ und $u = 1$ folgt $s_1 = \phi_1(x,0) = -x^2$ und $s_2 = \phi_2(x,1) = 1 - x^2$. Die Terme s_1 und s_2 erfüllen die Gleichung $s_2 = 1 + s_1$. Aus der Gleichung $\phi_2(x,u) = 1 + \phi_1(x,y)$ folgt $u(x) = 1 + y - x^2 + x^2 = 1 + y$.

Die Nebenbedingungen $u(x,0) \equiv 1$ und $u(0,y) \equiv 1$ sind nicht gleichzeitig erfüllbar, wenn man Lösungen mit der Methode der Charakteristiken sucht.

5.5. Laplacetransformation bezüglich einer Variablen. Zu einer Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist die Laplacetransformierte

$$L(f)(z) := \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt.$$

Die Laplacetransformation einer Funktion $u(x,t)$ bezüglich der Variablen t liefert

$$U(x,z) := L(u)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} u(x,t)dt. \tag{51}$$

Man kann die Laplacetransformation auf eine PDGL anwenden. Dabei gelten die Regeln der Laplacetransformation für die Ableitungen bezüglich der Variablen t, z.B. $L(u_t)(z) = zL(u) - u(x,0) = zU(x,z) - u(x,0)$, und die partiellen Ableitungen bezüglich x kommutieren mit der Laplacetransformation, z.B. $L(u_x)(z) = U_x(x,z)$. Eine Lösung der PDGL für $U(x,z)$ kann dann mit Hilfe der inversen Laplacetransformation in eine Lösung $u(x,t) = L^{-1}(U)$ umgewandelt werden.

5.5.1. *$xu_x + u_t = xt$ mit $u(x,0) \equiv 0$.* Wir betrachten die PDGL $xu_x + u_t = xt$ mit der Anfangsbedingung $u(x,0) \equiv 0$. Nennt man x in y und t in x um, so ergibt sich die PDGL aus dem Beispiel in Abschnitt 5.4.2. Also sollten wir die Lösung $u(x,t) = xe^{-t} - x - xt$ erhalten.

Anwendung der Laplacetransformation bezüglich t auf die PDGL führt mit $L(u(x,t))(z) = U(x,z)$ zu

$$\begin{aligned} xL(u_x(x,t))(z) + L(u_t(x,t))(z) &= xL(t)(z) \\ xU_x(x,z) + zU(x,z) - u(x,0) &= x\frac{1}{z^2} \\ U_x(x,z) + \frac{z}{x}U(x,z) &= \frac{1}{z^2}, \end{aligned}$$

denn $u(x,0) \equiv 0$.

Die neue PDGL für $U(x,z)$ enthält nur partielle Ableitungen nach x. Deshalb behandeln wir sie wie eine gewöhnliche DGL für eine von x abhängige Funktion, deren Koeffizienten noch von einem Parameter z abhängen. Es gilt

$$\begin{aligned}
U(x,z) &= U_s(x,z) + C(z)U_h(x,z) \\
U_h(x,z) &= e^{-\int \frac{z}{x}dx} = e^{-z\ln x} = x^{-z} \\
U_s(x,z) &= U_h(x,z)\int \frac{1}{z^2}\frac{1}{U_h(x,z)}dx = x^{-z}\int \frac{x^z}{z^2}dx = x^{-z}\frac{x^{z+1}}{(z+1)z^2} = \frac{x}{(z+1)z^2} \\
U(x,z) &= \frac{x}{(z+1)z^2} + x^{-z}C(z) = x\left(\frac{1}{z+1} - \frac{z-1}{z^2}\right) + e^{-z\ln x}C(z).
\end{aligned}$$

Durch Anwendung der inversen Laplacetransformation erhalten wir wegen

$$L(1)(z) = z^{-1},\ L(t)(z) = z^{-2},\ L(e^{\alpha t}f(t))(z) = L(f(t))(z-\alpha)$$

und

$$L(f(t))(z) = e^{-az}L(g(t))(z) \text{ mit } f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < a \\ g(t-a) & t \ge a \end{cases}$$

die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= L^{-1}(U(x,z))(t) \\
&= x(e^{-t} - 1 + t) + \begin{cases} 0 & 0 \le t < \ln x \\ c(t-\ln x) & t \ge \ln x, L(c(t))(z) = C(z) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Der zweite Summand ist nur dann stetig, wenn $c(0) = 0$.

5.5.2. *$u_x + 2xu_y = 2x$ mit $u(0,y) = u(x,0) \equiv 1$.* Wir betrachten die PDGL $u_x + 2xu_y = 2x$ mit der Anfangsrandwertbedingung $u(0,y) = u(x,0) \equiv 1$ wie im Beispiel in Abschnitt 5.4.3. Anwendung der Laplacetransformation bezüglich t auf die PDGL führt mit $L(u(x,t))(z) = U(x,z)$ zu

$$\begin{aligned}
L(u_x(x,t))(z) + 2xL(u_t(x,t))(z) &= 2xL(1)(z) \\
U_x(x,z) + 2x(zU(x,z) - u(x,0)) &= 2x\frac{1}{z} \\
U_x(x,z) + 2xzU(x,z) - 2x &= \frac{2x}{z} \\
U_x(x,z) + 2xzU(x,z) &= \frac{2x}{z} + 2x,
\end{aligned}$$

denn $u(x,0) = 1$.

Die neue PDGL für $U(x,z)$ enthält nur partielle Ableitungen nach x. Deshalb behandeln wir sie wie eine gewöhnliche DGL für eine von x abhängige Funktion, deren Koeffizienten noch von einem Parameter z abhängen.

$$\begin{aligned}
U(x,z) &= U_s(x,z) + C(z)U_h(x,z)\\
U_h(x,z) &= e^{-\int 2xz dx} = e^{-x^2 z}\\
U_s(x,z) &= U_h(x,z)\int 2x(1+z^{-1})\frac{1}{U_h(x,z)}dx = e^{-x^2 z}\int 2x(1+z^{-1})e^{x^2 z}dx\\
&= e^{-x^2 z}\frac{1+z^{-1}}{z}e^{x^2 z} = \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\\
U(x,z) &= \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+C(z)e^{-x^2 z}.
\end{aligned}$$

Durch Anwendung der inversen Laplacetransformation erhalten wir wegen

$$L(1)(z) = z^{-1},\ L(t)(z) = z^{-2},\ L(e^{\alpha t}f(t))(z) = L(f(t))(z-\alpha)$$

und

$$L(f(t))(z) = e^{-az}L(g(t))(z) \text{ mit } f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < a\\ g(t-a) & t \ge a\end{cases}$$

die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= L^{-1}(U(x,z))(t)\\
&= 1 + t + \begin{cases} 0 & 0 \le t < x^2\\ c(t-x^2) & t \ge x^2, L(c(t))(z) = C(z)\end{cases}.
\end{aligned}$$

Aus der Randbedingung $u(0,t) = 1$ folgt $1 = 1 + t + c(t)$, also $c(t) = -t$ und

$$u(x,t) = 1 + t + \begin{cases} 0 & 0 \le t < x^2\\ -t + x^2 & t \ge x^2\end{cases} = \begin{cases} 1+t & 0 \le t < x^2\\ 1+x^2 & t \ge x^2\end{cases}.$$

Diese Funktion ist stetig auf $\mathbb{R}^2$, differenzierbar außerhalb der Parabel $\{t = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$ und erfüllt beide Nebenbedingungen.

6. Lineare PDGL zweiter Ordnung

6.1. Normalform einer linearen PDGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Eine lineare PDGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für eine Funktion $u(x,y)$ hat die Form

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y), \tag{52}$$

wobei $a,b,c \in \mathbb{R}$ und f eine lineare Funktion ist. Für eine Funktion $u(\vec{x})$ betrachten wir die PDGL

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} = f(\vec{x},u,u_{x_1},\dots,x_n), \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = a_{ji}, \tag{53}$$

mit einer linearen Funktion f. Die Koeffizienten vor den Ableitungen zweiter Ordnung bilden eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij})$. Falls $\vec{x} = (x,y)^T$, so ist diese Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}.$$

Durch einen linearen Koordinatenwechsel $(\xi,\eta)^T = B(x,y)^T$ kann jede lineare PDGL zweiter Ordnung (52) in genau einer der folgenden Normalformen transformiert werden:

- $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ (elliptisch)
- $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ (hyperbolisch)
- $u_{\xi\xi} = g(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ (parabolisch)

6.1.1. *Beweis der Existenz der Normalform.* Die symmetrische Matrix A ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. Es gilt

$$C^T AC = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

wobei die Spalten der Matrix C aus paarweise orthogonalen, normierten Eigenvektoren v_j zu den Eigenwerten λ_j bestehen. Wir betrachten in der PDGL (53) die Ableitungen zweiter Ordnung. Mit $\vec{\xi} = B\vec{x}$ folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right) A \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^T u \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right) BA \left(\left(\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right) B\right)^T u = \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right) BAB^T \left(\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}}\right)^T u.\end{aligned}$$

Wenn $B = C^T$, dann ist $BAB^T = C^T AC = D$ und

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_{\xi_j \xi_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial u}{\partial \vec{\xi}} C^T.$$

Geht man nun von einer DGL der Form

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j u_{x_j x_j} = f(\vec{x}, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

aus, so kann man mit Hilfe der Streckungen $\xi_j = \mu_j x_j$ mit $\mu_j = (|\lambda_j|)^{-1/2}$ die Koeffizienten λ_j auf ± 1 normieren, denn $u_{x_j} = \mu_j u_{\xi_j}$ und $u_{x_j} = \mu_j^2 u_{\xi_j \xi_j}$.

6.1.2. *Kriterium für den Typ einer PDGL zweiter Ordnung.* Aus dem Beweis folgt: Die PDGL (52) bzw. (53) ist

- **elliptisch** $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte sind positiv oder alle Eigenwerte sind negativ $\Leftrightarrow$ A ist positiv oder negativ definit. ($\Leftrightarrow a \neq 0, \det A > 0$)
- **hyperbolisch** $\Leftrightarrow$ A hat positive und negative Eigenwerte $\Leftrightarrow$ A ist indefinit ($\Leftrightarrow \det A < 0$)
- **parabolisch** $\Leftrightarrow$ Ein Eigenwert ist 0. $\Leftrightarrow \det A = 0$.

Bemerkung 7. Falls die Koeffizienten a_{ij} von $\vec{x}$ abhängen, also $a_{ij}(\vec{x})$, so kann man Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ bestimmen, in denen die PDGL elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch ist.

6.1.3. *Beispiel.* Wir betrachten $u_{xx} + 2bu_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0$ für $b = 0$, $b = 1$ und $b = 2$. Die Matrix A ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $a = 1 > 0$ und

$$\det A = 1 - b^2 \begin{cases} > 0 & -1 < b < 1 \\ = 0 & b = \pm 1 \\ < 0 & |b| > 1 \end{cases},$$

ist die PDGL elliptisch für $-1 < b < 1$, hyperbolisch für $|b| > 1$ und parabolisch für $b = \pm 1$.

- Für $b=0$ ergibt sich $u_{xx}+u_{yy}+u_x-u_y=0$, eine elliptische Normalform.
- Für $b=1$ hat die Matrix A die Eigenwerte $\lambda=0$ und $\lambda=2$. Dazugehörige Eigenvektoren sind zum Beispiel $(1-1)^T$ und $(1,1)^T$. Normierung führt zu

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=C^T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x-y\\ x+y\end{pmatrix}$$

  und

$$(u_x,u_y)=(u_\xi,u_\eta)C^T=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_\xi+u_\eta,-u_\xi+u_\eta)$$

  und

$$\begin{aligned}0&=u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+u_x-u_y\\&=2u_{\eta\eta}+\frac{1}{\sqrt{2}}(u_\xi+u_\eta)-\frac{1}{\sqrt{2}}(-u_\xi+u_\eta)\\&=2u_{\eta\eta}+\sqrt{2}u_\xi\\u_{\eta\eta}&=-\frac{\sqrt{2}}{2}u_\xi\quad\text{(Normalform).}\end{aligned}$$

- Für $b=2$ hat die Matrix A die Eigenwerte $\lambda=3$ und $\lambda=-1$. Dazugehörige Eigenvektoren sind zum Beispiel $(1,1)^T$ und $(1,-1)^T$. Normierung führt zu

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=C^T\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x+y\\ x-y\end{pmatrix}$$

  und

$$(u_x,u_y)=(u_\xi,u_\eta)C^T=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_\xi+u_\eta,u_\xi-u_\eta)$$

  und

$$\begin{aligned}0&=u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+u_x-u_y\\&=3u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+\frac{1}{\sqrt{2}}(u_\xi+u_\eta)-\frac{1}{\sqrt{2}}(u_\xi-u_\eta)\\&=3u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+\sqrt{2}u_\eta\\3u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}&=-\sqrt{2}u_\eta\\u_{\xi'\xi'}-u_{\eta\eta}&=-\sqrt{2}u_\eta\quad(\sqrt{3}\xi'=\xi,\ \text{Normalform}).\end{aligned}$$

6.2. Die Fouriermethode. Wir betrachten eine lineare PDGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in Normalform

$$u_{xx}+\lambda u_{tt}=au_x+bu_t+cu+f(x,t)\quad\text{für } x\in[0,l],\ t>0$$

mit Randbedingungen, z.B. $u(0,t)=\Psi_1(t)$ und $u(l,t)=\Psi_2(t)$, und Anfangsbedingungen $u(x,0)=\phi_1(x)$ und, falls $\lambda\neq 0$, $u_t(x,0)=\phi_2(x)$.

Die Fouriermethode besteht aus drei Schritten:

(1) **Homogenisierung der Randbedingungen** durch eine Substitution

$$v(x,t):=u(x,t)+a(t)+b(t)x \text{ oder } v(x,t):=u(x,t)+a(t)x+b(t)x^2$$

mit Funktionen $a(t),b(t)$, die von den Randbedingungen abhängen.

(2) Bestimmung einer Lösung $u_0(x,t)$ der homogenen PDGL $u_{xx} + \lambda u_{tt} = au_x + bu_t + cu$ mit homogenen Randbedingungen und gegebenen Anfangsbedingungen mit Hilfe des **Produktansatzes** (Separationsansatzes) $u(x,t) = h(x)g(t)$.

Da die PDGL keine gemischten Ableitungen enthält, führt der Produktansatz zu einer gewöhnlichen DGL mit Randbedingungen, d.h. einer Eigenwertaufgabe, für $h(x)$ und einer gewöhnlichen DGL mit Anfangsbedingungen für $g(t)$.

Zu jedem Eigenwert μ_k erhält man eine Eigenfunktion $h_k(x)$ und eine eindeutige Lösung $g_k(t)$. Da $u_0(x,t)$ eine homogene DGL lösen soll, ist die allgemeine Lösung, Konvergenz vorausgesetzt,

$$u_0(x,t) = \sum_k a_k g_k(t) h_k(x), \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingungen bestimmen die Koeffizienten a_k, wenn man auch die Funktionen $\phi_j(x)$ eindeutig als Reihe in den Eigenfunktionen schreiben kann, z.B.

$$u(x,0) = \sum_k a_k g_k(0) h_k(x) = \phi_1(x) = \sum_k \alpha_k h_k(x) \Leftrightarrow a_k = \frac{\alpha_k}{g_k(0)} \forall k.$$

In vielen Fällen sind die Eigenfunktionen h_k Sinus- bzw. Kosinusfunktionen und die verwendete Reihenentwicklung ist eine Fourierreihe.

(3) Bestimmung einer Lösung $u_s(x,t)$ der inhomogenen PDGL $u_{xx} + \lambda u_{tt} = au_x + bu_t + cu + f(x,t)$ mit homogenen Randbedingungen und trivialen Anfangsbedingungen, also $\phi_1 = \phi_2 \equiv 0$, durch **Variation der Konstanten**.

Der Ansatz $u_s(x,t) = \sum_k a_k(t) h_k(x)$ mit noch zu bestimmenden Funktionen $a_k(t)$ verwendet die im zweiten Schritt bestimmten Eigenfunktionen $h_k(x)$. Kann auch der inhomogene Anteil $f(x,t)$ in eine Reihe bezüglich der Eigenfunktionen entwickelt werden, $f(x,t) = \sum_k b_k(t) h_k(x)$, und enthält der von den Eigenfunktionen erzeugte Vektorraum auch die Funktionen h_k'' und ah_k', so erhält man durch Koeffizientenvergleich für jede Eigenfunktion h_j eine gewöhnliche DGL erster oder zweiter Ordnung für die gesuchten Funktionen $a_k(t)$ mit Anfangsbedingungen, z.B. $a_k(0) = 0$, weil $u_s(x,0) = \sum_k a_k(0) h_k(x) = 0$. Diese sind eindeutig lösbar und bestimmen die Funktionen $a_k(t)$.

Hat man u_0 und u_s berechnet, so ist $u(x,t) = u_0(x,t) + u_s(x,t)$ die gesuchte Lösung der PDGL mit homogenen Randbedingungen.

6.3. Wärmeleitungsgleichung mit Fouriermethode. Wir betrachten die *parabolische* PDGL

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in [0,l],\ t \geq 0 \tag{54}$$

mit den Randbedingungen $u(0,t) = \Psi_1(t)$ und $u(l,t) = \Psi_2(t)$ und der Anfangsbedingung $u(x,0) = \phi(x)$.

6.3.1. *Homogenisierung der Randbedingungen.* Wir homogenisieren die Randbedingungen mit Hilfe der Substitution $v(x,t) = u(x,t) + a(t) + b(t)x$. Nun gilt

$$v(0,t) = u(0,t) + a(t) = \Psi_1(t) + a(t) = 0 \Leftrightarrow a(t) = -\Psi_1(t)$$

und dann

$$v(l,t) = u(l,t) + a(t) + b(t)l = \Psi_2(t) - \Psi_1(t) + b(t)l = 0 \Leftrightarrow b(t) = \frac{\Psi_1(t) - \Psi_2(t)}{l}.$$

Die neue PDGL für $v(x,t)$ ist

$$v_t = a^2 v_{xx} - \Psi_1'(t) + \frac{\Psi_1'(t) - \Psi_2'(t)}{l} x + f(x,t), \tag{55}$$

denn $v_t = u_t + a' + b'x$ und $v_{xx} = u_{xx}$. Die neue Anfangsbedingung lautet

$$v(x,0) = \phi(x) - \Psi_1(0) + \frac{\Psi_1(0) - \Psi_2(0)}{l} x. \tag{56}$$

6.3.2. *Lösen der homogenen PDGL.* Nun gehen wir von homogenen Randbedingungen aus, d.h. $u(0,t) = u(l,t) \equiv 0$. Wir bestimmen eine Funktion $u_0(x,t)$, die die *homogene* DGL $u_t = a^2 u_{xx}$ mit der Anfangsbedingung $u_0(x,0) = \phi(x)$ erfüllt. Der Ansatz $u_0(x,t) = h(x)g(t)$ liefert unter der Annahme $h(x)g(t) \not\equiv 0$

$$\begin{aligned} h(x)g'(t) &= a^2 h''(x) g(t) \\ \frac{1}{a^2}\frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{h''(x)}{h(x)} \equiv \mu \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

da die linke Seite eine Funktion von t und die rechte Seite eine Funktion von x ist. Man erhält die Eigenwertaufgabe $h'' - \mu h = 0$ mit $h(0) = h(l) = 0$ und die gewöhnliche DGL $g' - a^2\mu g = 0$. Die Eigenwertaufgabe hat die Eigenwerte und Eigenfunktionen (siehe Beispiel in Abschnitt 4.5.5)

$$\mu_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad h_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), \quad k \in \mathbb{N}, k > 0.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ hat die homogene gewöhnliche DGL erster Ordnung $g' - \mu_k a^2 g = 0$ die Lösung

$$g_k(t) = e^{-(ak\pi/l)^2 t}.$$

Durch Summation ergibt sich, Konvergenz vorausgesetzt, die allgemeine Lösung

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-(ak\pi/l)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right). \tag{57}$$

Durch Auswertung der Anfangsbedingung bestimmen wir die Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$. Dazu sei $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die *ungerade*, $2l$-periodische Fortsetzung der Funktion $\phi : [0,l] \to \mathbb{R}$. Die Fourierreihe der Funktion $\tilde{\phi}$ ist eine Sinusreihe und stimmt auf dem Intervall $[0,l]$ mit ϕ überein. Es gilt auf dem Intervall $[0,l]$

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

mit

$$\alpha_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \tilde{\phi}(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx. \tag{58}$$

Aus $u_0(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x/l) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(k\pi x/l) = \phi(x)$ folgt durch Koeffizientenvergleich $a_k = \alpha_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(ak\pi/l)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \frac{2}{l}\int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{k\pi}{l}s\right) ds.$$

6.3.3. *Lösen der inhomogenen PDGL mit trivialen Anfangsbedingungen.* Wir bestimmen eine Funktion $u_s(x,t)$, die die *inhomogene* DGL $u_t = a^2u_{xx} + f(x,t)$ mit der Anfangsbedingung $u_0(x,0) \equiv 0$ erfüllt. Der Ansatz

$$u_s(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t)h_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen $\beta_k(t)$ und eine Fourierreihenentwicklung der Funktion f bezüglich x, d.h. der *ungeraden*, $2l$-periodischen Fortsetzung von $f : [0,l] \times \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$ zu einer Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \text{ mit } b_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx.$$

liefern

$$\begin{aligned}
u_t - a^2u_{xx} &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k'(t)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) - a^2\beta_k(t)\left(-\frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k'(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2\beta_k(t)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = f(x,t)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)
\end{aligned}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine gewöhnliche DGL $\beta_k'(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2\beta_k(t) = b_k(t)$ mit Anfangsbedingung $\beta_k(0) = 0$, denn $u_s(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(0)h_k(x) \equiv 0$. Jede dieser linearen, inhomogenen, gewöhnlichen DGLen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist eindeutig lösbar. Die Lösungsfunktionen $\beta_k(t)$ definieren die Funktion $u_s(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(t)h_k(x)$.

Zusammen erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_s(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k(t) + \alpha_k e^{-(ak\pi/l)^2t}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).$$

6.4. Wellengleichung mit Fouriermethode. Wir betrachten die *hyperbolische* PDGL

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t), \quad x \in [0,l],\ t \geq 0 \tag{59}$$

mit den Randbedingungen $u(0,t) = \Psi_1(t)$ und $u(l,t) = \Psi_2(t)$ und den Anfangsbedingungen $u(x,0) = \phi_1(x)$ und $u_t(x,0) = \phi_2(x)$.

Die Randbedingungen können wie in Abschnitt (6.3) mit Hilfe der Substitution $v(x,t) = u(x,t) + a(t) + b(t)x$ homogenisiert werden. Wir gehen nun von homogenen Randbedingungen aus, also $\Psi_1 = \Psi_2 \equiv 0$.

6.4.1. *Lösen der homogenen PDGL.* Wir bestimmen eine Funktion $u_0(x,t)$, die die *homogene* DGL $u_{tt} = a^2u_{xx}$ mit den Anfangsbedingungen $u_0(x,0) = \phi_1(x)$ und $u_t(x,0) = \phi_2(x)$ erfüllt. Der Ansatz $u_0(x,t) = h(x)g(t)$ liefert unter der Annahme $h(x)g(t) \not\equiv 0$

$$\begin{aligned}
h(x)g''(t) &= a^2h''(x)g(t)\\
\frac{1}{a^2}\frac{g''(t)}{g(t)} &= \frac{h''(x)}{h(x)} \equiv \mu \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

da die linke Seite eine Funktion von t und die rechte Seite eine Funktion von x ist. Man erhält die Eigenwertaufgabe $h'' - \mu h = 0$ mit $h(0) = h(l) = 0$ und die gewöhnliche DGL $g'' - a^2\mu g = 0$. Die Eigenwertaufgabe hat die Eigenwerte und Eigenfunktionen (siehe Beispiel in Abschnitt 4.5.5)

$$\mu_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad h_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), \quad k \in \mathbb{N}, k > 0.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ hat die homogene gewöhnliche DGL zweiter Ordnung $g'' - \mu_k a^2 g = 0$ das charakteristische Polynom $\lambda^2 + (ak\pi/l)^2 = 0$ und die allgemeine Lösung

$$g_k(t) = a_k \cos((ak\pi/l)t) + b_k \sin((ak\pi/l)t), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

Durch Summation ergibt sich, Konvergenz vorausgesetzt, die allgemeine Lösung

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos((ak\pi/l)t) + b_k \sin((ak\pi/l)t)) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).$$

Durch Auswertung der Anfangsbedingung bestimmt man die Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Dazu seien $\tilde{\phi}_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die *ungeraden*, $2l$-periodischen Fortsetzungen der Funktionen $\phi_j : [0,l] \to \mathbb{R}$. Die Fourierreihen der Funktionen $\tilde{\phi}_j$ sind Sinusreihen und stimmen auf dem Intervall $[0,l]$ mit ϕ_j überein. Es gilt auf dem Intervall $[0,l]$

$$\phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), \quad \phi_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

mit

$$\alpha_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi_1(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx, \quad \beta_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi_2(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx. \tag{60}$$

Aus den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x/l) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(k\pi x/l) = \phi_1(x)$$
$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{ak\pi}{l} \sin(k\pi x/l) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(k\pi x/l) = \phi_2(x)$$

folgt durch Koeffizientenvergleich

$$a_k = \alpha_k, \quad b_k = \beta_k \frac{l}{ak\pi} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

und

$$u_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos((ak\pi/l)t) + \beta_k \frac{l}{ak\pi} \sin((ak\pi/l)t)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right). \tag{61}$$

6.4.2. *Lösen der inhomogenen PDGL mit trivialen Anfangsbedingungen.* Wir bestimmen eine Funktion $u_s(x,t)$, die die *inhomogene* PDGL $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ mit den Anfangsbedingungen $u_0(x,0) = u_t(x,0) \equiv 0$ erfüllt. Der Ansatz

$$u_s(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) h_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen $\gamma_k(t)$ und eine Fourierreihenentwicklung der Funktion f bezüglich x, d.h. der *ungeraden*, $2l$-periodischen Fortsetzung von $f : [0,l] \times \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$ zu einer Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \text{ mit } b_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx.$$

liefern

$$\begin{aligned}
u_{tt} - a^2 u_{xx} &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k''(t)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) - a^2\gamma_k(t)\left(-\frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\gamma_k''(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2\gamma_k(t)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = f(x,t) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)
\end{aligned}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine gewöhnliche DGL $\gamma_k''(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2\gamma_k(t) = b_k(t)$ mit Anfangsbedingungen $\gamma_k(0) = \gamma_k'(t) = 0$, denn $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(0)h_k(x) \equiv 0$ und $u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k'(0)h_k(x) \equiv 0$. Jede dieser linearen, inhomogenen, gewöhnlichen DGLen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist eindeutig lösbar.

Zusammen erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t) + u_s(x,t) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\gamma_k(t) + \alpha_k\cos((ak\pi/l)t) + \beta_k\frac{l}{ak\pi}\sin((ak\pi/l)t)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).
\end{aligned}$$

6.5. Mehrdimensionale hyper- und parabolische Probleme. Wir betrachten eine lineare PDGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in Normalform

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_{x_i x_i} + \lambda u_{tt} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_{x_i} + \alpha u_t + \alpha_0 u + f(\vec{x},t), \quad \lambda_i, \lambda, \alpha_i, \alpha \in \mathbb{R}$$

auf $(\vec{x},t) \in M \times \mathbb{R}^{\geq 0}$, wobei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge mit stückweise glattem Rand ist.

Bestehen die Nebenbedingungen aus Randbedingungen auf $(\partial M) \times \mathbb{R}^{\geq 0}$ und Anfangsbedingungen für $M \times \{x_n = 0\}$, so werden die „Ortsvariablen“ $\vec{x}$ von der „Zeitvariablen“ t mit Hilfe eines Produktansatzes $u(\vec{x},t) = h(\vec{x})g(t)$ getrennt.

Bemerkung 8. Es gilt $\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$ in kartesischen Koordinaten. Der Differentialoperator Δ heißt **Laplaceoperator**.

6.5.1. *Wärmeleitungsgleichung.* Der Produktansatz $u(\vec{x},t) = h(\vec{x})g(t)$ führt bei der parabolischen PDGL $u_t = a^2\Delta h$ auf $M \times \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit der homogenen Randbedingung $u|_{\partial M} \equiv 0$ und der Anfangsbedingung $u(\vec{x},0) = \phi(\vec{x})$ zu

$$\begin{aligned}
h(\vec{x})g'(t) &= a^2\Delta h(\vec{x})g(t) \\
\frac{1}{a^2}\cdot\frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{\Delta h(\vec{x})}{h(\vec{x})} \equiv \mu \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

und damit zu einer Eigenwertaufgabe für h und einer gewöhnlichen DGL für g:

$$\Delta h - \mu h = 0 \text{ mit } h|_{\partial M} \equiv 0, \quad g' - a^2 \mu g = 0.$$

6.5.2. *Schwingungsgleichung.* Der Produktansatz $u(\vec{x}, t) = h(\vec{x})g(t)$ führt bei der hyperbolischen PDGL $u_{tt} = a^2 \Delta h$ auf $M \times \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit der homogenen Randbedingung $u|_{\partial M} \equiv 0$ und den Anfangsbedingungen $u(\vec{x}, 0) = \phi_1(\vec{x})$ und $u_t(\vec{x}, 0) = \phi_2(\vec{x})$ zu

$$\begin{aligned} h(\vec{x})g''(t) &= a^2 \Delta h(\vec{x})g(t) \\ \frac{1}{a^2} \cdot \frac{g''(t)}{g(t)} &= \frac{\Delta h(\vec{x})}{h(\vec{x})} \equiv \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und damit zu einer Eigenwertaufgabe für h und einer gewöhnlichen DGL für g:

$$\Delta h - \mu h = 0 \text{ mit } h|_{\partial M} \equiv 0, \quad g'' - a^2 \mu g = 0.$$

6.5.3. *Eigenfunktionen des Laplaceoperators.* Die auftretenden Eigenwerte μ_k und Eigenfunktionen h_k hängen von der Gestalt der Menge M ab. Jedoch kann die Eigenwertaufgabe $\Delta h = \mu h$ nur negative Eigenwerte.

Lemma 5. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge mit stückweise glattem Rand. Wenn $h \not\equiv 0$, $\Delta h = \mu h$ und $h|_{\partial M} \equiv 0$, dann $\mu < 0$.*

Beweis. Die erste Greensche Formel besagt für differenzierbare Funktionen f und Vektorfelder $\vec{w}$

$$\int_{\partial M} f\vec{w} \cdot d\vec{\sigma} = \int_M \operatorname{div}(f\vec{w}) d\vec{x} = \int_M \langle \operatorname{grad} f, \vec{w} \rangle + f \operatorname{div} \vec{w} d\vec{x}.$$

Mit $f = h$ und $\vec{w} = \operatorname{grad} h$ erhält man

$$0 = \int_{\partial M} h \operatorname{grad} h \cdot d\vec{\sigma} = \int_M \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} h \rangle + f \operatorname{div} \operatorname{grad} h d\vec{x} = \int || \operatorname{grad} h||^2 + \mu h^2 d\vec{x},$$

da h auf dem Rand ∂M verschwindet und $\operatorname{div} \operatorname{grad} h = \Delta h = \mu h$. □

6.5.4. *Eigenwertaufgabe für ein Rechteck.* Wir betrachten die Eigenwertaufgabe $h_{xx} + h_{yy} = \mu h$ mit $h|_{\partial M} \equiv 0$ für $M = [0, a] \times [0, b]$. Aus dem Produktansatz $h(x, y) = v(x)w(y)$ folgt

$$\begin{aligned} v''(x)w(y) + v(x)w''(y) &= \mu v(x)w(y) \\ \frac{v''(x)}{v(x)} + \frac{w''(y)}{w(y)} &= \mu \\ \frac{v''(x)}{v(x)} &= -\frac{w''(y)}{w(y)} + \mu \equiv \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen $h(0, y) = h(a, y) \equiv 0$ folgt $v(0) = v(a) = 0$. Die Eigenwertaufgabe $v'' - \alpha v = 0$ mit $v(0) = v(a) = 0$ hat die Eigenwerte und Eigenfunktionen (siehe Beispiel in Abschnitt 4.5.5)

$$\alpha_k = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad v_k(x) = \sin(k\pi x/a), \quad k \in \mathbb{N}, k > 0.$$

Mit diesen Eigenwerten α_k hat die gewöhnliche DGL für w das charakteristische Polynom $\lambda^2 + \alpha_k - \mu$ und die allgemeine Lösung

$$w_k(y) = a_k e^{\sqrt{\mu - \alpha_k} y} + b_k e^{-\sqrt{\mu - \alpha_k} y}$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Damit gilt $h(x,y) = \sum_{k=1}^\infty g_k(y)h_k(x)$. Aus $h(x,0) \equiv 0$ folgt $g_k(0) = 0$ für alle k, also $b_k = -a_k$. Aus $h(x,b) \equiv 0$ folgt $g_k(b) = 0$ für alle k, also

$$0 = a_k \left(e^{\sqrt{\mu-\alpha_k}b} - e^{-\sqrt{\mu-\alpha_k}b}\right) \Leftrightarrow a_k = 0 \text{ oder } 2\sqrt{\mu-\alpha_k}b = 2\pi m i.$$

Dies bedeutet $\mu - \alpha_k = -(m\pi/b)^2$ und $g_k(y) = \sin(m\pi y/b)$ und

$$h(x,y) = \sum_{m,k=1}^{\infty} c_{n,m} \sin(m\pi y/b)\sin(k\pi x/a), \quad c_{n,m} \in \mathbb{R}.$$

6.5.5. *Eigenwertaufgabe für den Kreis.* Wir betrachten die Eigenwertaufgabe $\mu h = h_{xx} + h_{yy}$ mit $h|_{\partial M} \equiv 0$ für $M = \{(x,y)^T : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ und suchen eine Lösung, die nur vom Radius abhängt, also $h(r)$ mit $(x,y)^T = (r\cos\phi, r\sin\phi)^T$. Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten ist in dem Fall $h''(r) + \frac{1}{r}h'(r)$. Die Gleichung $h_{xx} + h_{yy} = \mu h$ wird dann zu $h''(r) + \frac{1}{r}h'(r) = \mu h(r)$. Die Randbedingung übersetzt sich in $h(R) = 0$. Außerdem muß $\lim_{r\to 0} h(r)$ beschränkt sein. Die Lösungen der DGL für h sind die Bessel- bzw. Neumannfunktionen (siehe Abschnitt 4.4.6).

6.6. Laplacegleichung, Dirichletproblem. Ein Dirichletproblem besteht aus der Laplacegleichung $\Delta u = 0$ und der Randbedingung $u|_{\partial M} = f$. Hierbei ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge mit stückweise glattem Rand, f eine stetige Funkion auf dem Rand ∂M und u eine stetige Funktion auf M, die auf dem Inneren M° zweimal stetig differenzierbar ist.

Die Fouriermethode besteht aus der Homogenisierung der Randbedingungen und dem Produktansatz für u in geeigneten Koordinaten. Diese Koordinaten und auch der Ansatz für die Homogenisierung der Randbedingung hängen von der Menge M ab. Da die Laplacegleichung $\Delta u = 0$ homogen ist, entfällt der dritte Schritt der Fouriermethode.

6.6.1. *Dirichletproblem für ein Rechteck.* Wir betrachten das Dirichletproblem für ein Rechteck $M = [0,a] \times [0,b]$.

Mit dem Ansatz $v(x,y) = u(x,y) + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy$ bestimmen wir $\alpha_j \in \mathbb{R}$, so dass $v(0,0) = v(a,0) = v(0,b) = v(a,b) = 0$, also aus den Randbedingungen für u folgt, dass v in den Ecken des Rechtecks verschwindet. Es gilt

$$\begin{aligned}
v(0,0) &= u(0,0) + \alpha_0 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -u(0,0)\\
v(a,0) &= u(a,0) + \alpha_0 + \alpha_1 a = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{a}(-u(a,0) + u(0,0))\\
v(0,b) &= u(0,b) + \alpha_0 + \alpha_2 b = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{b}(-u(0,b) + u(0,0))\\
v(a,b) &= u(a,b) + \alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 ab = 0\\
&\Rightarrow \alpha_3 = \frac{1}{ab}(-u(a,b) + u(a,0) + u(0,b) - 2u(0,0)).
\end{aligned}$$

Gilt nun $f(0,0) = f(a,0) = f(0,b) = f(a,b) = 0$, so zerlegen wir das Dirichletproblem in vier Teilprobleme. Wir finden Funktionen u_j mit $\Delta u_j = 0$ und

$$\begin{aligned}
u_0(a,y) = u_0(x,b) = u_0(0,y) \equiv 0 &\text{ und } u_0(x,0) = f(x,0) = f_0(x)\\
u_1(x,0) = u_1(x,b) = u_1(0,y) \equiv 0 &\text{ und } u_1(a,y) = f(a,y) = f_1(y)\\
u_2(x,0) = u_2(a,y) = u_2(0,y) \equiv 0 &\text{ und } u_2(x,b) = f(x,b) = f_2(x)\\
u_3(x,0) = u_3(a,y) = u_3(x,b) \equiv 0 &\text{ und } u_3(0,y) = f(0,y) = f_3(y).
\end{aligned}$$

Der Produktansatz $u_j(x,y) = h(x)g(y)$ führt zu $h''(x)g(y) + h(x)g''(y) = 0$, also

$$\frac{h''(x)}{h(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} \equiv \mu \in \mathbb{R}.$$

$j = 2$: Die Eigenwertaufgabe $h'' - \mu h = 0$ mit $h(0) = h(a) = 0$ hat die Eigenwerte $\mu_k = -(k\pi/a)^2$ und Eigenfunktionen $h_k(x) = \sin(k\pi x/a)$ (Beispiel 4.5.5). Die DGL $g'' + \mu_k g = 0$ hat die allgemeine Lösung

$$g_k(y) = a_k e^{k\pi y/a} + b_k e^{-k\pi y/a}$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Wir erhalten $u_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y)h_k(x)$. Aus $u_2(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)h_k(x) = 0$ folgt $b_k = -a_k$ für alle k. Aus

$$\begin{aligned} u_2(x,b) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(e^{k\pi b/a} - e^{-k\pi b/a})h_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k \sinh(k\pi b/a)\sin(k\pi x/a) = f_2(x) \end{aligned}$$

folgt $2a_k \sinh(k\pi b/a) = \frac{2}{a}\int_0^a f_2(x)\sin(k\pi x/a)dx = b_k$ und

$$u_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sinh(k\pi y/a)}{\sinh(k\pi b/a)} \sin(k\pi x/a).$$

$j = 0$: Aus $u_0(x,b) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k e^{k\pi b/a} + b_k e^{-k\pi b/a})h_k(x) = 0$ folgt für alle k $b_k = -a_k e^{2k\pi b/a}$ und

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(e^{k\pi y/a} - e^{k\pi(y-2b)/a})\sin(k\pi x/a) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k e^{k\pi b/a}\sinh(k\pi(y-b)/a)\sin(k\pi x/a) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} -2a_k e^{k\pi b/a}\sinh(k\pi(y-b)/a)\sin(k\pi x/a). \end{aligned}$$

Aus

$$u_0(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} -2a_k e^{k\pi b/a}\sinh(k\pi b/a)h_k(x) = f_0(x)$$

folgt $-2a_k e^{k\pi b/a}\sinh(k\pi b/a) = \frac{2}{a}\int_0^a f_0(x)\sin(k\pi x/a)dx = b_k$ und

$$u_0(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sinh(k\pi(b-y)/a)}{\sinh(k\pi b/a)}\sin(k\pi x/a).$$

$j = 1$: Durch Vertauschung der Rolle der Variablen x und y:

$$u_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sinh(k\pi x/b)}{\sinh(k\pi a/b)}\sin(k\pi y/b),\ b_k = \frac{2}{b}\int_0^b f_1(y)\sin(k\pi y/b)dy.$$

$j = 3$: Durch Vertauschung der Rolle der Variablen x und y:

$$u_3(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sinh(k\pi(a-x)/b)}{\sinh(k\pi a/b)}\sin(k\pi y/b),\ b_k = \frac{2}{b}\int_0^b f_3(y)\sin(k\pi y/b)dy.$$

6.6.2. *Dirichletproblem für Kreis und Kreisring.* Wir betrachten das Dirichletproblem für einen Kreis $M = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ mit Radius R und einen Kreisring $M = \{(x, y)^T : R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2\}$ mit innerem Radius R_1 und äußerem Radius $R_2 > R_1$.

In beiden Fällen ist es sinnvoll, statt mit kartesischen Koordinaten $(x, y)^T$ mit Polarkoordinaten zu arbeiten, also $(x, y)^T = (r\cos\phi, r\sin\phi)^T$. Nun muss auch der Laplaceoperator und der Rand ∂M in Polarkoordinaten geschrieben werden. Es gilt

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}$$

und $\partial M = \{r = R\}$ bzw. $\partial M = \{r = R_1\} \cap \{r = R_2\}$. Das Dirichletproblem in Polarkoordinaten ist damit die PDGL

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0$$

für eine Funktion $u : \mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die 2π-periodisch in der zweiten Variablen ist, und die Nebenbedingungen $u(R_j, \phi) = f(R_j \cos\phi, R_j \sin\phi)$ für $j = 1, 2$ bzw. $u(R, \phi) = f(R\cos\phi, R\sin\phi)$, und $\lim_{r\to 0} u(r, \phi) < \infty$ erfüllt, weil $\{r = 0\} = \{x = y = 0\}$.

Der Produktansatz $u(r, \phi) = h(\phi)g(r)$ führt zu

$$\begin{aligned} r^2 g''(r)h(\phi) + rg'(r)h(\phi) + g(r)h''(\phi) &= 0 \\ r^2\frac{g''(r)}{g(r)} + r\frac{g'(r)}{g(r)} + \frac{h''(\phi)}{h(\phi)} &= 0 \\ -r^2\frac{g''(r)}{g(r)} - r\frac{g'(r)}{g(r)} = \frac{h''(\phi)}{h(\phi)} &\equiv \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und damit zur der Eigenwertaufgabe $h'' - \mu h = 0$ mit 2π-periodischem h, und der Eulerschen DGL $r^2 g'' + rg' + \mu g = 0$.

Die Eigenwertaufgabe hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 - \mu = 0$.

- $\mu > 0$: Dann ist $h(\phi) = c_1 e^{\sqrt{\mu}\phi} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}\phi}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Diese Funktion ist nur für $c_1 = c_2 = 0$ eine 2π-periodische Funktion.
- $\mu = 0$: Dann ist $h(\phi) = c_1 + c_2\phi$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Diese Funktion ist nur für $c_2 = 0$ eine 2π-periodische Funktion, also $\mu_0 = 0$ und $h_0(\phi) \equiv 1$.
- $\mu < 0$: Dann ist $h(\phi) = c_1 \cos(\sqrt{-\mu}\phi) + c_2 \sin(\sqrt{-\mu}\phi)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Diese Funktion ist nur für $\sqrt{-\mu} = k$ eine 2π-periodische Funktion, also

$$\mu_k = -k^2, \quad h_k(\phi) = \alpha_k \cos(k\phi) + \beta_k \sin(k\phi), \quad k \in \mathbb{N}, k > 0.$$

Die dazugehörigen Eulerschen DGL sind

$$r^2 g_k(r) + rg_k(r) - k^2 g(r) = 0.$$

Der Ansatz $g(r) = r^\lambda$ führt zu der charakteristischen Gleichung $\lambda(\lambda-1)+\lambda-k^2 = 0$, also $\lambda = \pm k$ und mit $r = e^t$ folgt

$$g_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k},\ k > 0, \quad g_0(r) = c_0 + d_0 \ln r.$$

Durch Aufsummieren erhält man

$$u(r, \phi) = c_0 + d_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k r^k + d_k r^{-k})(\alpha_k \cos(k\phi) + \beta_k \sin(k\phi)). \tag{62}$$

Werten wir die Bedingungen für den Kreis aus, so folgt aus $\lim_{r\to 0} u(r,\phi) < \infty$, dass $d_k = 0$ für alle k. Dann folgt aus $u(R,\phi) = f(R\cos\phi, R\sin\phi)$ die Gleichung

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k R^k(\alpha_k \cos(k\phi) + \beta_k \sin(k\phi)) = f(R,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)$$

mit den Fourierkoeffizienten der Funktion $f(R,\phi)$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(R,\phi)\cos(k\phi)dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(R,\phi)\sin(k\phi)dx.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$c_0 = a_0/2, \quad c_k\alpha_k R^k = a_k, \quad c_k\beta_k R^k = b_k. \tag{63}$$

Werten wir die Bedingungen für den Kreisring aus, so folgt aus $u(R_j,\phi) = f(R_j,\phi)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} c_0 + d_0 \ln R_j + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k R_j^k + d_k R_j^{-k})(\alpha_k \cos(k\phi) + \beta_k \sin(k\phi)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(R_j,\phi)dx \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(R_j,\phi)\cos(k\phi)dx\cos(k\phi) &+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(R_j,\phi)\sin(k\phi)dx\sin(k\phi) \end{aligned}$$

mit den Fourierkoeffizienten der Funktionen $f(R_j,\phi)$

$$a_{k,j} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(R_j,\phi)\cos(k\phi)dx, \quad b_{k,j} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(R_j,\phi)\sin(k\phi)dx.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man $c_0 + d_0 \ln R_j = a_{0,j}/2$, $(c_k R_j^k + d_k R_j^{-k})\alpha_k = a_{k,j}$ und $(c_k R_j^k + d_k R_j^{-k})\beta_k = b_{k,j}$ und

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{a_{0,1} - a_{0,2}}{2(\ln R_1 - \ln R_2)} \\ c_0 &= \frac{a_{0,1}\ln R_2 - a_{0,2}\ln R_1}{2(\ln R_2 - \ln R_1)} \\ c_k\alpha_k &= \frac{a_{k,1}R_1^k - a_{k,2}R_2^k}{R_1^{2k} - R_2^{2k}} \\ c_k\beta_k &= \frac{b_{k,1}R_1^k - b_{k,2}R_2^k}{R_1^{2k} - R_2^{2k}} \\ d_k\alpha_k &= \frac{a_{k,1}R_1^{-k} - a_{k,2}R_2^{-k}}{R_1^{-2k} - R_2^{-2k}} \\ d_k\beta_k &= \frac{b_{k,1}R_1^{-k} - b_{k,2}R_2^{-k}}{R_1^{-2k} - R_2^{-2k}}. \end{aligned}$$

7. Fouriertransformation

Wendet man die Fouriermethode auf PDGLen an, bei denen alle Argumente der gesuchten Funktion unbeschränkt sind, so ist man gezwungen eine kontinuierliche Version der Fourierreihen zu definieren.

7.1. Motivation – unendlich ausgedehnte Probleme. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung $u_t = a^2 u_{xx}$ auf einem unendlich langen Stab, also für $t, x \geq 0$, mit der homogenen Randbedingung $u(0,t) \equiv 0$, der Anfangsbedingung $u(x,0) = \phi(x)$ und der zusätzlichen Bedingung $\lim_{x\to\infty} |u(x,t)| < \infty$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

Die *Wachstumsbedingung* $\lim_{x\to\infty} u(x,t) < \infty$ ersetzt die zweite Randbedingung $u(l,t) = \Psi_2(t)$ bei begrenzten Wärmeleitungsproblemen. Sie bedeutet, dass die „Temperatur“ u überall beschränkt ist.

Der Produktansatz $u(x,t) = h(x)g(t)$ führt zu

$$h(x)g'(t) = a^2 h''(x)g(t)$$
$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{h''(x)}{h(x)} \equiv -\mu \in \mathbb{R}.$$

Daraus ergeben für h sich die Eigenwertaufgabe

$$h'' + \mu h = 0, \quad h(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} |h(x)| < \infty$$

und für g die DGL

$$g' + \mu a^2 g = 0.$$

Die allgemeinen Lösungen der DGL $h'' + \mu h = 0$ sind (siehe Beispiel 4.5.5)

$$\begin{cases} h(x) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}x) & \mu > 0 \\ h(x) = c_1 + c_2 x & \mu = 0 \\ h(x) = c_1 e^{\sqrt{-\mu}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\mu}x} & \mu < 0 \end{cases}.$$

Durch Auswertung der Anfangsbedingung $h(0) = 0$ erhält man

$$\begin{cases} h(x) = c_2 \sin(\sqrt{\mu}x) & \mu > 0 \\ h(x) = c_2 x & \mu = 0 \\ h(x) = c_1 \left(e^{\sqrt{-\mu}x} - e^{-\sqrt{-\mu}x}\right) = 2c_1 \sinh(\sqrt{-\mu}x) & \mu < 0 \end{cases}.$$

Von diesen drei Funktionen ist nur $\sin(\sqrt{\mu}x)$ für $x \to \infty$ beschränkt. Also sind alle reellen $\mu > 0$ Eigenwerte. Die dazugehörigen Eigenfunktionen sind $h_\mu(x) = \sin(\sqrt{\mu}x)$. Eine Lösung der homogenen DGL $g' + \mu a^2 g = 0$ ist $g_\mu(t) = e^{-\mu a^2 t}$.

Die Summation über alle Eigenwerte μ wird ersetzt durch das Integral über das Intervall $(0, \infty)$ und wir erhalten analog zu Gleichung (57) die Lösung

$$u(x,t) = \int_0^\infty c(\mu) e^{-\mu a^2 t} \sin(\sqrt{\mu}x) d\mu$$

mit $c(\mu) \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung $u(x,0) = \phi(x)$ liefert die Gleichung

$$\int_0^\infty c(\mu) \sin(\sqrt{\mu}x) d\mu = \phi(x).$$

Als die Menge der Eigenwerte μ diskret war, z.B. $\mathbb{N}$, konnte man die Koeffizienten $c(\mu)$ durch Vergleich mit der Fourierreihe der periodischen Fortsetzung der Funktion ϕ auf $\mathbb{R}$ bestimmen. Nun benötigen wir eine eindeutige Darstellung der Funktion ϕ als Integral der Form $\phi = \int_0^\infty c(\mu) \sin \sin(\sqrt{\mu}x) d\mu$.

7.2. Definition und Eigenschaften. Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion, die im Unendlichen verschwindet, also $\lim_{t\to\pm\infty} f(t)=0$, und absolut integrierbar ist, also $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$. Dann ist die **Fouriertransformierte** definiert als uneigentliches Integral

$$F(f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt. \tag{64}$$

Die Abbildung $f\mapsto F(f)$ heißt **Fouriertransformation**

Wir beweisen jetzt grundlegende Eigenschaften der Fouriertransformation und berechnen die Fouriertransformierte einiger Funktionen. Dabei nehmen wir an, dass die Voraussetzungen für die Existenz der Fouriertransformierten erfüllt sind und man Ableitung und Integration vertauschen kann. Es gilt

$$\begin{aligned} F(f)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(-st)+i\sin(-st))dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(st)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(st)dt. \end{aligned}$$

7.2.1. *Fouriertransformierte einer geraden Funktion.* Wenn f *gerade* ist, also $f(-t)=f(t)$ für alle $t\in\mathbb{R}$, dann folgt

$$F(f)(s) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(st)dt,$$

weil $f(t)\cos(st)$ gerade und $f(t)\sin(st)$ ungerade.

7.2.2. *Fouriertransformierte einer ungeraden Funktion.* Wenn f *ungerade* ist, also $f(-t)=-f(t)$ für alle $t\in\mathbb{R}$, dann folgt

$$F(f)(s) = -2i\int_0^{\infty} f(t)\sin(st)dt,$$

weil $f(t)\cos(st)$ ungerade und $f(t)\sin(st)$ gerade.

7.2.3. *Fouriertransformierte der Rechteckfunktion.* Die Funktion

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & |t|<1 \\ 0 & |t|\geq 1 \end{cases}$$

ist gerade und für $s\neq 0$ gilt

$$F(f_1)(s) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(st)dt = 2\int_0^1 \cos(st)dt = \frac{2}{s}[\sin(st)]_{t=0}^{t=1} = \frac{2\sin s}{s}.$$

7.2.4. *Fouriertransformierte der ungeraden Rechteckfunktion.* Die Funktion

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<1 \\ -1 & -1<t<0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ungerade und für $s\neq 0$ gilt

$$F(f_2)(s) = -2i\int_0^{\infty} f(t)\sin(st)dt = 2\int_0^1 \sin(st)dt = \frac{2i}{s}[\cos(st)]_{t=0}^{t=1} = 2i\frac{\cos s-1}{s}.$$

7.2.5. *Fouriertransformierte von* $e^{-|t|}$. Die Funktion $f_3(t) = e^{-|t|}$ ist gerade und es gilt

$$\begin{aligned} F(f_3)(s) &= 2\int_0^\infty f(t)\cos(st)dt = 2\int_0^\infty e^{-|t|}\cos(st)dt = 2\int_0^\infty e^{-t}\Re(e^{ist})dt \\ &= 2\Re\left(\int_0^\infty e^{-t}e^{ist}dt\right) = 2\Re\left(\int_0^\infty e^{t(is-1)}dt\right) \\ &= 2\Re\left(\frac{1}{is-1}[e^{t(is-1)}]_{t=0}^{t=\infty}\right) = 2\Re\left(\frac{-1}{is-1}\right) = 2\Re\left(\frac{1+is}{s^2+1}\right) = \frac{2}{s^2+1}. \end{aligned}$$

7.2.6. *Fouriertransformierte der ungeraden Fortsetzung von* $e^{-|t|}$. Die Funktion

$$f_4(t) = \begin{cases} e^{-t} & t > 0 \\ -e^{t} & t < 0 \end{cases}$$

ist ungerade und es gilt

$$\begin{aligned} F(f_4)(s) &= -2i\int_0^\infty f(t)\sin(st)dt = -2i\int_0^\infty e^{-t}\sin(st)dt = -2i\int_0^\infty e^{-t}\Im(e^{ist})dt \\ &= -2i\Im\left(\int_0^\infty e^{-t}e^{ist}dt\right) = -2i\Im\left(\int_0^\infty e^{t(is-1)}dt\right) \\ &= -2i\Im\left(\frac{1+is}{s^2+1}\right) = -2i\frac{s}{s^2+1}. \end{aligned}$$

7.2.7. *Fouriertransformierte von* e^{-t^2}. Die Funktion $f(t) = e^{-t^2}$ ist gerade und es gilt

$$F(e^{-t^2})(s) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(st)dt = \sqrt{\pi}e^{(s/2)^2}.$$

Dies haben wir mit Hilfe der Ableitung eines parameterabhängigen Integrals bewiesen.

7.2.8. *Linearität der Fouriertransformation.* Die Fouriertransformation ist *linear*, also $F(f+g) = F(f) + F(g)$ und $F(\alpha f) = \alpha F(f)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, weil das Integral linear ist.

7.2.9. *Streckung.* Die Fouriertransformation verändert sich bei Streckung des Arguments der Funktion f von t auf αt mit $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$ so:

$$\begin{aligned} F(f(\alpha t))(s) &= \int_{-\infty}^\infty f(\alpha t)e^{-ist}dt = \int_{-\infty}^\infty f(\tau)e^{-is\frac{\tau}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}d\tau, \quad (\tau = \alpha t) \\ &= \frac{1}{\alpha}F(f(t))\left(\frac{s}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

7.2.10. *Verschiebung.* Die Fouriertransformation verändert sich bei Verschiebung des Arguments der Funktion f von t auf $\alpha + t$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ so:

$$\begin{aligned} F(f(\alpha+t))(s) &= \int_{-\infty}^\infty f(\alpha+t)e^{-ist}dt = \int_{-\infty}^\infty f(\tau)e^{-is(\tau-\alpha)}d\tau, \quad (\tau = t+\alpha) \\ &= e^{is\alpha}F(f(t))(s) \end{aligned}$$

7.2.11. *Dämpfung.* Die Fouriertransformation verändert sich bei Dämpfung der Funktion f mit $e^{-i\alpha t}$ so:

$$F(e^{-i\alpha t}f(t)(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\alpha t}f(t)e^{-ist}dt = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i(s+\alpha)t}dt = F(f(t))(s+\alpha)$$

7.2.12. *Fouriertransformierte der Ableitung.* Mit Hilfe der partiellen Integration erhält man

$$\begin{aligned} F(f'(t)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-ist}dt = \left[f(t)e^{-ist}\right]_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-is)e^{-ist}dt \\ &= isF(f(t))(s), \quad \text{denn } f(\pm\infty) = 0. \end{aligned}$$

Mehrfache Anwendung dieser Formel liefert

$$F(f^{(n)}(t))(s) = (is)^n F(f(t))(s).$$

7.2.13. *Ableitung der Fouriertransformierten.* Für die *Ableitung der Fouriertransformierten* gilt

$$F(t^n f(t))(s) = i^n \frac{d^n}{ds^n} F(f(t))(s),$$

denn

$$\begin{aligned} F(t^n f(t))(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)e^{-ist}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds}\left(it^{n-1}f(t)e^{-ist}\right)dt \\ &= \frac{d}{ds}\left(\int_{-\infty}^{\infty} it^{n-1}f(t)e^{-ist}dt\right). \end{aligned}$$

7.2.14. *Faltung.* Die Faltung zweier gegebener Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-u)g(u)du$. Es gilt $F(f * g) = F(f)F(g)$. Der Beweis dieser Gleichung ähnelt den Beweisen dieser Aussage für die Fourierkoeffizienten und die Laplacetransformation.

7.3. Umkehrformel. Die Fouriertransformation genügt einer einfachen Umkehrformel

$$F(F(f))(s) = 2\pi f(-s), \quad F^{-1}(F(s))(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ist}ds. \tag{65}$$

7.3.1. *Fouriertransformierte von* $\frac{1}{t}\sin t$.

$$F\left(\frac{\sin t}{t}\right)(s) = F\left(\frac{1}{2}2\frac{\sin t}{t}\right)(s) = \frac{1}{2}F\left(F(f_1)(t)\right)(s) = \frac{1}{2}2\pi f_1(-s) = \pi f_1(s)$$

7.3.2. *Fouriertransformierte von* $\frac{1}{t}(-1+\cos t)$.

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\cos t - 1}{t}\right)(s) &= F\left(\frac{1}{2i}2i\frac{\cos t - 1}{t}\right)(s) = \frac{1}{2i}F\left(F(f_2)(t)\right)(s) = \frac{1}{2i}2\pi f_2(-s) \\ &= i\pi f_2(s) \end{aligned}$$

7.3.3. *Fouriertransformierte von* $\frac{1}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{t^2+1}\right)(s) &= F\left(\frac{1}{2}\frac{2}{t^2+1}\right)(s) = \frac{1}{2}F\left(F(f_3)(t)\right)(s) = \frac{1}{2}2\pi f_3(-s) = \pi e^{-|s|} \\ F\left(\frac{t}{t^2+1}\right)(s) &= F\left(\frac{1}{-2i}\frac{-2it}{t^2+1}\right)(s) = \frac{1}{-2i}F\left(F(f_4)(t)\right)(s) \\ &= \frac{1}{-2i}2\pi f_4(-s) = -i\pi f_4(s) \end{aligned}$$

Alternativ berechnet man die letzte Fouriertransformation als

$$F\left(\frac{t}{t^2+1}\right)(s) = F\left(t\frac{1}{t^2+1}\right)(s) = i\frac{d}{ds}F\left(\frac{1}{t^2+1}\right)(s) = i\frac{d}{ds}\pi e^{-|s|}$$
$$= i\pi\frac{d}{ds}e^{-|s|} = i\pi\begin{cases}-e^{-s} & s>0\\ e^{s} & s<0\end{cases},$$

wobei die Ableitung nach s nur für $s \neq 0$ ausgeführt werden kann.

7.3.4. *Anwendung der Formeln für Dämpfung, Verschiebung und Streckung.* Mit Hilfe der Formel für die Verschiebung für $\alpha = 2$ berechnen wir

$$F(e^{-|t+2|})(s) = e^{is2}F(e^{-|t|})(s) = e^{2is}\frac{2}{1+s^2}.$$

Mit Hilfe der Formel für die Streckung für $\alpha = 3$ berechnen wir

$$F(e^{-|3t|})(s) = \frac{1}{3}F(e^{-|t|})\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{2}{1+(s/3)^2} = \frac{6}{9+s^2}.$$

Mit Hilfe der Formel für die Dämpfung berechnen wir

$$\begin{aligned}
F(f(t)\cos(\alpha t))(s) &= F\left(f(t)\frac{1}{2}(e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t})\right)(s)\\
&= \frac{1}{2}\left(F(f(t)e^{i\alpha t})(s) + F(f(t)e^{-i\alpha t})(s)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(F(f)(s-\alpha) + F(f)(s+\alpha)\right)\\
F(f(t)\sin(\alpha t))(s) &= F\left(f(t)\frac{1}{2i}(e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t})\right)(s)\\
&= \frac{1}{2i}\left(F(f)(s-\alpha) - F(f)(s+\alpha)\right).
\end{aligned}$$

7.4. Lösung PDGL mit Hilfe der Fouriertransformation. Sucht man eine Lösung $u(x,t)$ einer PDGL, die auf einem unbeschränkten Gebiet existiert, so stellt man eine äquivalente PDGL für die Fouriertransformierte

$$U(s,t) := F(u(x,t))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ixs}dx$$

bezüglich der Variablen x auf. Wir nehmen an, dass Ableitungen nach der anderen Variablen, t, mit der Fouriertransformation vertauschbar sind, also $F(u_t(x,t))(s) = U_t(s,t)$ und $F(u_{tt}(x,t))(s) = U_{tt}(s,t)$. Die Fouriertransformierten der Ableitungen nach der Variablen x berechnen sich nach der Formel

$$F\left(\frac{d^n}{dx^n}u(x,t)\right)(s) = (is)^nF(u(x,t))(s),$$

also $F(u_x(x,t))(s) = isU(s,t)$ und $F(u_{xx}(x,t))(s) = -s^2U(s,t)$.

Treten in der PDGL für die Funktion $U(s,t)$ nur die partiellen Ableitungen nach einer Variablen auf, t, so betrachten wir sie als gewöhnliche DGL für eine von t abhängige Funktion, deren Koeffizienten noch vom Parameter s abhängen. Die frei wählbaren Funktionen von s, die in der allgemeinen Lösung $U(s,t)$ auftreten, bestimmen wir durch Auswertung der Anfangsbedingungen, weil $F(u(x,0))(s) = U(s,0)$ und $F(u_t(x,0))(s) = U_t(s,0)$.

Mit Hilfe der Umkehrformel $F(F(f))(x) = 2\pi f(-x)$ berechnen wir die Lösung $u(x,t)$ aus $U(s,t)$ als

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}F(F(u)(s,t))(-x) = \frac{1}{2\pi}F(U(s,t))(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(s,t)e^{ixs}ds.$$

7.4.1. *Wärmeleitung auf beidseitig unbeschränktem Stab.* Wir betrachten die PDGL $u_t = a^2u_{xx}$ für $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit den Randbedingungen $\lim_{x\to\pm\infty} |u(x,t)| < \infty$ und der Anfangsbedingung $u(x,0) = \phi(x)$.

Die DGL für $U(s,t) = F(u(x,t))(s)$ ist $U_t(s,t) = -a^2s^2U(s,t)$. Sie hat das charakteristische Polynom $\lambda = -(as)^2$ und die allgemeine Lösung

$$U(s,t) = c(s)e^{-(as)^2t}.$$

Aus der Anfangsbedingung folgt $c(s) = F(\phi)(s)$, denn

$$U(s,0) = c(s) = F(u(x,0))(s) = F(\phi(x))(s).$$

Damit ist die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\phi)(s)e^{-(as)^2t}e^{ixs}ds. \tag{66}$$

7.4.2. *Wärmeleitung auf einseitig unbeschränktem Stab.* Wir betrachten die PDGL $u_t = a^2u_{xx}$ für $t, x \geq 0$ mit den Randbedingungen $\lim_{x\to\infty} |u(x,t)| < \infty$, $u(0,t) \equiv 0$ und der Anfangsbedingung $u(x,0) = \phi(x)$.

Um die Fouriertransformation durchführen zu können, setzten wir u und ϕ zu ungeraden Funktionen auf $\mathbb{R}$ fort. Wie in Abschnitt 7.4.1 erhält man aus der Anfangsbedingung die Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\phi)(s)e^{-(as)^2t}e^{ixs}ds. \tag{67}$$

Diese erfüllt auch die Anfangsbedingung $u(0,t) \equiv 0$, denn nach der Formel gilt $u(0,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\phi)(s)e^{-(as)^2t}ds = 0$, denn $F(\phi)(s)$ ist als Fouriertransformation einer ungeraden Funktion wieder ungerade, $e^{-(as)^2t}$ ist eine gerade Funktion in s, ihr Produkt ist ungerade, und das Integral einer ungeraden Funktion über $\mathbb{R}$ verschwindet, falls es existiert.

7.4.3. *Wellengleichung.* Wir betrachten die PDGL $u_{tt} = a^2u_{xx}$ für $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit den Randbedingungen $\lim_{x\to\pm\infty} |u(x,t)| < \infty$ und den Anfangsbedingungen $u(x,0) = \phi(x)$ und $u_t(x,0) = \psi(x)$.

Die DGL für $U(s,t) = F(u(x,t))(s)$ ist $U_{tt}(s,t) = -a^2s^2U(s,t)$. Sie hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 = -(as)^2$ und die allgemeine Lösung

$$U(s,t) = c_1(s)\cos(ast) + c_2(s)\sin(ast).$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} U(s,0) &= c_1(s) = F(u(x,0))(s) = F(\phi(x))(s) \\ U_t(s,t) &= c_1(s)(-as)\sin(ast) + c_2(s)(as)\cos(ast) \\ U_t(s,) &= c_2(s)as = F(u_t(x,0))(s) = F(\psi(x))(s), \end{aligned}$$

also

$$U(s,t) = F(\phi)(s)\cos(ast) + \frac{F(\psi)(s)}{as}\sin(ast)$$

und

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(\phi)(s)\cos(ast) + \frac{F(\psi)(s)}{as}\sin(ast)\right)e^{ixs}ds. \tag{68}$$

KAPITEL 3

Funktionentheorie

Wir untersuchen komplexwertige Funkionen in einer komplexen Variablen.

1. Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen

1.1. Der reelle Vektorraum $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Eine komplexe Zahl ist ein Paar reeller Zahlen $z = (x, y)$. Die Menge $\mathbb{C}$ aller komplexen Zahlen ist also ein zweidimensionaler reeller Vektorraum $\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

1.1.1. *Addition und Skalarmultiplikation.* Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen sind wie in reellen Vektorräumen komponentenweise definiert. Für $z_j = (x_j, y_j) \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1). \tag{69}$$

1.1.2. *Betrag.* Auch den Betrag einer komplexen Zahl, also die *Länge* des Vektors (x, y), misst man wie im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{70}$$

1.1.3. *Folgen und Reihen.* Folgen $\{z_n = (x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ komplexer Zahlen betrachtet man als Folge bzw. Reihen im $\mathbb{R}^2$. Sie sind genau dann konvergent, wenn die beide dazugehörige Folgen bzw. Reihen reeller Zahlen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergent sind.

1.2. Der Körper $\mathbb{C}$. Die komplexen Zahlen sind der kleinste Zahlkörper, der die reellen Zahlen enthält, mit der Eigenschaft, dass jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \text{mit } i^2 + 1 = 0$$

Der Vektor $(0, 1)$ wird dabei mit i identifiziert.

1.2.1. *Multiplikation.* Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ist durch Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz, die Rechenregeln für die reellen Zahlen und die Bedingung $i^2 = -1$ eindeutig festgelegt.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = x_1x_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) - y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

1.2.2. *Division.* Falls $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $z \neq 0$, also $(x, y) \neq (0, 0)$, so gilt

$$z\frac{1}{|z|^2}(x - iy) = \frac{1}{|z|^2}(x + iy)(x - iy) = \frac{1}{|z|^2}(x^2 + y^2) = 1,$$

also

$$(x + iy)^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}. \tag{71}$$

Mit Hilfe der komplexen Konjugation läßt sich das Inverse einer komplexen Zahl einfacher schreiben.

1.2.3. *Komplexe Konjugation.* Die komplexe Konjugation $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$ ist als lineare Abbildung des $\mathbb{R}^2$ eine Spiegelung an der x-Achse. Mit Hilfe der komplexen Konjugation lassen sich $|z|$ und $1/z$ für komplexe Zahlen z einfacher ausdrücken. Es gilt

$$z\bar{z} = (x + iy)(x + iy) = x^2 + y^2 = |z|^2, \quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}, \ (z \neq 0). \tag{72}$$

Durch Nachrechnen bestätigt man sofort folgende Rechenregeln für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \tag{73}$$

1.2.4. *Potenzreihen.* Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z - z_0|^n$ konvergiert. Dies ist eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius R, der durch

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

bestimmbar ist. Auch der Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe ist R, d.h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$ absolut.

Mit Hilfe von Potenzreihen kann man Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als natürliche Fortsetzung reeller Funktionen definieren, z.B.

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Da die Potenzgesetze $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ und die Additionstheoreme durch Anwendung des Cauchyschen Produktsatzes auf Potenzreihen beweisbar waren, gelten sie auch hier, z.B. $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$.

1.3. Polarkoordinaten. Aus den Potenzreihen für die Exponentialfunktion, Sinus und Kosinus folgt für alle $\phi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{i\phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{\phi^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i(-1)^k \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\phi + i\sin\phi \\ 1 &= \left|e^{i\phi}\right|^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi. \end{aligned}$$

Jede komplexe Zahl z läßt sich als $z = re^{\phi}$ mit $r = |z|$ und $\phi \in [0, 2\pi)$ schreiben, denn $z = |z|\frac{z}{|z|}$ für $z \neq 0$ und $\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$.

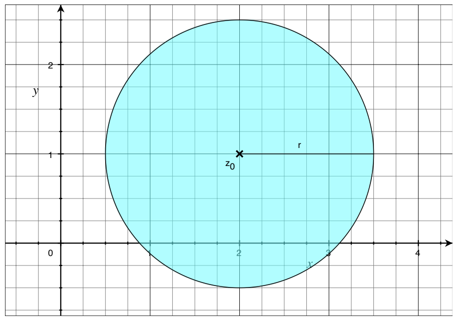

Abbildung
1. Kreisscheibe um z_0

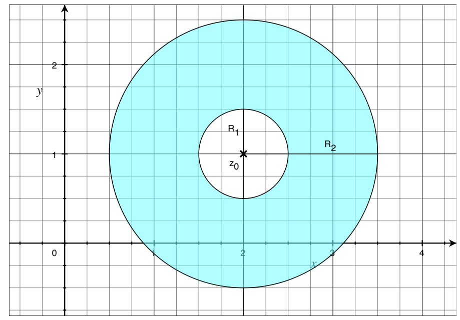

Abbildung
2. Kreisring um z_0

Sind komplexe Zahlen $z = re^{i\phi}, z_j = r_j e^{i\phi_j}$ in Polarkoordinaten gegeben, so gilt für komplexe Konjugation

$$\bar{z} = \overline{re^{i\phi}} = re^{-i\phi} \tag{74}$$

und Multiplikation

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\phi_1} r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}, \quad z^n = (re^{i\phi})^n = r^n e^{in\phi}. \tag{75}$$

Für $z = 1 + \sqrt{3}i$ gilt zum *Beispiel* $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ und $z = 2e^{i\pi/3}$, da $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ und $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nun berechnet man leicht

$$z^4 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^4 = 2^4 e^{i4\pi/3} = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + i8\sqrt{3}.$$

2. Komplexwertige Funktionen

Da sich der Graph einer Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ als eine Teilmenge des $\mathbb{R}^4$ schlecht zeichnen läßt, skizziert man den Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ und das Bild $f(D)$ für aussagekräftige Teilmengen $D \subset \mathbb{C}$, um eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ graphisch zu veranschaulichen.

2.1. Graphische Darstellung von Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. Zur Veranschaulichung komplexwertiger Funktionen ist notwendig, Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ in geeigneten Koordinaten (kartesische (x, y)-Koordinaten oder Polarkoordinaten (r, ϕ)) zu beschreiben.

2.1.1. *Kreis.* Die Menge $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ beschreibt eine offene Kreisscheibe um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Radius R, also die Menge aller Punkte in $\mathbb{C}$, deren Abstand vom Punkt z_0 kleiner als R ist. Mit Hilfe von Polarkoordinaten kann man D durch $D = \{z_0 + re^{i\phi} : r \in [0, R), \phi \in [0, 2\pi)\}$ parametrisieren. Abbildung 1 zeigt eine Kreisscheibe um den Punkt $z_0 = 2 + i$ mit Radius $r = 3/2$.

2.1.2. *Kreisring.* Die Menge $D = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ beschreibt einen offenen Kreisring um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit innerem Radius R_1 und äußerem Radius R_2, also die Menge aller Punkte in $\mathbb{C}$, deren Abstand vom Punkt z_0 größer als R_1 aber kleiner als R_2 ist. Mit Hilfe von Polarkoordinaten kann man D durch $D = \{z_0 + re^{i\phi} : r \in (R_1, R_2), \phi \in [0, 2\pi)\}$ parametrisieren. Abbildung 2 zeigt einen Kreisring um den Punkt $z_0 = 2 + i$ mit innerem Radius $R_1 = 1/2$ und äußerem Radius $R_2 = 3/2$.

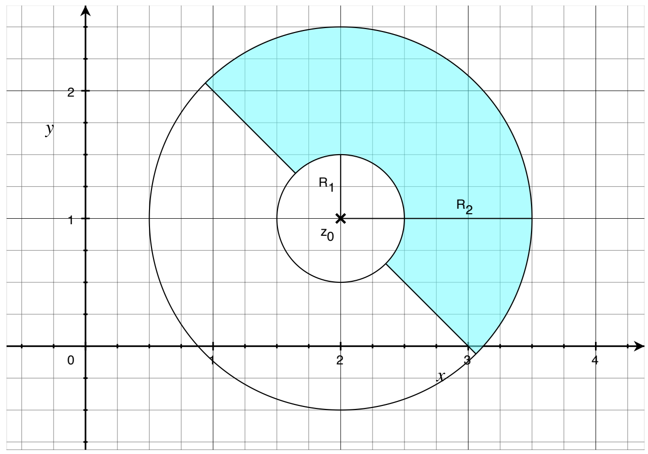

Abbildung 3. Kreisringsegment

2.1.3. *Obere Halbebene.* Die Menge $D = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ besteht aus allen Punkten oberhalb der x-Achse. Es gilt

$$D = \{z = x + iy : y > 0\} = \{z = re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (0, \pi)\}.$$

2.1.4. *Rechte Halbebene.* Die Menge $D = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ besteht aus allen Punkten rechts der y-Achse. Es gilt

$$D = \{z = x + iy : x > 0\} = \{z = re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (-\pi/2, \pi/2)\}.$$

2.1.5. *Streifen und Rechtecke.* Die Mengen

$$D_1 = \{z = x + iy : x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in [c, d]\}$$

sind Streifen parallel zur y-Achse bzw. x-Achse der Breite $b-a$ bzw. $d-c$. Die Menge $D = D_1 \cap D_2 = \{z = x+iy : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ ist ein Rechteck. Polarkoordinaten eignen sich nicht so gut, um Rechtecke und Streifen zu beschreiben.

2.1.6. *Kreisringsegmente.* Durch

$$D = \{z = z_0 + re^{i\phi} : r \in (R_1, R_2), \phi \in (\phi_1, \phi_2)\}$$

wird ein Segment eines Kreisrings beschrieben. Abbildung 3 zeigt ein Kreisringsegment um den Punkt $z_0 = 2 + i$ mit innerem Radius $R_1 = 1/2$, äußerem Radius $R_2 = 3/2$ und $\phi \in (-\pi/4, 3\pi/4)$. Dieses Winkelintervall kann auch die die Bedingung $x - 2 > -(y - 1)$ beschrieben werden.

2.2. Urbilder und Bilder einfacher Funktionen.

2.2.1. *Verschiebung.* Die Funktion $f(z) = z+a$ mit $a \in \mathbb{C}$ fest ist eine Verschiebung um den Vektor a. Das bedeutet $f(D) = \{z + a : z \in D\}$. Abbildung 4 zeigt ein Definitionsgebiet D und sein Bild $f(D)$ bei der Abbildung $f(z) = z + 4 + 2i$.

2.2.2. *Streckung.* Die Funktion $f(z) = az$ mit $a \in \mathbb{R}$ fest ist eine Streckung um den Faktor a. Das bedeutet $f(D) = \{az : z \in D\}$. Abbildung 5 zeigt ein Definitionsgebiet D und sein Bild $f(D)$ bei der Abbildung $f(z) = 3z$.

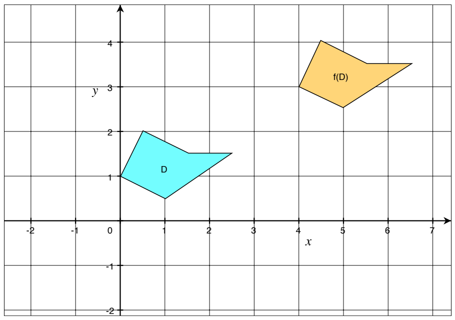

ABBILDUNG 4. Verschiebung

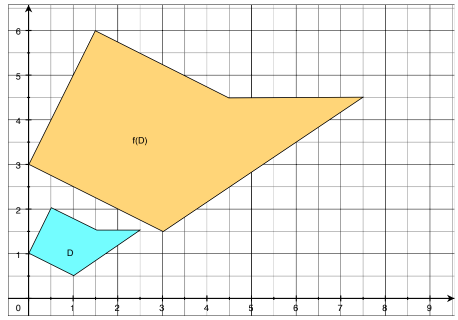

ABBILDUNG 5. Streckung

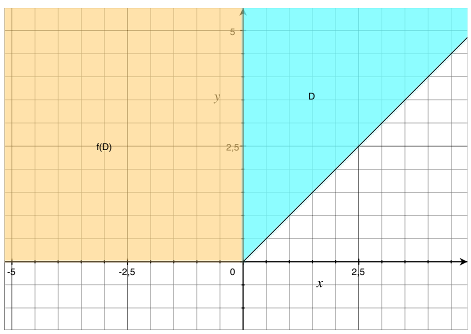

ABBILDUNG 6. Sektor unter $f(z) = z^2$

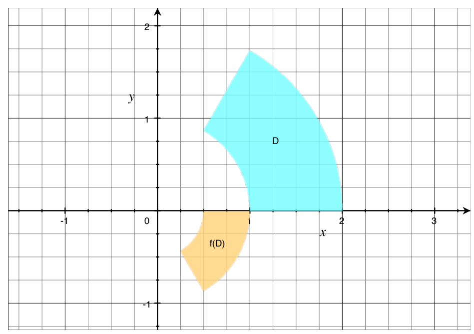

ABBILDUNG 7. Kreisringsegment unter $f(z) = z^{-1}$

2.2.3. $f(z) = z^2$. Wir betrachten die Funktion $f(z) = z^2$ auf den Definitionsgebieten $D_2 = \{z : \Im(z) > 0\}$ und $D_1 = \{z = re^{i\phi} : \phi \in (\pi/4, \pi/2), r > 0\}$. Dann gilt

$$f(D_1) = \{r^2 e^{i2\phi} : \phi \in (\pi/4, \pi/2), r > 0\} = \{Re^{i\Phi} : R > 0, \Phi \in (\pi/2, \pi)\}$$

und $f(D_2) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{>0}$. Abbildung 6 zeigt das Definitionsgebiet D_1 und sein Bild $f(D_1)$ unter der Abbildung $f(z) = z^2$.

2.2.4. *Die Funktion* $f(z) = 1/z$. Wir betrachten die Funktion $f(z) = z^{-1}$ auf dem Definitionsgebiet $D = \{z = re^{i\phi} : \phi \in (0, \pi/3), 2 > r > 1\}$. Wegen $f(re^{i\phi}) = r^{-1}e^{-i\phi}$ folgt

$$f(D) = \{r^{-1}e^{-i\phi} : \phi \in (0, \pi/2), 2 > r > 1\} = \{Re^{i\Phi} : 1 > R > 1/2, \Phi \in (-\pi/3, 0)\}.$$

Abbildung 7 zeigt das Definitionsgebiet D und sein Bild $f(D)$ unter der Abbildung $f(z) = z^{-1}$.

2.2.5. *Die Funktion* $f(z) = e^z$. Wir betrachten die Funktion $f(z) = e^z$ auf dem Streifen $D_1 = \{x+iy : y \in (0, \pi/2)\}$ und dem Rechteck $D_2 = \{x+iy : x \in [0, 2], y \in (0, \pi/2)\}$. Aus $e^z = e^x e^{iy} = re^{i\phi}$ folgt, dass $f(D_1)$ der erste Quadrant und $f(D_2)$ ein Kreisringsegment ist. Abbildung 8 zeigt das Definitionsgebiet D_2 und sein Bild $f(D_2)$ unter der Abbildung $f(z) = e^z$.

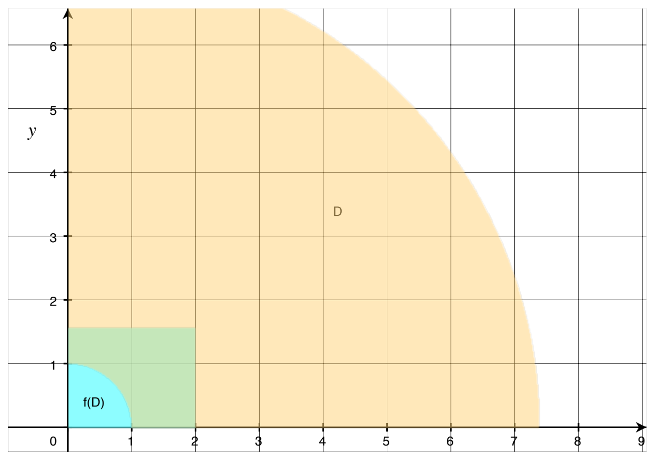

ABBILDUNG 8. Veränderung eines Rechtecks unter $f(z) = e^z$

2.3. Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion. Es sei $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, die auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ definiert ist. Wenn wir $\mathbb{C}$ mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ identifizieren, so ist f eine vektorwertige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$. Wir bezeichnen die Komponenten der vektorwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ mit u und v, also

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ oder } f = u + iv$$

und u und v sind auf D definierte reellwertige Funktionen, $u, v : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion u heißt **Realteil**, die Funktion v heißt **Imaginärteil** der Funktion f.

Beispiele:

- Wenn $f(z) = z$ mit $z = x + iy$, so ist $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = y$.
- Wenn $f(z) = \bar{z}$ mit $z = x + iy$, so ist $f(x, y) = x - iy = (x, -y)^T$, also $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = -y$.
- Wenn $f(z) = z^2$, dann $f(x, y) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ mit $z = x + iy$, also $u(x, y) = x^2 - y^2$ und $v(x, y) = 2xy$.
- Wenn $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ mit $z = x + iy$, so ist $f(x, y) = x^2 + y^2$, also $u(x, y) = x^2 + y^2$ und $v(x, y) \equiv 0$.
- Wenn $f(z) = e^z$ mit $z = x + iy$, so folgt aus den Potenzgesetzen $f(x, y) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, also $u(x, y) = e^x \cos y$ und $v(x, y) = e^x \sin y$.
- Wenn $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$, dann $f(x, y) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ mit $z = x + iy$, also $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ und $v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$.

2.4. Stetigkeit. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ ist **stetig**, wenn sie als Funktion $f : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ stetig ist. Alle Beispiele in Abschnitt 2.3 sind stetige Funktionen in ihrem Definitionsbereich.

Summe $f + g$, Produkt fg, Quotient f/g (falls $g(z) \neq 0$) und Verknüpfungen $f \circ g$ stetiger Funktionen f, g sind damit wieder stetig.

2.5. Reelle und komplexe Differenzierbarkeit. Wir betrachten Funktionen

$$f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}, \quad z = x + iy \mapsto f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

und ihre Zerlegung in Real- und Imaginärteil.

2.5.1. *Definition der komplexen Differenzierbarkeit.* Wenn f als Funktion $\mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar ist, so gilt

$$Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \text{ und } f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

ist eine gute Näherung, wenn (x, y) nahe am Punkt (x_0, y_0) ist.

Für jeden Punkt $z_0 = (x_0, y_0)$ ist die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{a} \mapsto (Df)_{z_0}\vec{a}$, eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die dem Vektor $\vec{a}$ die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt z_0 in Richtung $\vec{a}$ zuordnet. Es genügt, die partiellen Ableitungen f_x und f_y zu kennen, da sich jeder Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination der Basisvektoren $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$ schreiben läßt, und

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = a_1 f_x + a_2 f_y = (Df)\vec{a}.$$

Eine reell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ heißt auf einer offenen Menge D **komplex differenzierbar**, wenn für jeden Punkt $z_0 \in D$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $(Df)_{z_0}$ sogar $\mathbb{C}$-linear ist, also

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda \vec{a}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{a}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \vec{a} \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}.$$

2.5.2. *Cauchy-Riemann Differentialgleichungen.* Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$, die reell differenzierbar ist, ist genau dann auf einer offenen Menge D komplex differenzierbar, wenn $f_y = if_x$, weil $1 = (1, 0)^T$ und $i = (0, 1)^T$ aus der Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ folgt. Dies bedeutet

$$u_y + iv_y = \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = i(u_x + iv_x) = -v_x + iu_x.$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhält man

Theorem 6. *Eine reell differenzierbare Funktion $f = u + iv : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ ist genau dann komplex differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen u_x, u_y des Realteils u und die partiellen Ableitungen v_x, v_y des Imaginärteils v auf der Menge D die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllen:*

$$u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x \tag{76}$$

Bemerkung 9. Real- und Imaginärteil einer einer auf D komplex differenzierbaren Funktion $f = u + iv$ sind Lösungen der Laplacegleichung, da $u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0$ und $v_{xx} + v_{yy} = (v_x)_x + (v_y)_y = (-u_y)_x + (u_x)_y = -u_{yx} + u_{xy} = 0$, weil aus der komplexen Differenzierbarkeit folgt, dass f beliebig oft stetig differenzierbar ist.

2.5.3. *Beispiele (nicht) komplex differenzierbarer Funktionen.*

- Die Funktion $f(z) = z$ ist auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn $u(x, y) = x$, $v(x, y) = y$, $u_x(x, y) = 1 = v_y(x, y)$ und $u_y(x, y) \equiv 0 \equiv -v_x(x, y)$.
- Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist nicht komplex differenzierbar, denn $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$, $u_x(x, y) \equiv 1 \neq -1 \equiv v_y(x, y)$.

- Die Funktion $f(z) = z^2$ ist auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$, $u_x(x, y) = 2x = v_y(x, y)$ und $u_y(x, y) = -2y = -v_x(x, y)$.
- Die Funktion $f(z) = e^z$ ist auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$, $u_x(x, y) = e^x \cos y = v_y(x, y)$ und $u_y(x, y) = -e^x \sin y = -v_x(x, y)$.
- Die Funktion $f(z) = |z|^2$ ist nicht komplex differenzierbar, denn $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) \equiv 0$, $u_x(x, y) = 2x \neq 0 \equiv v_y(x, y)$.

2.5.4. *Definition der komplexen Ableitung.* Ist $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so genügt es, eine Richtungsableitung zu kennen, z.B. $f_x = (u_x, v_x)^T$. Die **komplexe Ableitung** der Funktion f im Punkt z ist die komplexe Zahl, die zu diesem Vektor gehört, also

$$f'(z) = \begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z) \\ v_x(z) \end{pmatrix} = u_x(z) + iv_x(z). \tag{77}$$

2.5.5. *Beispiele komplexer Ableitungen.*

- Die komplexe Ableitung der Funktion $f(z) = z$ ist $f'(z) = 1 + i \cdot 0 = 1$, da $u_x \equiv 1$ und $v_x \equiv 0$.
- Die komplexe Ableitung der Funktion $f(z) = z^2$ ist $f'(z) = 2x + i \cdot 2y = 2(x + iy) = 2z$, da $u_x(x, y) = 2x$ und $v_x(x, y) = 2y$.
- Die komplexe Ableitung der Funktion $f(z) = e^z$ ist $f'(z) = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y = e^z$, da $u_x(x, y) = e^x \cos y$ und $v_x(x, y) = e^x \sin y$.

2.5.6. *Verknüpfung komplex differenzierbarer Funktionen.* Summe $f + g$, Produkt fg, Quotient f/g (falls $g(z) \neq 0$) zweier auf $D \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbarer Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$ sind wieder auf D komplex differenzierbar und es gilt $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$, $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ und $(f/g)'(z) = (f'(z)g(z) - f(z)g'(z))/f^2(z)$.

Wenn $f : D \to \mathbb{C}$ und $g : U \to D$ komplex differenzierbar auf D bzw. U, dann ist auch $f \circ g$ auf U komplex differenzierbar und es gilt $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$.

2.5.7. *Partielle Ableitungen nach z und $\bar{z}$ (Wirtingerableitungen).* Wir betrachten eine reell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ und ihre Zerlegung in Real- und Imaginärteil $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Die partiellen Ableitungen nach z bzw. $\bar{z}$ sind definiert als

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{78}$$

Es gilt

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1, \tag{79}$$

denn

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial z} &= \frac{\partial(x + iy)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x + iy)}{\partial x} - i\frac{\partial(x + iy)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(1 - i \cdot i) = 1 \\
\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} &= \frac{\partial(x - iy)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x - iy)}{\partial x} - i\frac{\partial(x - iy)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(1 + i \cdot i) = 0 \\
\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial(x - iy)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x - iy)}{\partial x} + i\frac{\partial(x - iy)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(1 + i \cdot (-i)) = 1
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(x+iy)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x+iy)}{\partial x} + i\frac{\partial(x+iy)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(1 + i \cdot i) = 0.$$

THEOREM 7. *Eine reell differenzierbare Funktion f ist genau dann komplex differenzierbar, wenn*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0. \tag{80}$$

BEWEIS. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2}(u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)) = \frac{1}{2}(u_x - v_y + i(v_x + iu_y)).\end{aligned}$$

□

THEOREM 8. *Wenn $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, dann*

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = f'(z).$$

BEWEIS. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial(u+iv)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2}(u_x + iv_x - i(u_y + iv_y)) = \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(v_x - u_y)) = u_x + iv_x,\end{aligned}$$

da die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ erfüllt sind. □

Aus $z = x+iy$ und $\bar{z} = x-iy$ folgt $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ und $y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$. Jede in (x, y)-Koordinaten gegebene Funktion f kann man auch mit Hilfe der „Koordinaten" z und $\bar{z}$ ausdrücken. Verschwindet die partielle Ableitung von f nach $\bar{z}$, so ist f komplex differenzierbar und die komplexe Ableitung $f'(z)$ ist gerade die partielle Ableitung von f nach z.

Da die partiellen Ableitungen nach z und $\bar{z}$ linear sind und die Produktregel erfüllen, also

$$\frac{\partial(fg)}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)g + f\frac{\partial g}{\partial z} \text{ und } \frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)g + f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$$

gilt, folgt für $m, k \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z^m \bar{z}^k\right) = mz^{m-1}\bar{z}^k, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(z^m \bar{z}^k\right) = kz^m \bar{z}^{k-1}.$$

Insbesondere sind Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ innerhalb ihres Konvergenzradius und Polynome komplex differenzierbar und

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}. \tag{81}$$

2.6. Umkehrfunktionen. Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$, die in D komplex differenzierbar ist. Besitzt diese Funktion eine lokale oder sogar eine globale Umkehrfunktion? Da man f als Funktion $\mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ betrachten kann, wissen wir

(1) Wenn $\det(Df|_z) \neq 0$ für ein $z \in D$, so besitzt f in einer Umgebung des Punktes $z \in D$ eine (lokale) Umkehrfunktion.
(2) Wenn f injektiv ist und $\det(Df|_z) \neq 0$ für alle Punkte $z \in D$, so besitzt f eine globale Umkehrfunktion $g : f(D) \to D$ mit $g(f(z)) = z$ für alle $z \in D$.
(3) Die Umkehrfunktionen sind dann differenzierbar und aus der Kettenregel folgt $Dg|_{f(z)} = (Df|_z)^{-1}$.

Theorem 9. *Wenn $f'(z) \neq 0$ für eine komplex differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$, dann ist f ein einer Umgebung des Punktes $z \in D$ umkehrbar und die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f(z)$ ist $1/f'(z)$.*

Beweis. Da $f = u + iv$ komplex differenzierbar ist, sind die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt und es gilt

$$Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}$$

$$\det Df = (u_x)^2 + (v_x)^2 = (u_x + iv_x)(u_x - iv_x), \quad \det(Df|_z) = f'(z)\overline{f'(z)}.$$

Die Umkehrfunktion $g = \tilde{u} + i\tilde{v}$ ist komplex differenzierbar, denn

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_x & \tilde{u}_y \\ \tilde{v}_x & \tilde{v}_y \end{pmatrix} = Dg = (Df)^{-1} = \frac{1}{(u_x)^2 + (v_x)^2} \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ -v_x & u_x \end{pmatrix},$$

also $\tilde{u}_x = \tilde{v}_y$ und $\tilde{u}_y = -\tilde{v}_x$. Für die komplexe Ableitung gilt

$$g'(f(z)) = \frac{u_x(z) - iv_x(z)}{u_x(z)^2 + v_x(z)^2} = \frac{1}{u_x(z) + iv_x(z)} = \frac{1}{f'(z)}. \tag{82}$$

□

2.6.1. *Definition des natürlichen Logarithmus.* Die Funktion $f(z) = e^z$ ist für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiert und lokal umkehrbar, denn $f'(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \neq 0$, da $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das Bild der Exponentialfunktion ist $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$.

Wir suchen ein möglichst großes Definitionsgebiet, auf dem die Exponentialfunktion injektiv ist. Da die reelle Exponentialfunktion streng monoton wachsend und die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$, 2π-periodisch ist, gilt

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{x_1} e^{iy_1} = e^{x_2} e^{iy_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ und } y_2 = y_1 + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Exponentialfunktion ist auf jedem Streifen $\{z = x + iy : y \in (c, d)\}$ mit $d - c \leq 2\pi$ injektiv, zum Beispiel auf $D = \{z = x + iy : y \in (-\pi, \pi)\}$. Es gilt $\exp(D) = \{z = re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (-\pi, \pi)\}$. Die auf $\exp(D)$ definierte Umkehrfunktion heißt **Hauptwert des natürlichen Logarithmus**:

$$\mathrm{Ln} : \{z = re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (-\pi, \pi)\} \to D \subset \mathbb{C}, \quad \mathrm{Ln}(re^{i\phi}) = (\ln r) + i\phi. \tag{83}$$

2.6.2. *Definition einer Quadratwurzel.* Die Funktion $f(z) = z^2$ ist für alle $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}$ definiert und für alle $z \neq 0$ lokal umkehrbar, denn $f'(z) = 2z$. Wir suchen ein möglichst großes Definitionsgebiet, auf dem $z \mapsto z^2$ injektiv ist. Für zwei komplexe Zahlen $z_j = r_j e^{i\phi_j}$ mit $r_j > 0$ gilt

$$\begin{aligned}(r_1 e^{i\phi_1})^2 = (r_2 e^{i\phi_2})^2 &\Leftrightarrow r_1^2 e^{i2\phi_1} = r_2^2 e^{i2\phi_2}\\ &\Leftrightarrow r_1 = r_2 \text{ und } 2\phi_1 = 2\phi_2 + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow r_1 = r_2 \text{ und } \phi_1 = \phi_2 + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z_1 = \pm z_2.\end{aligned}$$

Die Funktion $z \mapsto z^2$ ist auf jedem offenen Sektor $\{re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (a,b)\}$ mit Öffnungswinkel $b - a \leq \pi$ injektiv, zum Beispiel $D = \{re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (-\pi/2, \pi/2)\}$. Es gilt $f(D) = \{z = re^{i\phi} : r > 0, \phi \in (-\pi, \pi)\}$. Auf $f(D)$ kann man die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion von f definieren:

$$\sqrt{} : f(D) \to D, \quad \sqrt{re^{i\phi}} = \sqrt{r} e^{i\phi/2}$$

Bemerkung 10. Möchte man für die Funktionen $z \mapsto e^z$ bzw. $z \mapsto z^2$ lokale Umkehrfunktionen um Punkte z_0 definieren, die nicht in den Definitionsgebieten der in den Abschnitten 2.6.1 und 2.6.2 Funktionen enthalten sind, so wählt man andere, passende Streifen bzw. Sektoren.

3. Komplexe Kurven- und Flächenintegrale

Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, $f = u + iv$ ihre Zerlegung in Real- und Imagnärteil.

3.1. Komplexe Flächenintegrale. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine messbare Menge. Dann ist

$$\int_D f(x,y)d(x,y) := \int_D u(x,y)d(x,y) + i\int_D v(x,y)d(x,y). \tag{84}$$

Zum *Beispiel* erhält man für die Funktion $f(z) = z^2$ und das Rechteck $D = \{z = x + iy : x \in [a,b], y \in]c,d]\}$ das Integral

$$\begin{aligned}\int_D f(x,y)d(x,y) &= \int_D (x+iy)^2 d(x,y) = \int_D x^2 - y^2 + i2xyd(x,y)\\ &= \int_D x^2 - y^2 d(x,y) + i\int_D 2xyd(x,y)\\ &= \int_a^b \int_c^d x^2 - y^2 dydx + i\int_a^b\int_c^d 2xydydx\\ &= \int_a^b \left[x^2 y - \frac{1}{3}y^3\right]_c^d dx + i\int_a^b \left[xy^2\right]_c^d dx\\ &= \int_a^b x^2(d-c) - \frac{1}{3}(d^3 - c^3)dx + i\int_a^b x(d^2 - c^2)dx\\ &= \left[\frac{1}{3}x^3(d-c) - \frac{1}{3}x(d^3 - c^3)\right]_a^b + i\left[\frac{1}{2}x^2(d^2 - c^2)\right]_a^b\\ &= \frac{1}{3}((b^3 - a^3)(d-c) - (b-a)(d^3 - c^3)) + i(b^2 - a^2)(d^2 - c^2).\end{aligned}$$

3.2. Komplexe Kurvenintegrale. Das komplexe Kurvenintegral einer stetigen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ entlang einer stückweise differenzierbaren Kurve $\gamma : I = [a, b] \to D$ ist

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{85}$$

- Ist $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ die Zerlegung von γ in Real- und Imaginärteil, so gilt $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$.
- Ist ein stückweise differenzierbarer Weg γ aus den differenzierbaren Teilstücken $\gamma_1, \ldots \gamma_m$ zusammengesetzt, also $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_m$, so gilt
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_m} f(z)dz.$$
- Das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)dz$ hängt nur vom Bild $\gamma(I)$ der Kurve (Spur) und der Durchlaufrichtung ab. Kehrt man die Durchlaufrichtung um, so wechselt auch das Vorzeichen des komplexen Kurvenintegrals.

3.2.1. *Beispiele komplexer Kurvenintegrale.*

- Wenn $f(z) = z^2$ und $\gamma(t) = t$ für $t \in [a, b]$, dann folgt $\gamma'(t) \equiv 1$ und
$$\int_\gamma z^2 dz = \int_a^b t^2 \cdot 1dt = \int_a^b t^2 dt = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$
- Wenn $f(z) = z^2$ und $\gamma(t) = it$ für $t \in [a, b]$, dann folgt $\gamma'(t) \equiv i$ und
$$\int_\gamma z^2 dz = \int_a^b (it)^2 \cdot idt = -i\int_a^b t^2 dt = -\frac{i}{3}(b^3 - a^3).$$
- Wenn $f(z) = z^2$ und $\gamma(t) = e^{i\pi/3}t$ für $t \in [0, 1]$, dann folgt $\gamma'(t) \equiv e^{i\pi/3}$ und
$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^1 (e^{i\pi/3}t)^2 e^{i\pi/3} dt = \int_0^1 e^{i\pi} t^2 dt = e^{i\pi}\frac{1}{3}.$$
- Wenn $f(z) = z^2$ und $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$, dann folgt $\gamma'(t) = ie^{it}$ und
$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^{2\pi} (e^{it})^2 ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} ie^{3it} dt = \frac{1}{3}\left[e^{3it}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}(1 - 1) = 0.$$
- Wenn $f(z) = \frac{1}{z}$ und $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$, dann folgt $\gamma'(t) = ie^{it}$ und
$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$$
- Wenn $f(z) = z$ und γ der Rand des Rechtecks $[a, b] \times [c, d]$, dann $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_4$ mit
$$\gamma_1(t) = at, \quad , \gamma_2(t) = a + ibt, \quad \gamma_3(t) = a + ib - at, \quad \gamma_4(t) = ib - ibt$$
für $t \in [0, 1]$ und
$$\gamma_1'(t) = a, \quad , \gamma_2'(t) = ib, \quad \gamma_3'(t) = -a, \quad \gamma_4(t) = -ib$$

für $t \in [0,1]$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma zdz &= \int_{\gamma_1} zdz + \int_{\gamma_2} zdz + \int_{\gamma_3} zdz + \int_{\gamma_4} zdz \\ &= \int_0^1 atadt + \int_0^1 (a+ibt)ibdt + \int_0^1 -(a+ib-at)adt + \int_0^1 -(ib-ibt)ibdt \\ &= \int_0^1 2a^2t - a^2 - 2b^2t + b^2dt = \left[a^2(t^2-t) - b^2(t^2-t)\right]_0^1 = 0.\end{aligned}$$

- Wenn $f(z) = z$ und γ der Rand des Halbkreises $\{re^{i\phi} : 1 \geq r \geq 0, \phi \in [0,\pi]\}$, dann $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1(t) = t$ für $t \in [-1,1]$ und $\gamma_2(t) = e^{it}$ mit $t \in [0,\pi]$. Es folgt $\gamma_1(t) \equiv 1$, $\gamma_2(t) = ie^{it}$ und

$$\int_\gamma zdz = \int_{\gamma_1} zdz + \int_{\gamma_2} zdz = \int_{-1}^1 tdt + \int_0^{2\pi} e^{it}ie^{it}dt = \frac{1}{2}[t^2]_{-1}^1 + \frac{1}{2}[e^{it}]_0^\pi = 0.$$

3.2.2. *Interpretation des komplexen Kurvenintegrals als Zirkulation.* Zerlegt man die Funktion $f = u + iv$ und den Weg $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ in Real- und Imaginärteil, so erhält man

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \left(u(\gamma(t) + iv(\gamma(t))\right)\left(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\right)dt \\ &= \int_a^b u(\gamma(t))\gamma_1'(t) + iv(\gamma(t))\gamma_1'(t) + iu(\gamma(t))\gamma_2'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)dt \\ &= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} u(\gamma(t)) \\ -v(\gamma(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \right\rangle + i \left\langle \begin{pmatrix} v(\gamma(t)) \\ u(\gamma(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_\gamma \vec{w} \cdot \vec{x} \quad \text{ mit } \vec{w} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)dz$ ist die Zirkulation des (komplexwertigen) Vektorfeldes $\vec{w} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ entlang der Kurve γ.

3.2.3. *Die Kurvenintegrale $\int_\gamma (z-z_0)^n\, dz$ mit $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$.* Wir berechnen das komplexe Kurvenintegral der Funktion $f(z) = (z-z_0)^n$ entlang der Kreislinie um z_0 mit Radius R für beliebige $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$. Die Funktion f ist komplex differenzierbar auf der Menge $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Mit $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ und $\gamma'(t) = Rie^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma (z-z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (z_0 + Re^{it} - z_0)^n Rie^{it}dt = \int_0^{2\pi} R^{1+n}ie^{it(1+n)}dt \\ &= \begin{cases} \int_0^{2\pi} idt & n = -1 \\ \left[R^{1-n}\frac{1}{1-n}e^{it(1-n)}\right]_0^{2=\pi} & n \neq -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}.\end{aligned}$$

3.3. Cauchyscher Integralsatz. Es ist kein Zufall, dass viele der in Abschnitt 3.2 berechneten komplexen Kurvenintegrale entlang geschlossener Kurven verschwinden.

THEOREM 10 (**Cauchyscher Integralsatz**). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{C}$ und $G \subset D$ eine Menge mit stückweise glattem Rand ∂G, deren Abschluß in D enthalten ist. Wenn f komplex differenzierbar in D ist, dann gilt*

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 0.$$

Das komplexe Kurvenintegral $\int_{\partial G} \frac{1}{z} dz$ entlang der Kreislinie $\partial G = \{z : |z| = 1\}$ im Beispiel in Abschnitt 3.2.1 verschwindet nicht, weil die Funktion $f(z) = 1/z$ nicht auf dem Kreis $G = \{z : |z| \leq 1\}$ komplex differenzierbar ist. Sie hat eine Singularität in $z = 0$.

3.3.1. *Beweis des Cauchyschen Integralsatzes.* Man schreibt das komplexe Kurvenintegral als Zirkulation und wendet den Integralsatz $\int_{\partial G} \vec{w} \cdot d\vec{x} = \int_G \operatorname{rot} \vec{w} d\vec{x}$ an. Da das Vektorfeld $\vec{w}$ aus zwei Komponenten besteht, ist $\operatorname{rot} \vec{w}$ eine komplexwertige Funktion.

$$\int_{\partial G} f(z)dz = \int_{\partial G} \vec{w}(x,y) \cdot d\vec{x} = \int_G \operatorname{rot} \vec{w}(x,y)d(x,y)$$
$$\operatorname{rot} \vec{w} = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i \operatorname{rot} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$
$$= u_y - (-v)_x + i(v_y - u_x) = u_y + v_x + i(v_y - u_x) = 0,$$

da f komplex differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ erfüllt. Also $\int_{\partial G} f(z)dz = \int_G 0d(x,y) = 0$.

3.3.2. *Orientierung des Randes.* Der Rand ∂G der Menge G kann aus einer oder auch mehreren Komponenten bestehen. Wenn $G = \{z : |z| < R\}$ ein Kreis, dann besteht $\partial G = \{|z| = R\}$ aus einer Komponente. Die Kurve $\gamma(t) = Re^{it}$ ist eine geeignete Parametrisierung. Wenn $G = \{z : R_1 < |z| < R_2\}$ ein Kreisring, dann besteht $\partial G = \{|z| = R_1\} \cup \{|z| = R_2\}$ aus zwei Komponenten. Die Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1(t) = R_1 e^{it}$ und $\gamma_2(t) = R_1 e^{-it}$ ist eine geeignete Parametrisierung. Der innere Kreis muss im Uhrzeigersinn durchlaufen werden, so dass die Fläche beim Durchlaufen des Randes immer links vom Rand liegt.

3.4. Stammfunktionen. Wir betrachten eine komplex differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ und einen Basispunkt $z_0 \in D$ und möchten eine komplexe Stammfunktion F mit Hilfe des komplexen Kurvenintegrals als $F(z) = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta$ definieren, wobei γ eine Kurve ist, die den Basispunkt z_0 mit dem Zielpunkt z verbindet. Dies ist nur sinnvoll, wenn das Kurvenintegral *unabhängig* von der gewählten Kurve ist.

LEMMA 6. *Es seien $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion, $z_0, z_1 \in D$ und γ_1, γ_2 zwei Kurven von z_0 nach z_1. Wenn $\gamma_1 - \gamma_2 = \partial G$ und $G \subset D$, dann gilt $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.*

BEWEIS. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

□

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ist **einfach zusammenhängend**, falls für jedes Paar stückweise differenzierbarer Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, das von $\gamma_1 - \gamma_2$ oder $\gamma_2 - \gamma_1$ umrandete Gebiet vollständig in D enthalten ist.

THEOREM 11. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende Menge, $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $z_0 \in D$. Dann ist die durch*

$$F(z) := \int_\gamma f(\zeta) d\zeta,$$

wobei $\gamma : [0,1] \to D$ eine beliebige stückweise differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$ ist, eine Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$ definiert.

BEWEIS. Die Funktion F ist wohldefiniert, weil D einfach zusammenhängend und damit das Kurvenintegral wegunabhängig ist. Benutzt man die Wege $\gamma(t) = z + t$ bzw. $\gamma(t) = z + it$, so ergibt sich $F_x(z) = u(z) + iv(z)$ und $F_y(z) = -v(z) + iu(z)$, also erfüllen die partiellen Ableitungen der Funktion F die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, F ist komplex differenzierbar und $F'(z) = F_x(z) = f(z)$. □

3.4.1. *Logarithmus als Stammfunktion.* Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist nur auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert und holomorph. Es gibt geschlossene Kurven in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, die ein Gebiet umschließen, das 0 enthält, z.B. $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Entfernt man aber nicht nur den Punkt 0 sondern die ganze negative reelle Achse aus dem Definitionsgebiet, so umschließt jede geschlossene Kurve in $D := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ ein Gebiet, das ganz in D liegt. Die Menge D ist also einfach zusammenhängend und mit $z_0 = 1$ gilt

$$F(z) = \int_\gamma \frac{1}{\zeta} d\zeta = \mathrm{Ln}(z),$$

denn F ist als holomorphe Funktion auf einer zusammenhängenden Menge durch die Werte auf der reellen Achse bestimmt und mit $\gamma(t) = t$ für $t \in [1, x]$ gilt dort $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^x = \ln x$ für alle $x \in \mathbb{R}, x > 0$.

3.4.2. arctan *als Stammfunktion.* Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ist nur auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ definiert und holomorph. Es gibt geschlossene Kurven in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, die ein Gebiet umschließen, das i oder $-i$ enthält, z.B. $\gamma(t) = \pm i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Entfernt man aber nicht nur die Punkte $\pm i$ sondern noch weitere Teile der imaginären Achse aus dem Definitionsgebiet, so umschließt jede geschlossene Kurve in $D := \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$ ein Gebiet, das ganz in D liegt. Die Menge D ist also einfach zusammenhängend und mit $z_0 = 0$ gilt

$$F(z) = \int_\gamma \frac{1}{\zeta} d\zeta = \arctan z,$$

denn F ist als holomorphe Funktion auf einer zusammenhängenden Menge durch die Werte auf der reellen Achse bestimmt und mit $\gamma(t) = t$ für $t \in [0, x]$ gilt dort $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

4. Cauchysche Integralformel und Folgerungen

4.1. Cauchysche Integralformel. Wir bezeichnen die Kreisscheibe um den Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit Radius R mit $K_R(z)$.

Theorem 12 (**Spezielle Cauchysche Integralformel**). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $z \in D$, $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und $K_R(z) \subset D$. Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis. Es sei $G = \{w : \varepsilon < |w - z| < R\} \subset K_R(z)$ ein Kreisring um z mit äußerem Radius R und innerem Radius ε. Da die Funktion

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

auf G komplex differenzierbar ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial G} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial K_R(z) - \partial K_\varepsilon(z)} g(\zeta) d\zeta \\ \int_{\partial K_R(z)} g(\zeta) d\zeta &= \int_{\partial K_\varepsilon(z)} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Nun gilt mit der Parametrisierung $\gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{it}$ für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta &= f(z) \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{1}{z + \varepsilon e^{it} - z} i\varepsilon e^{it} dt \\ &= f(z) 2\pi i \\ \left| \int_{\partial K_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| &= \left| \int_0^{2\pi} f'(z + \varepsilon(t) eit) i\varepsilon e^{it} dt \right| \leq 2\pi\varepsilon M \end{aligned}$$

mit $M = \max_{K_R(z)} |f'(z)|$ und $\varepsilon(t) \in [0, \varepsilon]$ wegen des Mittelwertsatzes. Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert die Cauchysche Integralformel. $\square$

Theorem 13 (**Allgemeine Cauchysche Integralformel**). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $G \subset D$ eine offene Menge mit stückweise glattem Rand und $\bar{G} \subset D$ und $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Dann gilt für alle $z \in G$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{86}$$

Beweis. Es gilt $\partial G = \partial(G \setminus K_R(z)) + \partial K_R(z)$ und die Funktion $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ist auf $G \setminus K_R(z)$ komplex differenzierbar. $\square$

Die Funktionswerte einer komplex differenzierbaren Funktion in einem Gebiet G sind also durch die Funktionswerte auf dem Rand dieses Gebietes eindeutig bestimmt.

4.2. Existenz beliebiger komplexer Ableitungen. Wir betrachten eine komplex differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, eine offene Teilmenge $G \subset D$ mit stückweise glattem Rand und $\bar{G} \subset D$.

Für jedes $z \in G$ läßt sich eine Umgebung des Randes ∂G finden, deren Abschluß den Punkt z nicht enthält. Deshalb ist die Funktion $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}$ auf dieser Umgebung gleichmäßig stetig.

THEOREM 14. *Die Funktion f ist beliebig oft komplex differenzierbar und*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{87}$$

BEWEIS. Da Integration und partielle Ableitung nach z bzw. $\bar{z}$ vertauschbar sind folgt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{d}{dz} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

und mit vollständiger Induktion

$$f^{n+1}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{d}{dz} \left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \right) d\zeta = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta.$$

□

4.3. Abschätzung der Ableitungen. Mit $\bar{G} = K_R(z)$ folgt aus der Integralformel für $f^{(n)}(z)$ eine Abschätzung für $|f^n(z)|$.

THEOREM 15. *Wenn $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist und $K_R(z) \subset D$, dann gilt*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{Mn!}{R^n} \text{ mit } M = \max_{K_R(z)} |f(\zeta)|. \tag{88}$$

BEWEIS. Mit $\gamma(t) = z + Re^{it}$ und $\gamma'(t) = Rie^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ folgt

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| \\
&= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z + Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}} iRe^{it} dt \right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z + Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}} iRe^{it} \right| dt = \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \left| f(z + Re^{it}) \right| dt \\
&\leq \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} M dt = \frac{Mn!}{R^n}.
\end{aligned}$$

□

4.4. Satz von Liouville. Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und beschränkt ist, dann ist f konstant.

BEWEIS. Da f auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, also $D = \mathbb{C}$, ist $K_R(z) \subset \mathbb{C}$ für alle $R > 0$ und alle $z \in \mathbb{C}$. Es sei M eine obere Schranke für $|f|$, also $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus der Abschätzung der ersten Ableitung folgt

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R} \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

also $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dies bedeutet $f \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{C}$. □

Bemerkung 11. Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ ist auf $\mathbb{R}$ beliebig oft reell differenzierbar, beschränkt und nicht konstant.

4.5. Fundamentalsatz der Algebra. Jedes Polynom $f(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j$ mit $c_j \in \mathbb{C}$ und $c_n \neq 0$ besitzt eine komplexe Nullstelle oder ist konstant.

Beweis. Aus

$$\lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{f(z)}{c_n z^n}\right| = 1 \text{ und } \lim_{|z|\to\infty} |c_n z^n| = \infty \text{ folgt } \lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty.$$

Wenn f keine Nullstelle hat, dann ist $g(z) = 1/f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert und komplex differenzierbar. Die Funktion g ist beschränkt, denn es existieren R, M_1, M_2, so dass $|f(z)| \leq M_1$ für alle z mit $|z| \geq R$, weil $\lim_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0$, und $|f(z)| \leq M_2$ für alle z in der kompakten Menge $K_R(0)$. Aus dem Satz von Liouville folgt $g(z) \equiv c$, also ist auch f ein konstantes Polynom. □

4.6. Maximumprinzip und harmonische Funktionen. Eine komplex differenzierbare Funktion nimmt ihr Maximum auf dem Rand an:

Theorem 16 (Maximumprinzip). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $G \subset D$ eine Menge mit stückweise glattem Rand und $\bar{G} \subset D$ und $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Dann gilt*

$$\max_{z\in\bar{G}} |f(z)| = \max_{z\in\partial G} |f(z)|. \tag{89}$$

Beweis. Wenn $z_0 \in G$ ein innerer Punkt ist, in dem das Maximum angenommen wird, also $f(z_0) = \max_{z\in\bar{G}} |f(z)|$, dann gilt für jede Kreisscheibe $K_R(z_0) = \{z : |z - z_0| \leq R\}$ mit $K_R(z_0) \subset G$

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{z_0 + Re^{it} - z_0} iRe^{it} dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + Re^{it})\right| dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\, dt = |f(z_0)|. \end{aligned}$$

Dies kann nur gelten, falls $|f(z)| = |f(z_0)|$ für alle $z \in \partial K_R(z_0)$. Da man G durch Kreisscheiben ausfüllen kann, folgt $|f(z)| = |f(z_0)|$ für alle $z \in \bar{G}$. □

Auch für harmonische Funktionen gilt ein Maximumprinzip.

Lemma 7. *Wenn $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, dann ist u harmonisch, also $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \equiv 0$.*

Beweis. Die Funktion f ist beliebig oft stetig differenzierbar und aus den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen folgt

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = v_{xy} - v_{xy} \equiv 0.$$

□

Theorem 17. *Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine einfach zusammenhängende Menge. Eine Funktion $u : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion f, wenn u harmonisch ist.*

Beweis. Wenn u Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion f ist, dann folgt aus Lemma 7, dass u harmonisch ist.

Wenn u harmonisch ist, dann ist das Vektorfeld $\vec{w} = (-u_y, u_x)^T$ wirbelfrei, weil $\operatorname{rot} \vec{w} = (-u_y)_y - (u_x)_x = -\Delta u = 0$. Da D einfach zusammenhängend ist, besitzt $\vec{w}$ eine Potentialfunktion v, also $\operatorname{grad} v = (v_x, v_y)^T = \vec{w} = (-u_y, u_x)^T$. Dies bedeutet, dass $f = u + iv$ die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt und damit komplex differenzierbar ist. $\square$

4.7. Potenzreihenentwicklungen und Holomorphie. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine komplex differenzierbare Funktion, $z_0 \in D$, $K_R(z_0) = \{z : |z - z_0| \leq R\}$ mit $K_R(z_0) \subset D$ und z ein innerer Punkt der Kreisscheibe $K_R(z_0)$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta\right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

wobei $\sum$ und $\int$ vertauschbar sind, weil die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$ auf jeder kompakten Menge, die echt in $K_R(z_0)$ enthalten ist, gleichmäßig konvergiert.

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn sie sich um jeden Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickeln läßt (und diese Potenzreihe dort die Funktion darstellt).

Theorem 18. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn sie auf D komplex differenzierbar ist.*

Bemerkung 12. Der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung einer holomorphen Funktion f hängt vom Punkt ab, um den die Potenzreihe entwickelt wird, z.B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - 4 - (z - 4)} = \frac{1}{-3 - (z - 4)} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-4}{-3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 4)^n}{(-3)^{n+1}},$$

wobei die linke Potenzreihe um $z_0 = 0$ den Konvergenzradius 1 und die rechte Potenzreihe um $z_0 = 4$ den Konvergenzradius 3 hat.

4.8. Identitätsprinzip - analytische Fortsetzung.

4.8.1. *Nullstellenverteilung einer holomorphen Funktion.* Ein Polynom p ist eine holomorphe Funktion und hat maximal $\operatorname{grad} p$ verschiedene, also endlich viele, Nullstellen. Es gibt auch holomorphe Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen, zum Beispiel hat die Funktion $\sin z$ die reellen Nullstellen $z_k = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Jedoch besitzen diese Nullstellen keinen Häufungspunkt.

Theorem 19. *Wenn $D \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend ist und die Nullstellen einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ einen Häufungspunkt in D haben, dann $f \equiv 0$.*

Beweis. Wenn $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $f(z_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in D$ und $z_n \neq z_0$ für alle n, dann gilt $f(z_0) = 0$, weil f stetig ist. Wir betrachten die Potenzreihenentwicklung von $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ um z_0. Wenn $f \not\equiv 0$, dann existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $a_k \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < k$. Die Funktion $g(z) = f(z)/(z - z_0)^k$ ist holomorph und $g(z_n) = f(z_n)/(z_n - z_0)^n = 0$. Nun folgt $g(z) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = 0$. Dies bedeutet $a_k = 0$, denn $g(z_0) = a_k$. □

4.8.2. *Identitätsprinzip.*

Theorem 20. *Es seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und D eine zusammenhängende Menge. Wenn $f(z_n) = g(z_n)$ für unendlich viele Punkte z_n, die einen Häufungspunkt in D besitzen, dann $f \equiv g$ auf D.*

Die Voraussetzungen des Identitätsprinzips sind zum Beispiel erfüllt, wenn $f(z) = g(z)$ für alle z in einer offenen Menge $U \subset D$ oder für alle z in einem reellen Intervall $(a, b) \subset D$.

4.8.3. *Fortsetzung der reellen Funktion* $\ln x$. Die Fortsetzung einer reell analytischen Funktion zu einer holomorphen Funktion auf eine einfach zusammenhängende Umgebung des reellen Definitionsgebietes ist eindeutig und dort durch die entsprechende komplexe Potenzreihe gegeben, denn das reelle Definitionsgebiet ist eine Menge mit Häufungspunkt.

Zum Beipiel ist die Funktion $\ln x$ für $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$ definiert und um jeden Punkte $x_0 > 0$ in eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius x_0 entwickelbar. Es gilt

$$\ln x = \ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x_0^n n}(x - x_0)^n \text{ für } |x - x_0| < x_0.$$

Die entsprechende komplexe Potenzreihe

$$\ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x_0^n n}(z - x_0)^n \text{ für } |z - x_0| < x_0$$

definiert eine holomorphe Funktion auf der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < x_0\}$, die für $z \in \mathbb{R}$ und $0 < z < 2x_0$ mit $\ln z$ und deshalb auch mit dem Hauptwert des Logarithmus, wie er in Abschnitt 2.6.1 als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definiert wurde, übereinstimmt.

5. Isolierte Singularitäten und Residuensatz

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $z_0 \notin D$; z.B. $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z_0 = 0$ und

$$f(z) = \frac{\cosh z - 1}{z^2},\ f(z) = \frac{1}{z^2} \text{ oder } f(z) = e^{1/z}.$$

Kann man die Funktion f trotzdem in der Nähe des Punktes z_0 gut beschreiben? Gibt es eine Reihenentwicklung der Funktion f um den Punkt z_0, die die Potenzreihenentwicklung ersetzt? Kann man die Singularitäten qualitativ unterscheiden?

5.1. Laurentreihen. Wenn das Definitionsgebiet D den offenen Kreisring

$$K_{R_1,R_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\} \tag{90}$$

enthält, dann kann man f um z_0 in eine Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ entwickeln, die für alle $z \in K_{R_1,R_2}(z_0)$ konvergiert. Eine solche Reihe heißt **Laurentreihe** von f um z_0.

THEOREM 21 (**Laurentreihenentwicklung**). *Wenn $f : K_{R_1,R_2}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt für jede Kurve $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $R_1 < r < R_2$ und für alle $z \in K_{R_1,R_2}(z_0)$:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{91}$$

Diese Laurentreihenentwicklung um z_0 ist eindeutig.

5.1.1. *Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der Laurentreihenentwicklung.* Es sei $z \in K_{R_1,R_2}(z_0)$. Dann existieren $R_1 < r_1$ und $r_2 < R_2$ mit $z \in K_{r_1,r_2}(z_0)$. Der Rand des abgeschlossenen Kreisringes $\overline{K_{r_1,r_2}(z_0)}$ besteht aus zwei Kurven γ_1 und $-\gamma_2$ mit $\gamma_1(t) = z_0 + r_2e^{it}$ und $\gamma_2(t) = z_0 + r_1e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Da f in $K_{R_1,R_2}(z_0)$ holomorph ist, folgt aus der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(-\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right).$$

Nun werden beide Kurvenintegrale mit Hilfe der geometrischen Reihe in Potenzreihen entwickelt.
Falls $\zeta \in \gamma_2$, so gilt $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ und damit

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

Falls $\zeta \in \gamma_1$, so gilt $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$ und damit

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = -\frac{f(\zeta)}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} = -\frac{f(\zeta)}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)(\zeta-z_0)^n\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n}}(z-z_0)^{-(n+1)}$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-(n-1)}}(z-z_0)^{-n} = -\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

Setzt man diese Reihen für die Integranden ein und vertauscht Summation und Integration, so erhält man

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n.$$

Die Funktion $f(\zeta)(\zeta - z_0)^k$ ist für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $r_1 < r_2$ mit $R_1 < r_1$ und $r_2 < R_1$ holomorph auf $\overline{K_{r_1,r_2}(z_0)}$. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt $\int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^k d\zeta = \int_{\gamma_2} f(\zeta)(\zeta - z_0)^k d\zeta$ für die Kreislinien $\gamma_j = z_0 + r_j e^{it}$. Die Eindeutigkeit der Laurentreihenentwicklung folgt aus der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklungen auf ihren Konvergenzgebieten $|z - z_0| < R_2$ bzw. $R_1 < |z - z_0|$.

5.1.2. *Haupt- und Regulärteil einer Laurentreihe.* Für eine Laurentreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ heißen die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ **Regulärteil** und $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z - z_0)^n$ **Hauptteil** der Laurentreihe.

5.1.3. *Laurententwicklung durch Einsetzen in eine Potenzreihe.* Die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Die Laurentreihenentwicklung um $z_0 = 0$ läßt sich aus der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n$ mit $w = 1/z$ herleiten:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(-n)!} z^n$$

Der Hauptteil dieser Laurentreihe ist $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(-n)!} z^n$, der Regulärteil die konstante Funktion 1.

5.1.4. *Laurententwicklung mit Hilfe der geometrischen Reihe.* Die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{2, 3\}$ holomorph. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung erhält man $f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$. Die Laurentreihenentwicklung hängt vom gewählten Punkt z_0 ab.

$z_0 = 2$: Die Funktion f ist auf dem Kreisring $K_{0,1}(2)$ holomorph. Die Laurentreihe läßt sich aus der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = z - 2$ herleiten:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-2)-1} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-2)} - \frac{1}{z-2} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n - \frac{1}{z-2} = -\sum_{n=-1}^{\infty} (z-2)^n \end{aligned}$$

Der Regulärteil dieser Laurentreihe ist $-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$, der Hauptteil die Funktion $-(z-2)^{-1}$.

$z_0 = 0$: Die Funktion f ist auf dem Kreisring $K_{2,3}(0)$ holomorph. Die Laurentreihe läßt sich aus der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = \frac{z}{3}$ bzw. $q = \frac{2}{z}$ herleiten:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2^n}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3^{n+1}} z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n \end{aligned}$$

Der erste Summand dieser Laurentreihe der Regulärteil, der zweite Summand der Hauptteil.

5.2. Isolierte Singularitäten. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine Funktion f hat in z_0 eine isolierte Singularität, wenn eine offene Umgebung $U \ni z_0$ des Punktes existiert, so dass $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Zum Beispiel haben die Funktionen $\frac{\cosh z - 1}{z^2}$, $\frac{1}{z}$ und $e^{1/z}$ in $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität.

Hat f in z_0 eine isolierte Singularität, so ist f in einem Kreisring $K_{0,r}(z_0)$ um z_0 holomorph und läßt sich dort in eine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

entwickeln, die für alle $z \in K_{0,r}(z_0)$ absolut konvergiert.

5.2.1. *Klassifizierung isolierter Singularitäten mit Hilfe der Laurentreihe.* Eine isolierte Singularität z_0 heißt

- **hebbar**, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$.
- **Pol**, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$ existiert, so dass $a_n = 0$ für alle $n < k$
- **wesentlich**, wenn sie nicht hebbar und kein Pol ist, es also unendlich viele Koeffizienten $a_n \neq 0$ mit $n < 0$ gibt.

Die isolierte Singularität von $\frac{\cosh z - 1}{z^2}$ in $z_0 = 0$ ist hebbar, denn

$$\frac{\cosh z - 1}{z^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} - 1}{z^2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} z^{2n}$$

ist eine Potenzreihe. Die isolierte Singularität von $\frac{1}{z}$ in $z_0 = 0$ ist ein Pol, denn $a_n = 0$ für alle $n < -1$, also $k = -1$. Die isolierte Singularität von $e^{\frac{1}{z}}$ in $z_0 = 0$ ist eine wesentliche Singularität, denn ihre Laurentreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$ hat unendlich viele Koeffizienten $a_n \neq 0$ für $n < 0$.

5.2.2. *Verhalten in der Nähe isolierter Singularitäten.* Isolierte Singularitäten lassen sich auch durch ihr qualitatives Verhalten in der Nähe der Singularität unterscheiden.

THEOREM 22. *Es sei z_0 eine isolierte Singularität der Funktion f. Dann gilt*

- *z_0 ist genau dann hebbar, wenn f auf $K_{0,r}(z_0)$ beschränkt ist ($r < \infty$).*
- *z_0 ist genau dann ein Pol, wenn $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.*
- *z_0 ist genau dann wesentlich, wenn für alle Umgebungen $U \ni z_0$, für alle $w \in \mathbb{C}$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $z \in U \setminus \{z_0\}$ mit $|f(z) - w| < \varepsilon$ existiert.*

BEWEIS. Der Hauptteil einer isolierten Singularität konvergiert für alle $z \neq z_0$ und ist eine Potenzreihe in $\frac{1}{z - z_0}$, die auf $\mathbb{C}$ konvergiert. Die Aussagen folgen aus dem Satz von Liouville. □

BEMERKUNG 13. Handelt es sich um eine wesentliche Singularität, so werden in jeder noch so kleinen Umgebung der Singularität fast alle komplexen Zahlen als Funktionswerte angenommen.

5.3. Polstellen und Nullstellen. Eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ hat in $z_0 \in D$ eine **Nullstelle der Ordnung** k, falls die Potenzreihenentwicklung um z_0 von folgender Form ist:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_k \neq 0$$

Hat die Funktion f in z_0 eine Polstelle, so ist $(z - z_0)^k f(z)$ eine holomorphe Funktion, falls $a_n = 0$ für alle $n < -k$. Eine Funktion f hat in z_0 eine **Polstelle**

der Ordnung k, falls in die Laurentreihenentwicklung um z_0 von folgender Form ist:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ mit } a_{-k} \neq 0$$

BEMERKUNG 14. Eine Polstelle der Ordnung k könnte man auch Nullstelle der Ordnung $-k$ nennen. Eine Nullstelle der Ordnung k könnte man auch Polstelle der Ordnung $-k$ nennen.

Es seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, $f(z) = g(z)/h(z)$ und $z_0 \in U$. Wenn z_0 eine Nullstelle der Ordnung k_1 von g und eine Nullstelle der Ordnung k_2 von h ist, dann gilt

- z_0 ist eine Nullstelle der Ordnung $k = k_1 - k_2$, falls $k_1 \geq k_2$.
- z_0 ist eine Polstelle der Ordnung $k = k_2 - k_1$, falls $k_2 \geq k_1$.

5.4. Berechnung der Laurentkoeffizienten in Polstellen.

THEOREM 23. *Hat f in z_0 eine Polstelle der Ordnung k, so gilt für $m \leq k$*

$$a_{-m} = \frac{1}{(k-m)!} g^{(k-m)}(z_0) \text{ mit } g(z) = (z-z_0)^k f(z). \tag{92}$$

BEWEIS. Die Funktion g ist holomorph in z_0. Für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ gilt $b_n = a_{n-k} = \frac{1}{n!} g^{(n)}(z_0)$. □

Zum Beispiel hat die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ in $z_0 = 2$ eine Polstelle erster Ordnung. Mit $k = m = 1$ erhalten wir, ohne Partialbruchzerlegung,

$$g(z) = (z-2)f(z) = \frac{1}{z-3} \text{ und } a_{-1} = \frac{1}{(1-1)!} g^{(0)}(2) = g(2) = -1.$$

5.5. Das Residuum. Zur Berechnung des komplexen Kurvenintegrals einer holomorphen Funktion mit isolierten Singularitäten kann man die Laurentreihenentwicklung nutzen. Der Koeffizient a_{-1} der Laurentreihenentwicklung spielt eine besondere Rolle, er wird Residuum genannt.

Es sei $f : K_{0,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

ihre Laurentreihe. Der Koeffizient $a_{-1} =: \operatorname{Res}(f, z_0)$ heißt **Residuum** von f in z_0.

BEMERKUNG 15. Ist f holomorph in z_0, so gilt $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$.

THEOREM 24 (Bedeutung des Residuums). *Wenn $f : K_{0,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die Laurentreihenentwicklung von f um z_0 und $0 < r < R$ ist, dann gilt für die Kurve γ_r mit $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)dz = a_{-1}$$

BEWEIS. Die Aussage folgt aus der Vertauschbarkeit von Integration und Summation und den Grundintegralen in Beispiel 3.2.3:

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{\gamma_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\gamma_r} (z-z_0)^n dz = a_{-1} 2\pi i.$$

□

5.5.1. *Ablesen des Residuums in der Laurentreihe.* Die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ hat eine isolierte Singularität in $z_0 = 0$. Die Laurentreihenentwicklung der Funktion f ist einfach zu bestimmen. Das Residuum kann man dann aus der Laurentreihe ablesen. Es gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \Rightarrow \mathrm{Res}(f, 0) = \frac{1}{1!} = 1.$$

5.5.2. *Bestimmung des Residuums durch Partialbruchzerlegung.* Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ hat isolierte Singularitäten, Pole erster Ordnung, in $z_0 = \pm i$, denn $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Eine Partialbruchzerlegung mit komplexen Koeffizienten führt zu

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) = -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z+i}$$

Da der erste Summand in $z_0 = -i$ holomorph ist, gilt $\mathrm{Res}(f, -i) = i/2$. Da der zweite Summand in $z_0 = i$ holomorph ist, gilt $\mathrm{Res}(f, i) = -i/2$.

5.5.3. *Division von Potenzreihen.* Die Funktion $f(z) = (\cos z - 1)^{-1}$ hat isolierte Singularitäten in den Nullstellen des Nenners $h(z) = \cos z - 1$. Da $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ gilt für $z = x + iy$

$$\cos z = 1 \Leftrightarrow (e^{iz} + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{-y} e^{ix} = 1 \Leftrightarrow y = 0 \text{ und } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Die Nullstellen des Nenners sind doppelt, da $h'(2k\pi) = -\sin(2k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $h''(2k\pi) = -\cos(2k\pi) = -1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Funktion f hat also Pole zweiter Ordnung in den Punkten $z_k = 2n\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Es gilt

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$
$$\cos z = \cos((z - z_k) + z_k) = \cos(z - z_k) \cos z_k - \sin(z - z_k) \sin z_k = \cos(z - z_k)$$
$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z - z_k)^{2n}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wir können die ersten Koeffizienten der Laurentreihe $f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} a_n (z - z_k)^n$ durch Koeffizientenvergleich in der Gleichung $f(z)h(z) \equiv 1$ bestimmen. Da

$$\begin{aligned} 1 &= \left(a_{-2}(z - z_k)^{-2} + a_{-1}(z - z_k)^{-1} + a_0 + \ldots\right)\left(-\frac{(z - z_k)^2}{2} + \frac{(z - z_k)^4}{4!} - \ldots\right) \\ &= -\frac{a_{-2}}{2} - \frac{a_{-1}}{2}(z - z_k)^1 + \left(\frac{a_{-2}}{4!} - \frac{a_{-0}}{2}\right)(z - z_k)^2 + \ldots, \end{aligned}$$

gilt $a_{-2} = -2$ und $a_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

5.5.4. *Residuumformel in Polstellen.* Will man das Residuum in einer Polstelle bestimmen, so kann man Theorem 23 und Formel 92 benutzen:

- Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ hat isolierte Singularitäten, Pole erster Ordnung, in $z_0 = \pm i$ (siehe Abschnitt 5.5.2). Mit $m = k = 1$ folgt

$$g(z) = (z - i) f(z) = \frac{1}{z+i}, \quad \mathrm{Res}(f, i) = g(i) = \frac{1}{2i} \quad (z_0 = i)$$

und

$$g(z) = (z+i)f(z) = \frac{1}{z-i}, \quad \operatorname{Res}(f,-i) = g(-i) = \frac{1}{-2i} \quad (z_0 = -i)$$

- Die Funktion $f(z) = \frac{1}{\cos z - 1}$ hat Polstellen zweiter Ordnung in $z_k = 2n\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ (siehe Abschnitt 5.5.3). Es folgt

$$g(z) = (z-z_k)^2 f(z) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-z_k)^{2n-2}}$$

und mit $g = \frac{1}{h}$

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}(z-z_k)^{2n}, \quad h'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2n}{(2n+2)!}(z-z_k)^{2n-1}$$

und

$$g'(z) = -\frac{h'(z)}{h(z)^2}, \operatorname{Res}(f,z_k) = g'(z_k) = -\frac{h'(z_k)}{h(z_k)^2} = 0.$$

Insbesondere läßt sich für rationale Funktionen das Residuum in einer Polstelle erster Ordnung leicht mit Hilfe des folgenden Lemmas bestimmen.

Lemma 8. *Wenn $f = \frac{q}{h}$ in z_0 einen Pol erster Ordnung hat, q und h in z_0 holomorph sind und $q(z_0) \neq 0$, dann gilt*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{q}{h}, z_0\right) = \frac{q(z_0)}{h'(z_0)}. \tag{93}$$

Beweis. Aus Satz 23 folgt

$$g(z) = \frac{(z-z_0)q(z)}{h(z)}$$

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = g(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)q(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{((z-z_0)q(z))'}{h'(z)}$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{q(z) + (z-z_0)q'(z)}{h'(z)} = \frac{q(z_0)}{h'(z_0)}.$$

□

5.6. Residuensatz. Die Berechnung von komplexen Kurvenintegralen läßt sich auf die Berechnung von Residuen reduzieren.

Wir berechnen komplexe Kurvenintegrale von Funktionen mit isolierten Singularitäten. Auf der Kurve darf keine dieser Singularitäten liegen, aber das von der geschlossenen Kurve berandete Gebiet kann Singularitäten der Funktion enthalten.

Theorem 25. *Es seien $z_1, \dots, z_p \in D \subset \mathbb{C}$ endlich viele Punkte, $f : D \setminus \{z_1, \dots, z_p\} \to \mathbb{C}$ holomorph, $G \subset D$ eine beschränkte Menge mit stückweise glattem Rand, $\bar{G} \subset D$ und $z_j \notin \partial G$ für alle j. Dann gilt*

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j:z_j \in G} \operatorname{Res}(f, z_j). \tag{94}$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf $G \setminus \cup_{j=1}^{p} K_\varepsilon(z_j)$ mit kleinen Kreisscheiben $K_\varepsilon(z_j) = \{z : |z-z_j| < \varepsilon\}$, die einander nicht überschneiden, und Satz 24. □

In Beispiel 5.5.2 haben wir die Residuen der Funktion $(1+z^2)^{-1}$ berechnet. Die Kurve $\gamma(t) = 2e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ berandet die Kreischeibe $K_2(0) = \{z : |z| < 2\}$, die beide Postellen $\pm i$ enthält. Es folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}dz = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, -i\right) = \frac{1}{2i} + \frac{1}{-2i} = 0.$$

Für jede geschlossene Kurve γ, die die Polstelle i genauso oft positiv orientiert umrundet wie die Polstelle $-i$ gilt $\int_\gamma (1+z^2)^{-1}dz = 0$. Jede geschlossene Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \leq 1\}$ hat diese Eigenschaft, da sie die Strecke $\{iy : |y| \leq 1\}$ nicht kreuzen darf. Darum besitzt die Funktion $(1+z^2)^{-1}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \leq 1\}$ eine Stammfunktion.

Die Kurve $\tilde{\gamma}(t) = i + e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ berandet die Kreischeibe $\{z : |z-i| < 1\}$, die nur die Postelle i enthält, die Polstelle $-i$ jedoch nicht. Es folgt

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{1+z^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

5.7. Berechnung uneigentlicher reeller Integrale. Man kann das reelle Integral $\int_a^b f(x)dx$ für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und eine reellwertige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ als komplexes Kurvenintegral verstehen.

Wenn eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $[a, b] \subset D$ existiert, sich f also auf eine Umgebung des Intervalls $[a, b]$ in $\mathbb{C}$ fortsetzen läßt, so gilt $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$ für die Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = t$.

5.7.1. *Uneigentliche Integrale rationaler Funktionen.*

THEOREM 26. *Es seien p, q Polynome mit $\deg q \geq 2 + \deg p$ und $q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wenn $z_1, \ldots, z_m$ die komplexen Nullstellen des Polynoms $q(z)$ sind, dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}dx = 2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, z_j\right). \tag{95}$$

BEWEIS. Wir setzen $f = \frac{p}{q}$. Da $\deg q \geq 2 + \deg p$, existiert eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ und $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$.

Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ konvergiert absolut, weil

$$\int_{-\infty}^{a} |f(x)|dx \leq M \int_{-\infty}^{a} x^{-2}dx = M[-x^{-1}]_{-\infty}^{a} = -a^{-1}M$$

und

$$\int_{b}^{\infty} |f(x)|dx \leq M \int_{b}^{\infty} x^{-2}dx = M[-x^{-1}]_{b}^{\infty} = b^{-1}M$$

für alle $a < b$ und $\lim_{a\to-\infty} -a^{-1}M = \lim_{b\to\infty} b^{-1}M = 0$.

Nachdem die Existenz des uneigentlichen Integrals gesichert ist, können wir den Wert als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)}dx$$

berechnen.

Mit $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = Re^{it}$, und $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ eine geschlossene Kurve (der Rand des Halbkreises) gilt

$$\int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int_{\gamma_1} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} dz - \int_{\gamma_2} \frac{p(z)}{q(z)} dz$$

$$\int_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res}(f(z), z_j)$$

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| = \left| \int_0^{\pi} f(Re^{it}) Rie^{it} dt \right| \le R \int_0^{\pi} |f(Re^{it})| dt \le R \int_0^{\pi} \frac{M}{R^2} dt = \frac{M\pi}{R}$$

falls der Halbkreis $\{z : \Im z > 0, |z| < R\}$ alle Nullstellen mit $\Im z_j > 0$ enthält. Wenn man R groß genug wählt, ist dies der Fall, weil q nur endlich viele Nullstellen hat. Nun folgt die Gleichung für $R \to \infty$, da sich die Summe der Residuen für große R nicht mehr ändert. □

Beispiele:

- Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ erfüllt die Vorraussetzungen des Satzes 26, denn für $p(x) \equiv 1$ und $q(x) = 1 + x^2$ gilt $\deg p = 0$, $\deg q = 2$ und $q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die komplexen Nullstellen des Polynoms $1 + z^2$ sind $\pm i$. Nur für i gilt $\Im i > 0$. Das Residuum der Funktion $f(z)$ in i haben wir schon in Beispiel 5.5.2 berechnet. Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = 2\pi i \operatorname{Res}((1+z^2)^{-1}, i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

- Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ erfüllt die Vorraussetzungen des Satzes 26, denn für $p(x) \equiv 1$ und $q(x) = 1 + x^4$ gilt $\deg p = 0$, $\deg q = 4$ und $q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die komplexen Nullstellen des Polynoms $1 + z^4$ sind $z_j = e^{i\pi/4} e^{i\pi j/2}$. Nur für $j = 0, 1$ gilt $\Im z_j > 0$. Es gilt für die Polstellen erster Ordnung z_j

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, z_j\right) = \frac{1}{4z_j^3} = \frac{1}{4} e^{-i\pi 3/4} e^{-i\pi j 3/2}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx &= 2\pi i \left(\frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_1^3} \right) = \frac{\pi i}{2} e^{-i\pi 3/4} (1 + e^{-i\pi 3/2}) \\ &= \frac{\pi i}{2} (e^{-i\pi 3/4} + e^{-i\pi 9/4}) = \frac{\pi i}{2} (e^{-i\pi 3/4} + e^{-i\pi 1/4}) \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

5.7.2. *Integrale von $f(x)\sin(\alpha x)$ bzw. $f(x)\cos(\alpha x)$ ohne Singularitäten.*

THEOREM 27. *Es seien $\alpha > 0$, f eine holomorphe Funktion mit endlich vielen Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$. Wenn $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ und $z_j \notin \mathbb{R}$ für alle j, dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = \Re \left(2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res}\left(f(z) e^{i\alpha z}, z_j\right) \right) \tag{96}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx = \Im\left(2\pi i \sum_{\Im z_j>0} \mathrm{Res}\left(f(z)e^{i\alpha z}, z_j\right)\right). \tag{97}$$

Beweis. Wegen $e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)$ gilt

$$\int_{-R_1}^{R_2} f(x)\cos(\alpha x)dx = \Re\left(\int_{-R_1}^{R_2} f(x)e^{i\alpha x}dx\right)$$
$$\int_{-R_1}^{R_2} f(x)\sin(\alpha x)dx = \Im\left(\int_{-R_1}^{R_2} f(x)e^{i\alpha x}dx\right).$$

Nun wählen wir R_1, R_2 so groß, dass das Rechteck

$$Q := \{z = x + iy : x \in [-R_1, R_2], y \in [0, R_1 + R_2]\}$$

alle Singularitäten mit $\Im z_j > 0$ enthält. Dann gilt mit

$$\begin{aligned}
\gamma_2(t) &= R_2 + it \quad (0 \le t \le R_1 + R_2)\\
\gamma_3(t) &= i(R_1 + R_2) - t \quad (-R_2 \le t \le R_1)\\
\gamma_4(t) &= -R_1 - it \quad (-R_1 - R_2 \le t \le 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-R_1}^{R_2} f(x)e^{i\alpha x}dx &= \int_{\partial Q} f(z)e^{i\alpha z}dz - \sum_{m=2}^{4}\int_{\gamma_m} f(z)e^{i\alpha z}dz\\
&= 2\pi i \sum_{\Im z_j>0} \mathrm{Res}\left(f(z)e^{i\alpha z}, z_j\right) - \sum_{m=2}^{4}\int_{\gamma_m} f(z)e^{i\alpha z}dz.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Bedingung $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ kann man $\sum_{m=2}^4 \int_{\gamma_m} f(z)e^{i\alpha z}dz$ abschätzen und

$$\lim_{R_1,R_2\to\infty} \sum_{m=2}^{4}\int_{\gamma_m} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0$$

zeigen. □

Zum *Beispiel* erfüllt die Funktion $f(z) = \frac{1}{\alpha^2+z^2}$ mit $\alpha > 0$ die Voraussetzungen des Theorems 27. Die Funktion $\frac{e^{i\alpha z}}{\alpha^2+z^2}$ besitzt Pole erster Ordnung in $\pm i\alpha$. Nur $z_1 = \alpha i$ liegt in der oberen Halbebene. Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2 + x^2}dx = \Re\left(2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{\alpha^2+z^2}, i\alpha\right)\right) = \Re\left(2\pi i \frac{e^{i\alpha(i\alpha)}}{2(i\alpha)}\right) = \frac{\pi e^{-\alpha^2}}{\alpha}.$$

Da cos und f gerade Funktionen sind, kann man auch

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2 + x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2 + x^2}dx = \frac{\pi e^{-\alpha^2}}{2\alpha}$$

berechnen.

5.7.3. *Integrale von $f(x)\sin(\alpha x)$ bzw. $f(x)\cos(\alpha x)$ mit Singularitäten.* Hat eine Funktion f wie in Theorem 27 doch Singularitäten auf der reellen Achse, so kann man ähnliche Integralformeln beweisen, falls es sich nur um Pole erster Ordnung handelt.

THEOREM 28. *Es seien $\alpha > 0$, f eine holomorphe Funktion mit endlich vielen Singularitäten $z_1, \ldots, z_m \notin \mathbb{R}$ und $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$. Wenn $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ und die Singularitäten $x_j \in \mathbb{R}$ für alle j Pole erster Ordnung sind, dann gilt*

$$(98) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx = \Re\left(2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\alpha z}, z_j\right) + \pi i \sum_{x_j} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\alpha z}, x_j\right)\right)$$

und

$$(99) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx = \Im\left(2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\alpha z}, z_j\right) + \pi i \sum_{x_j} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\alpha z}, x_j\right)\right).$$

BEWEIS. Die zusätzlichen Beiträge ergeben sich aus den „Umwegen“$\gamma_j(t) = x_j + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Hat f in x_j einen Pol erster Ordnung, so gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_j} f(z)dz &= \int_{\gamma_j} a_{-1}(z-x_j)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-x_j)^n dz \\
&= \int_{\gamma_j} a_{-1}(z-x_j)^{-1}dz + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_j} a_n(z-x_j)^n dz \\
&= a_{-1}\int_0^{\pi} \varepsilon e^{-it}\varepsilon i e^{it}dt + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \varepsilon^n e^{nit}\varepsilon i e^{it}dt \\
&= a_{-1}\pi + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^{n+1}\frac{1}{n+1}((-1)^n - 1).
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ verschwindet der zweite Summand. □

BEMERKUNG 16. Für Pole höherer Ordnung auf der reellen Achse funktioniert dieser Ansatz nicht, weil das komplexe Kurvenintegral entlang γ_j für $\varepsilon \to 0$ divergiert. In dem Fall existiert auch das uneigentliche Integral nicht.

Zum *Beispiel* erfüllt die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die Voraussetzungen des Theorems 28 . Sie hat in $x_0 = 0$ einen Pol erster Ordnung. Mit $\alpha = 1$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \Im(\pi i \operatorname{Res}(e^{iz}z^{-1}, 0)) = \Im(\pi i e^0) = \pi.$$

5.8. Fouriertransformation mit Residuensatz. Für eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Fouriertransformierte $F(f)(s)$ das uneigentliche reelle Integral

$$\begin{aligned} F(f)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(-st) + i\sin(-st))dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(st) - i\sin(-st))dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(st)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(st)dt. \end{aligned}$$

Die beiden Summanden lassen sich mit Hilfe des Residuensatzes berechnen (siehe Theorem 27 und Theorem 28). Die dort auftretenden Singularitäten hängen nur von der Funktion f ab. Die Residuen der Funktion $f(z)e^{isz}$ sind aber auch vom Parameter s abhängig. Mit

$$u(s) := 2\pi i \sum_{\Im(z_j)>0} \operatorname{Res}(f(z)e^{isz}, z_j) + \pi i \sum_{x_j} \operatorname{Res}(f(z)e^{isz}, x_j) \tag{100}$$

folgt wegen $\sin(st) = -\sin(-st)$

$$F(f)(s) = \begin{cases} \overline{u(s)} & s > 0 \\ \Re(u(0)) & s = 0 \\ u(|s|) & s < 0 \end{cases}. \tag{101}$$

Beispiele:

- Die Funktion $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, hat Pole erster Ordnung in $\pm ia$. Nur der Pol ia liegt in der oberen Halbebene. Daraus folgt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{isz}}{a^2+z^2}, ia\right) = \frac{e^{is(ia)}}{2(ia)} = \frac{e^{-sa}}{2ia}, \quad u(s) = \frac{\pi}{a}e^{-sa}$$

  und

$$F(f)(s) = \begin{cases} \frac{\pi}{a}e^{-sa} & s > 0 \\ \frac{\pi}{a} & s = 0 \\ \frac{\pi}{a}e^{sa} & s < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{a}e^{-a|s|}.$$

- Die Funktion $f(t) = \frac{t}{a^2+t^2}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, hat Pole erster Ordnung in $\pm ia$. Nur der Pol ia liegt in der oberen Halbebene. Daraus folgt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{isz}}{a^2+z^2}, ia\right) = \frac{(ia)e^{is(ia)}}{2(ia)} = \frac{e^{-sa}}{2}, \quad u(s) = \pi i e^{-sa}$$

  und

$$F(f)(s) = \begin{cases} -\pi i e^{-sa} & s > 0 \\ 0 & s = 0 \\ \pi i e^{sa} & s < 0 \end{cases}.$$

5.9. Inverse Laplacetransformation mit Residuensatz. Für eine stückweise stetige Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|f(t)| \le Me^{\sigma t}$ für alle $t > t_0$ mit Konstanten $t_0, M, \sigma \ge 0$ erfüllt, ist die Laplacetransformierte das uneigentliche Integral

$$L(f)(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt, \quad \Re(z) > \sigma.$$

Die inverse Laplacetransformation läßt sich mit Hilfe eines komplexen Kurvenintegrals beschreiben:

Lemma 9. *Wenn f zusätzlich stückweise glatt ist, dann gilt*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\tau} L(z)e^{zt}dz, \quad \tau > \sigma, \quad \gamma_\tau = \{z : \Re(z) = \tau\}.$$

Beweis. Setzt man f durch $f(t) = 0$ für alle $t < 0$ zu einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fort, so gilt mit $g(t) = f(t)e^{-\tau t}$

$$\begin{aligned} L(z) &= \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-zt}dt \\ L(\tau + iy) &= \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-(\tau+iy)t}dt = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-\tau t}e^{-iyt}dt = F(g)(y). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Umkehrformel für die Fouriertransformation

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(y)e^{iyt}dy \\ f(t) = g(t)e^{\tau t} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(y)e^{iyt}e^{\tau t}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty L(\tau+iy)e^{(\tau+iy)t}dy \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty L(\tau+iy)e^{(\tau+iy)t}idy = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\tau} L(z)e^{zt}dz, \end{aligned}$$

weil $\gamma_\tau(y) = iy$ für $y \in \mathbb{R}$ und $\gamma_\tau'(y) = i$. □

Auch dieses komplexe Kurvenintegral entlang einer unendlich langen Kurve kann man, wenn einige Bedingungen erfüllt sind, mit Hilfe des Residuensatzes berechnen.

Theorem 29. *Wenn $L(f)(z)$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ holomorph ist, $\Re(z_j) < \tau$ für ein $\tau > \sigma$ und $\lim_{|z|\to\infty} L(z) = 0$, dann gilt*

$$f(t) = \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}\left((L(z)e^{zt}, z_j\right). \tag{102}$$

Beweis. Weil L nur endlich viele Singularitäten hat und nahe ∞ beschränkt ist, ist L holomorph in ∞ und kann nahe ∞ durch eine Potenzreihe in $1/z$ beschrieben werden. Da $\lim_{|z|\to\infty} L(z) = 0$, gilt $L(1/z) = \sum_{n=1}^\infty a_n z^{-n}$ für $|z| > R$. Daraus folgt $\lim_{|z|\to\infty} zL(z) = a_1 \in \mathbb{C}$. Falls $a_1 \neq 0$, so gilt $\lim_{|z|\to\infty} z\tilde{L}(z) = 0$ für

$$\tilde{L}(z) := L(z) - c(z - z_0)^{-1} = L(z) - cL(e^{z_0 t})(z)$$

mit beliebigem, festen $z_0 \in \mathbb{C}$. Man kann also $\lim_{|z|\to\infty} zL(z) = 0$ voraussetzen.

Für einen geschlossenen Weg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1(t) = \tau + it$ für $t \in [-R, R]$ und $\gamma_2(t) = Re^{it}$ für $t \in [\alpha, \beta]$ für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und R groß gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma L(z)e^{zt}dz &= 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}\big((L(z)e^{zt}, z_j\big)\\ \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} L(z)e^{zt}dz &= \int_{\gamma_\tau} L(z)e^{zt}dz\\ \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} L(z)e^{zt}dz &= 0,\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} L(z)e^{zt}dz\right| &= \left|\int_\alpha^\beta L(Re^{is})e^{\gamma_2(s)t}Re^{is}i\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |L(\gamma_2(s))|Re^{\Re(\gamma_2(s))t}\,dt\\ &\le e^{\tau t}\int_\alpha^\beta |L(\gamma_2(s))|R\,dt \le e^{\tau t}(\beta-\alpha)\varepsilon < e^{\tau t}2\pi\varepsilon,\end{aligned}$$

falls R so groß ist, dass $|L(\gamma_2(s))\gamma_2(s)| = |L(\gamma_2(s))|R < \varepsilon$. □

Zum *Beispiel* hat die Funktion $L(z) = \frac{1}{z^2+2z+5}$ Pole erster Ordnung in $z = \pm 2i - 1$, da $z^2 + 2z + 5 = (z+1)^2 + 4$. Es gilt auch $\lim_{|z|\to\infty} L(z) = 0$. Daraus folgt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2+2z+5}, \pm 2i - 1\right) = \frac{e^{(\pm 2i-1)t}}{2(\pm 2i - 1) + 2} = \frac{e^{(\pm 2i-1)t}}{\pm 4i}$$

und, da $\Re(\pm 2i - 1) < 0$,

$$f(t) = \frac{e^{(2i-1)t}}{4i} + \frac{e^{(-2i-1)t}}{-4i} = \frac{e^{-t}}{2}\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = \frac{\sin(2t)}{2}e^{-t}.$$

6. Gebrochen lineare Abbildungen - Möbiustransformationen

Wir betrachten Funktionen der Form

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ und } (c, d) \neq (0, 0). \tag{103}$$

Die Funktion f ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $cz+d \neq 0$ definiert und als Quotient zweier Polynome holomorph. Die Bedingung $(c, d) \neq (0, 0)$ sichert, dass das Definitionsgebiet der Funktion nicht leer ist.

Eine gebrochen lineare Funktion ist als Quotient zweier Polynome holomorph auf ihrem Definitionsgebiet.

- Wenn $c = 0$, so ist f für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert.
- Wenn $c \neq 0$, so besitzt f in $z = -d/c$ eine isolierte Singularität.
  - Ist $-d/c$ auch Nullstelle des Zählers, also $a(-d/c) + b = 0$, so hat f in $-d/c$ eine hebbare Singularität und f ist konstant:
    $$f(z) = \frac{az + ad/c}{cz+d} = \frac{a}{c}$$
  - Ist $-d/c$ keine Nullstelle des Zählers, also $ad - bc \neq 0$, so hat f in $-d/c$ eine Polstelle erster Ordnung.

6.1. Fortsetzung zu einer Abbildung $\mathbb{C}\cup\infty\to\mathbb{C}\cup\infty$**.** Wenn $c=a=0$, dann ist f eine konstante Funktion und es gilt $\lim_{z\to\infty} f(z)=b/d$.

Wenn $c=0$ und $a\neq 0$, so ist die Funktion f eine lineare Funktion und es gilt $\lim_{|z|\to\infty}|f(z)|=\infty$. Man kann $f(\infty)=\infty$ setzen.

Wenn $c\neq 0$ und $ad-bc=0$, dann ist f eine konstante Funktion und es gilt $\lim_{z\to\infty} f(z)=a/c$.

Wenn $c\neq 0$ und $ad-bc\neq 0$, dann ist f auf $\mathbb{C}\setminus\{-d/c\}$ holomorph und besitzt in $-d/c$ eine Polstelle erster Ordnung. Dann gilt $\lim_{z\to -d/c}|f(z)|=\infty$ und $\lim_{|z|\to\infty} f(z)=a/c$. Man kann $f(\infty)=a/c$ und $f(-d/c)=\infty$ setzen.

Bemerkung 17. Überdeckt man $\mathbb{C}\cup\infty=U_0\cup U_1$ mit zwei komplexen Karten $U_0=\mathbb{C}$ und $U_1=\{z\neq 0\}\cup\{\infty\}$, so macht der Kartenwechsel $U_1\setminus\{\infty\}\to U_0\setminus\{0\}$, $z\mapsto 1/z$, zu einer komplexen Mannigfaltigkeit. Die oben definierten Fortsetzungen der linearen gebrochenen Funktionen sind holomorphe Abbildungen auf dieser Mannigfaltigkeit.

6.2. Zerlegung in Streckung, Verschiebung und Inversion. Wir betrachten nicht konstante, gebrochen lineare Funktionen, also $ad-bc\neq 0$.

6.2.1. *Verkettung gebrochen linearer Abbildungen.* Es seien

$$f(z)=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} \text{ und } g(z)=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$$

zwei nicht konstante, gebrochen lineare Funktionen. Ihre Verkettung

$$\begin{aligned}(g\circ f)(z)=g(f(z)=g\left(\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\right)&=\frac{a_2\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}+b_2}{c_2\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}+d_2}\\ =\frac{a_2(a_1z+b_1)+b_2(c_1z+d_1)}{c_2(a_1z+b_1)+d_2(c_1z+d_1)}&=\frac{(a_2a_1+b_2c_1)z+a_2b_1+b_2d_1}{(c_2a_1+d_2c_1)z+c_2b_1+d_2d_1}\end{aligned}$$

ist wieder eine nicht konstante, gebrochen lineare Abbildung $(az+b)/(cz+d)$ mit

$$\begin{aligned}a&=a_2a_1+b_2c_1\\ b&=a_2b_1+b_2d_1\\ c&=c_2a_1+d_2c_1\\ d&=c_2b_1+d_2d_1,\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}ad-bc&=(a_2a_1+b_2c_1)(c_2b_1+d_2d_1)-(a_2b_1+b_2d_1)(c_2a_1+d_2c_1)\\ &=a_2a_1c_2b_1+a_2a_1d_2d_1+b_2c_1c_2b_1+b_2c_1d_2d_1\\ &\quad -a_2b_1c_2a_1-a_2b_1d_2c_1-b_2d_1c_2a_1-b_2d_1d_2c_1\\ &=a_2d_2(a_1d_1-b_1c_1)+b_2c_2(c_1b_1-a_1d_1)=(a_2d_2-b_2c_2)(a_1d_1-b_1c_1)\neq 0.\end{aligned}$$

6.2.2. *Einfache gebrochen lineare Abbildungen.* Die **Streckungen** $S_a(z):=az$ mit $a\neq 0$, $d=1$, $b=c=0$, die **Verschiebungen** $V_b(z)=z+b$ mit $a=d=1$, $b\in\mathbb{C}$ und $c=0$ und die **Inversion** $I(z)=1/z$, also $a=d=0$ und $b=c=1$, sind spezielle gebrochen lineare Transformationen, die man gut versteht.

6.2.3. *Zerlegungssatz.* Jede nichtkonstante, gebrochen lineare Funktion ist eine Verkettung von Streckungen, Verschiebungen und Inversionen.

Wir betrachten eine nichtkonstante, gebrochen lineare Abbildung

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } ad-bc\neq 0.$$

Wenn $c = 0$, so entsteht f aus einer Streckung und einer Verschiebung:

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = V_{b/d}\left(\frac{a}{d}z\right) = V_{b/d}(S_{a/d}(z)) = (V_{b/d} \circ S_{b/d})(z)$$

Wenn $c \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{\frac{a}{c}(cz+d) - \frac{a}{c}d + b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+d/c} \\ &= V_{a/c}(S_{(bc-ad)/c^2}(I(V_{d/c}(z)))) = (V_{a/c} \circ S_{(bc-ad)/c^2} \circ I \circ V_{d/c})(z). \end{aligned}$$

6.3. Umkehrbarkeit. Wir suchen eine Umkehrfunktion einer nichtkonstanten, gebrochen linearen Funktion.

6.3.1. *Lokale Umkehrbarkeit.* Die komplexe Ableitung der Funktion f ist

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

Es gilt genau dann $f'(z) \neq 0$ für alle z im Definitionsgebiet, wenn $ad - bc \neq 0$. Aus der Ungleichung $ad - bc \neq 0$ folgt $(a, d) \neq (0, 0)$. Jede nichtkonstante, gebrochen lineare Funktion ist lokal umkehrbar.

6.3.2. *Wertebereich.* Für eine gegebene komplexe Zahl w hat die Gleichung $f(z) = w$ die Lösung

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow cwz + dw = az + b \Leftrightarrow z(a - cw) = dw - b \Leftrightarrow z = \frac{dw-b}{-cw+a},$$

falls $w \neq a/c$. Dies bedeutet $f(\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}) = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. Allerdings gilt $f(\infty) = a/c$ und $f(-d/c) = \infty$. Zusammengefasst $f(\mathbb{C} \cup \infty) = \mathbb{C} \cup \infty$.

6.3.3. *Globale Umkehrfunktion.* Die globale Umkehrfunktion der gebrochen linearen Funktion f ist wieder eine gebrochen lineare Funktion

$$f^{-1} : \{z \in \mathbb{C} : z \neq a/c\} \to \mathbb{C}, \quad f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}. \tag{104}$$

Insbesondere gilt $f^{-1}(\infty) = -d/c$ und $f^{-1}(a/c) = \infty$.

6.4. Matrizenschreibweise. Jeder gebrochen linearen Funktion kann man eine komplexe 2×2-Matrix zuordnen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} = A\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Die Funktion f_A ist genau dann nicht konstant, wenn $\det A = ad - bc \neq 0$, also die Matrix A invertierbar ist.
- Für alle $\lambda \neq 0$ gilt $f_{\lambda A} = f_A$.
- Aus Abschnitt 6.3.3 folgt, dass $f_{A^{-1}}$ die Umkehrfunktion von f_A ist.
- Aus Abschnitt 6.2.1 folgt $f_A \circ f_B = f_{AB}$.

6.5. Möbiustransformationen. Die Bilder von Geraden und Kreisen unter nichtkonstanten, gebrochen linearen Funktion sind Geraden oder Kreise. Da sich jede nichtkonstante, gebrochen lineare Funktion als Verkettung von Streckungen, Verschiebungen und Inversionen schreiben läßt, muss diese Behauptung nur für Streckungen, Verschiebungen und die Inversion bewiesen werden.

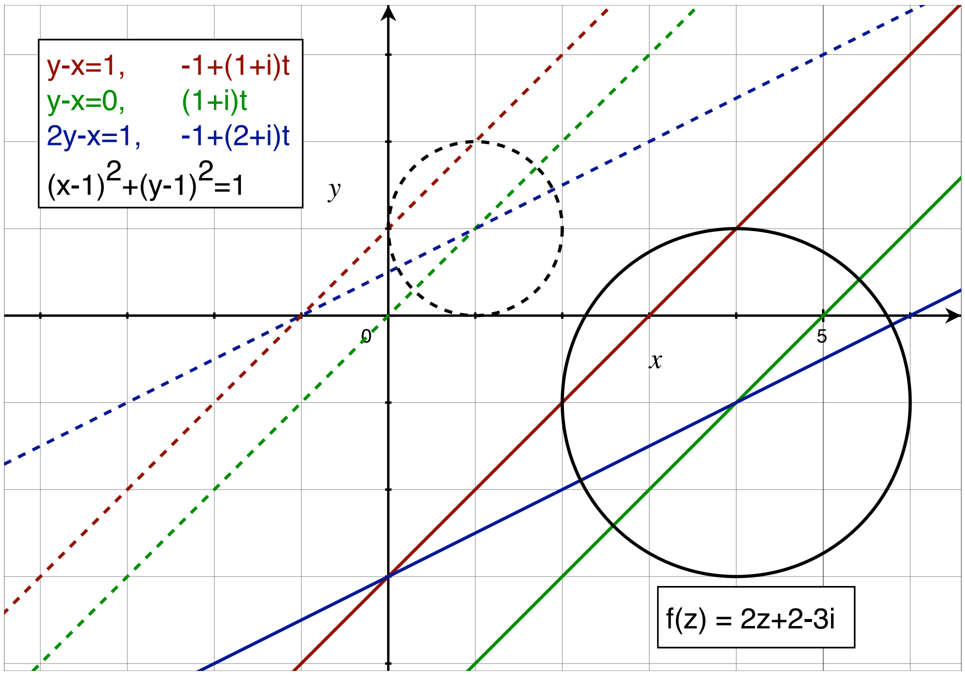

Abbildung 9. Bilder von Kreisen und Geraden bei einer affinen Abbildung

6.5.1. *Affine Abbildungen.* Wir betrachten Funktionen der Form $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$.

Jede Gerade in $\mathbb{C}$ kann durch $\gamma(t) = z_0 + w_0 t$ für $t \in \mathbb{C}$ mit $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ und $w_0 \neq 0$ parametrisiert werden. Nun gilt

$$f(\gamma(t)) = a(z_0 + tw_0) + b = taw_0 + (az_0 + b) = tw_1 + z_1 \text{ mit } w_1 = aw_0,\ z_1 = az_0 + b.$$

Jeder Kreis in $\mathbb{C}$ besitzt eine Parametrisierung der Form $\gamma(t) = z_0 + r_0 e^{it}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ mit $z_0, r_0 \in \mathbb{C}$ und $r_0 \neq 0$. Nun gilt

$$f(\gamma(t)) = a(z_0 + r_0 e^{it}) + b = (az_0 + b) + ar_0 e^{it} = z_1 + r_1 e^{it} \text{ mit } r_1 = ar_0,\ z_1 = az_0 + b.$$

Abbildung 9 zeigt die Geraden

- $y = x + 1$ mit der Paramentrisierung $\gamma_1(t) = -1 + t(1 + i)$,
- $y = x$ mit der Paramentrisierung $\gamma_2(t) = t(1 + i)$,
- $y = (x + 1)/2$ mit der Paramentrisierung $\gamma_2(t) = -1 + t(2 + i)$,

den Kreis um $(1, 1)$ mit Radius 1, definiert durch die Gleichung $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, und die Bilder dieser Objekte unter der Abbildung $f(z) = 2z + 2 - 3i$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(\gamma_1(t)) &= 2(-1 + t(1 + i)) + 2 - 3i = -3i + t2(1 + i) \\ f(\gamma_2(t)) &= 2t(1 + i) + 2 - 3i \\ f(\gamma_3(t)) &= 2(-1 + t(2 + i)) + 2 - 3i = -3i + 2t(2 + i). \end{aligned}$$

Das Bild des Kreises $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ist ein Kreis um $f(1+i) = 2+2i+2-3i = 4 - i$ mit Radius 2. Man erkennt gut, dass sich der Schnittwinkel der verschiedenen Kurven unter der affinen Abbildung nicht ändert.

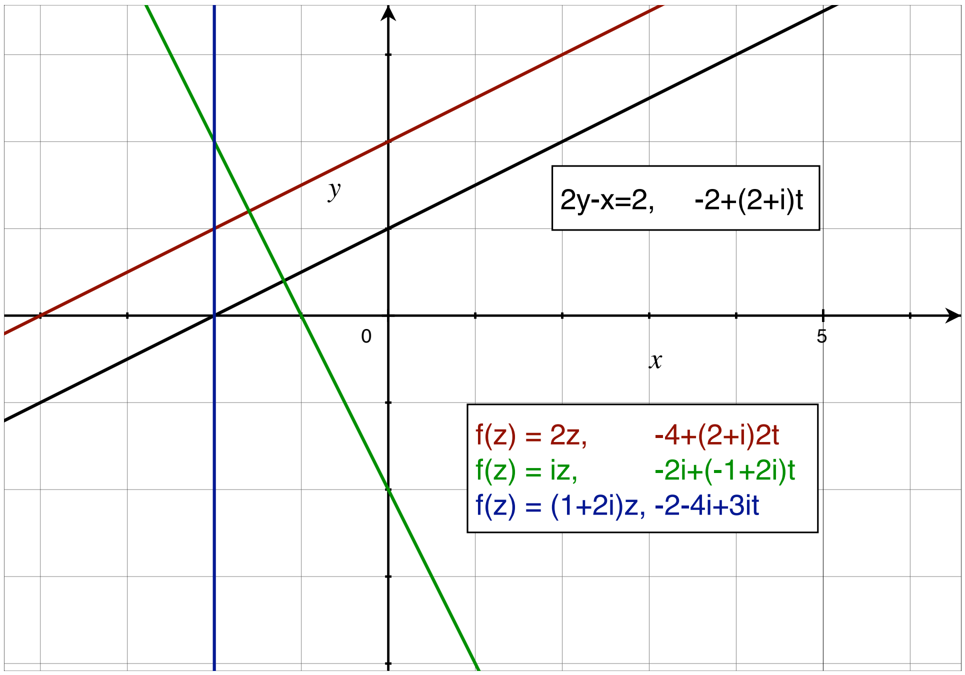

ABBILDUNG 10. Bilder einer Geraden bei komplexen Streckungen

Abbildung 10 zeigt Bilder der Geraden $y = x/2 + 1$ mit der Parametrisierung $\gamma(t) = -2 + t(2 + i)$ unter verschiedenen Streckungen mit komplexen Faktoren.

6.5.2. *Inversion von Geraden.* Eine Gerade in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist Lösung der Gleichung $\alpha x + \beta y = \gamma$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Für $z = x + iy$ gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, -y) \text{ , also } (x, y)^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, -y).$$

Aus der Geradengleichung wird

$$\begin{aligned} \alpha \frac{x}{x^2 + y^2} - \beta \frac{y}{x^2 + y^2} &= \gamma \\ \alpha x - \beta y &= \gamma(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

- Wenn $\gamma = 0$, dann wird die Geradengleichung $\alpha x + \beta y = \gamma$ unter der Inversion zu der Geradengleichung $\alpha x - \beta y = 0$.
- Wenn $\gamma \neq 0$, dann führt quadratische Ergänzung zu der Kreisgleichung

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{\alpha}{\gamma}x + y^2 + \frac{\beta}{\gamma} &= 0 \\ \left(x - \frac{\alpha}{2\gamma}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2\gamma}\right)^2 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\gamma^2}. \end{aligned}$$

Abbildung 11 zeigt die Bilder der Geraden $y = 1$ (rot), $y = -1$ (grün), $y = x$ (blau), $y = x/2$ (türkis), $y = (x + 1)/2$ (lila) und $y = x - 3$ (orange) bei Inversion, also der Abbildung $f(z) = 1/z$. Nur die Geraden durch den Ursprung (z.B. blau

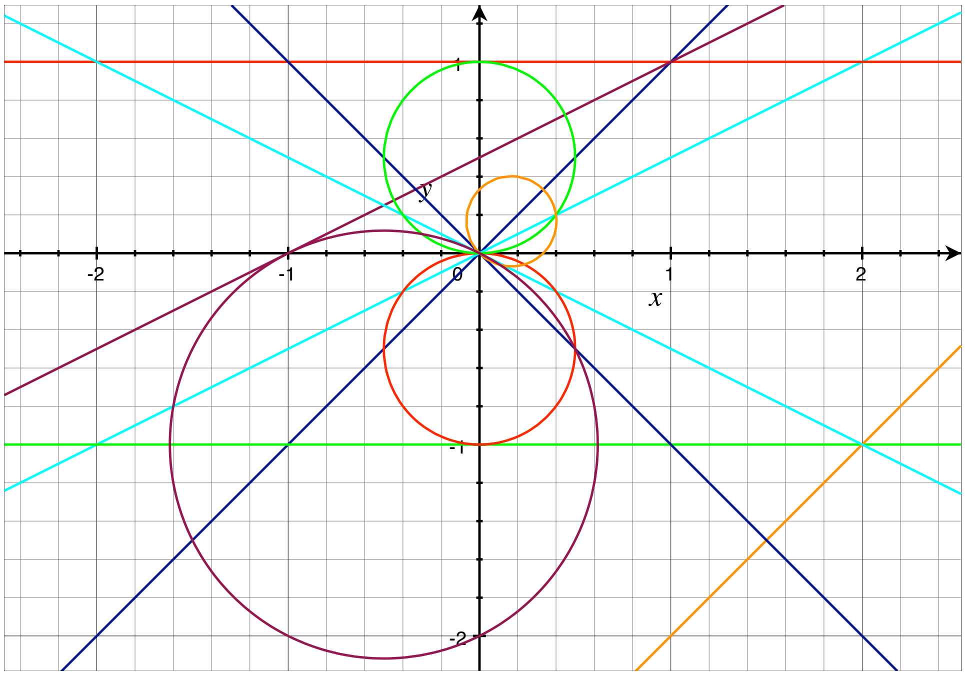

Abbildung 11. Inversion von Geraden in Geraden oder Kreise

und türkis) werden in Geraden abbgebildet. Die anderen werden zu Kreisen durch den Ursprung.

6.5.3. *Inversion von Kreisen.* Ein Kreis in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist Lösung der Gleichung $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_0^2$ mit $x_0, y_0, r_0 \in \mathbb{R}$, $r_0 > 0$. Für $z = x + iy$ gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, -y) \text{ , also } (x, y)^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, -y).$$

Aus der Kreisgleichung wird

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} - y_0\right)^2 &= r_0^2 \\ \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xx_0}{x^2 + y^2} + x_0^2 + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2yy_0}{x^2 + y^2} + y_0 &= r_0^2 \\ 1 + 2yy_0 - 2xx_0 + (x_0^2 + y_0^2)(x^2 + y^2) &= r_0^2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

- Wenn $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, dann wird aus der Kreisgleichung durch die Inversion die Geradengleichung $2y_0 y - 2x_0 x = -1$.

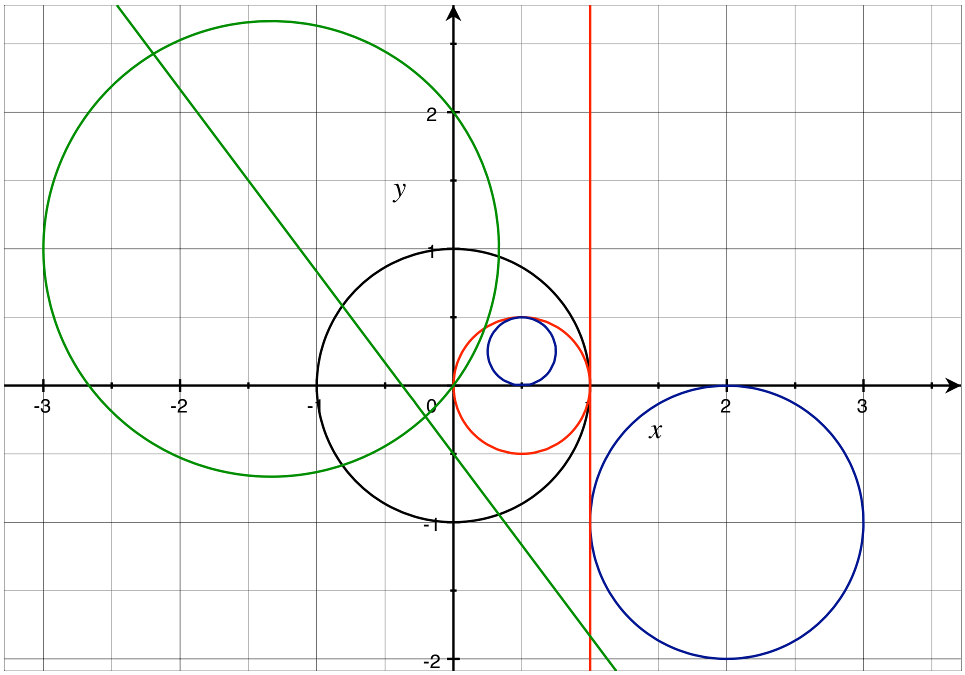

ABBILDUNG 12. Inversion von Kreisen in Kreise oder Geraden

- Wenn $r_0^2 \neq x_0^2+y_0^2$, dann wird aus der Kreisgleichung $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r_0^2$ durch Inversion die Kreisgleichung

$$1 = -2yy_0 + 2xx_0 + (r_0^2 - x_0^2 - y_0^2)(x^2 + y^2)$$

$$\frac{1}{r_0^2 - x_0^2 - y_0^2} = \left(x + \frac{x_0}{r_0^2 - x_0^2 - y_0^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{r_0^2 - x_0^2 - y_0^2}\right)^2 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{(r_0^2 - x_0^2 - y_0^2)^2}$$

$$\frac{r_0^2}{(r_0^2 - x_0^2 - y_0^2)^2} = \left(x + \frac{x_0}{r_0^2 - x_0^2 - y_0^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{r_0^2 - x_0^2 - y_0^2}\right)^2.$$

Abbildung 12 zeigt die Bilder der Kreise $x^2+y^2 = 1$ (schwarz), $(x-1/2)^2+y^2 = 1/4$ (rot), $(x-2)^2 + (y+1)^2$ (blau) und $(x + 4/3)^2 + (y-1)^2 = 25/9$ (grün) bei Inversion, also der Abbildung $f(z) = 1/z$. Nur die Kreise durch den Ursprung (rot und grün) werden in Geraden abgebildet. Die anderen bleiben Kreise. Der Einheitskreis (schwarz) wird auf sich selbst abgebildet.