

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

11. Übungsblatt

Aufgabe 1.

- a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{1}{n}$?
- b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{1}{n}$?

Aufgabe 2. *Mittelwerteigenschaft.* Sei f eine holomorphe Funktion auf $D_R = \{z : |z| < R\}$ und $0 < r < R$.

Zeigen Sie:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta$$

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion und sei L eine reelle Gerade in \mathbf{C} .

Zeigen Sie: $f(\mathbf{C}) \cap L \neq \{\}$.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Zeigen Sie:

Wenn es komplexe Zahlen $a, b \in \mathbf{C}$ gibt sodass $f(az + b) = f(z)$ für alle $z \in \mathbf{C}$, dann gibt es natürliche Zahl $n > 0$ mit $a^n = 1$.

Abgabe: 4. Juli 2008