

## Übungen zur Vorlesung Vertiefung der Funktionentheorie

### 7. Übungsblatt

#### Aufgabe 1.

Es sei  $f(z)$  eine meromorphe Funktion auf  $\mathbf{C}$  mit einer Polstelle zweiter Ordnung in 0 und mit Laurentreihe  $f(z) = \sum_k c_k z^k$ . Es sei  $g(z) = (f(z))^2$ .  
Man berechne das Residuum  $Res_0(g)$  in Abhängigkeit der Koeffizienten  $c_{-2}, c_{-1}, \dots$  der Laurentreihe von  $f$ .

#### Aufgabe 2.

Es sei  $f$  eine ganze Funktion (also eine auf ganz  $\mathbf{C}$  definierte holomorphe Funktion) und

$$h(z) = \frac{f(z) + f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n}.$$

Man bestimme  $Res_0(h)$  (in Abhängigkeit von  $n \in \mathbf{N}$  und den Koeffizienten der Taylorreihe  $\sum a_k z^k$  von  $f$ ).

#### Aufgabe 3.

Es sei  $G = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$  und es sei  $D$  eine diskrete Teilmenge von  $G$  und  $f$  eine holomorphe Funktion auf  $W = G \setminus D$ .

Man zeige:

$f$  besitzt genau dann eine Stammfunktion auf  $W$ , wenn  $Res_p(f) = 0 \quad \forall p \in D$ .

Abgabe: 4. Dezember 2008