Prof. Dr. Jörg Winkelmann SS 2008

Übungen zur Vorlesung Algebraische Kurven

5. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei $\mathbf{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei $P \in \mathbf{K}[X, Y]$ ein Polynom von Grad zwei. Es sei nicht entartet, d.h. es gebe kein Polynom Q mit $Q^2 = P$.
Zeigen Sie, dass die ebene Kurve $C = V(P)$ höchstens eine Singularität besitzt.

Aufgabe 2. Sei k ein endlicher Körper mit q Elementen. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in

1. $\mathbf{P}_n(k)$,
2. $GL_n(k)$ und
3. $SL_n(k)$.

Aufgabe 3. Sei $S = \oplus_k S_k$ ein graduierter Ring und I ein *homogenes* Ideal (d.h. $I = \oplus_k(I \cap S_k)$).
Zeigen Sie:
I ist genau dann ein Primideal wenn für alle k, n gilt: *Sind $f \in S_k$, $g \in S_n$ und $fg \in I$, dann gilt $f \in I$ oder $g \in I$.*

Aufgabe 4. Sein $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ und $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ Untermengen der Kardinalität drei des $\mathbf{P}_1(k)$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $\phi : k^2 \to k^2$ die eine Selbstabbildung ψ des $\mathbf{P}_1(k)$ mit $\psi(a_i) = b_i$ $(i = 0, 1, 2)$ induziert.

Abgabe: 26. Mai 2008