Prof. Dr. Jörg Winkelmann SS 2008

Übungen zur Vorlesung Algebraische Kurven

7. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Sei K ein Körper, $V = K[X_1, \dots, X_n]$ und $E : V \to V$ die durch

$$E(P) = \sum_{k=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} P$$

definierte lineare Abbildung.
Bestimmen Sie die Eigenwerte und -räume von E.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper. Sei $V = \{(0,0,x,y) : x,y \in K\} \cup \{(x,y,0,0) : x,y \in K\}$.
Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, das Ideal $I(V)$ durch zwei Polynome zu erzeugen.

Aufgabe 3. Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal m.
Zeigen Sie: $\cup_{k \in \mathbf{N}} m^k = \{0\}$.

Aufgabe 4. Sei R ein Integritätsbereich und K sein Quotientenkörper.
Sei $S \subset R \setminus \{0\}$ ein *multiplikatives System*, d.h. eine Teilmenge mit der Eigenschaft, dass aus $x, y \in S$ stets $xy \in S$ folgt. Sei ferner p ein Primideal in R und $\hat{p} = \{\frac{a}{s} : a \in p, s \in S\}$.
Zeigen Sie:

1. $S^{-1}R = \{\frac{x}{s} : x \in R, s \in S\}$ ist ein Unterring von K.
2. Falls $S \cap p \neq \{\}$, gilt $\hat{p} = S^{-1}R$. Andernfalls gilt: $\hat{p}$ ist ein Primideal in $S^{-1}R$ mit $R \cap \hat{p} = p$.
3. Ist q ein echtes Ideal in $S^{-1}R$ (d.h. $q \neq S^{-1}R$), dann gilt $q \cap R \neq R$.
4. $S^{-1}R$ ist ein lokaler Ring, falls $S = R \setminus p$.

Abgabe: 9. Juni 2008