421311

Für die Beträge in der zu erfüllenden Gleichung kommt es auf die Beziehung zwischen x und $-3a$ sowie zwischen x und a an. Daher spielt es eine Rolle, welche Beziehung zwischen a und $-3a$ besteht. Dies wiederum hängt davon ab, welches Vorzeichen a besitzt. Damit ist folgende Fallunterscheidung nahegelegt:

1. Fall: $a > 0$. In diesem Fall gilt $-3a < a$, und daher ist weiter zu unterscheiden:

   1.1. Ist $x < -3a$, so ist auch $x < a$, also
   $$|x + 3a| - |x - a| = -(x + 3a) + (x - a) = -4a < 2a\,.$$

   1.2. Ist $-3a \le x \le a$, so ist $|x+3a|-|x-a| = (x+3a)+(x-a) = 2x+2a$; die zu erfüllende Gleichung ist folglich äquivalent zu $2x + 2a = 2a$ und dies zu $x = 0$.

   1.3. Ist $x > a$, so ist auch $x > -3a$, also
   $$|x + 3a| - |x - a| = (x + 3a) - (x - a) = 4a > 2a\,.$$

2. Fall: $a = 0$. In diesem Fall ist mit $|x + 3a| - |x - a| = |x| - |x| = 0 = 2a$ die Gleichung für jedes reelle x erfüllt.

3. Fall: $a < 0$. In diesem Fall gilt $a < -3a$, und daher ist weiter zu unterscheiden:

   3.1. Ist $x < a$, so ist auch $x < -3a$, also
   $$|x + 3a| - |x - a| = -(x + 3a) + (x - a) = -4a > 2a\,.$$

   3.2. Ist $a \le x \le -3a$, so ist
   $$|x + 3a| - |x - a| = -(x + 3a) - (x - a) = -2x - 2a\,;$$
   die zu erfüllende Gleichung ist folglich äquivalent zu $-2x - 2a = 2a$ und dies zu $x = -2a$.

   3.3. Ist $x > -3a$, so ist auch $x > a$, also
   $$|x + 3a| - |x - a| = (x + 3a) - (x - a) = 4a < 2a\,.$$

Die zu ermittelnden Zahlen x sind demnach genau die folgenden:
Für jedes reelle $a > 0$ die Zahl $x = 0$, für $a = 0$ jedes reelle x, für jedes reelle $a < 0$ die Zahl $x = -2a$.
Bemerkung: Möglich ist auch eine zeichnerische Gewinnung dieser Lösung:
In jedem der drei Fälle kann die Kurve $y = |x+3a|-|x-a|$ durch Superposition aus $y = |x + 3a|$ und $y = -|x - a|$ gewonnen und dann mit $y = 2a$ zum Schnitt gebracht werden.

421312

Die Grundfläche des Kegels habe den Radius R. Dann hat der Kegel ein Volumen von $V_K = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Das Volumen des Wassers lässt sich auf zwei Arten berechnen.
Wenn der Kegel auf der Spitze steht, erhält man $V_W = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, wobei r der Radius des Wasserkegels sei. Nach dem Umdrehen berechnet man $V_W = V_K - \frac{1}{3}\pi y^2(H - x)$, wobei x die Höhe des Wasserstandes nach dem Umdrehen des Kegels und y der Radius der oberen Begrenzungsfläche des Wasserkörpers sei.

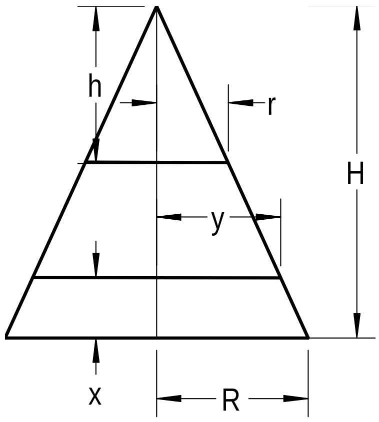

Abbildung 421312L

Nach dem Strahlensatz gilt zusätzlich

$$\frac{h}{H}=\frac{r}{R} \quad \text{und} \quad \frac{H-x}{H}=\frac{y}{R}.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\pi r^2 h &= \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi y^2 (H-x)\\
\frac{h^2R^2}{H^2}h &= R^2H - \frac{R^2}{H^2}(H-x)^3\\
\frac{h^3}{H^2} &= H - \frac{(H-x)^3}{H^2}\\
h^3 &= H^3-(H-x)^3\\
x &= H-\sqrt[3]{H^3-h^3}.
\end{aligned}$$

Die Wasserhöhe im umgedrehten Kegel beträgt jetzt also $x = H - \sqrt[3]{H^3-h^3}$.

<u>421313</u>
Jede positive ganze Zahl n der Form $4k$, $4k+1$ oder $4k+3$ mit ganzzahligem k ist als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar.
Beweis: Im ersten Fall gilt

$$n=\left(\frac{n}{4}+1\right)^2-\left(\frac{n}{4}-1\right)^2.$$

In den beiden anderen Fällen gilt

$$n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Jede natürliche Zahl der Form $n=4k+2$ ist nicht als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar.
Beweis: Quadratzahlen lassen bei Division durch 4 nur die Reste 0 oder 1, und damit lässt die Differenz zweier Quadratzahlen stets einen der Reste 0, 1 oder 3.
Also sind genau alle positiven ganzen Zahlen der Form $n=4k+2$ mit ganzzahligem k nicht als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar.

<u>421314</u>
Anna gewinnt mit folgender Strategie:
Sie zieht so, dass nach ihrem Zug eine ungerade Zahl vorliegt. Damit kann Berta nur einen ungeraden Teiler dazu addieren. Berta hinterlässt also stets eine gerade Zahl.
Anna spielt so lange nach dieser Strategie, bis Berta ihr erstmalig eine gerade Zahl größer gleich 1336 hinterlässt. Das kann Anna in jedem Fall erzwingen; denn einerseits vergrößert jeder Zug die bisher erreichte Zahl, also muss 1336

einmal erreicht oder überschritten werden; andererseits gilt: So lange die Zahl von Berta noch kleiner oder gleich 1334 ist, kann Anna durch Addition des Teilers 1 unter 1336 bleiben.
Wenn Berta eine (gerade) Zahl größer oder gleich 1336 erreicht hat, addiert Anna die Hälfte dieser Zahl und erhält mindestens $1336 + \frac{1336}{2} = 2004$. Anna kann also den Sieg erzwingen.