

## **Dimensionsrechnung in Warteschlangenmodellen**

**- Unklarheiten bei der Umrechnung von Fahrzeugen in Pkw-Einheiten**

## **Dimension Calculation in Queuing Models**

**- Uncertainties by Converting the Unit veh/h to Unit pcu/h**

Ning Wu<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Dr.-Ing. habil., Privatdozent an der Fakultät für Bauingenieurwesen, Ruhr-Universität Bochum, 44780 Bochum, ning.wu@rub.de

## **Kurzfassung**

In der Praxis der Straßenverkehrstechnik werden zur Beurteilung der Verkehrsqualität Warteschlangenmodelle verwendet, um die Rückstaulängen und Wartezeiten zu schätzen. Bei Anwendung der in HBS 2001 und HCM 2000 angegebenen Warteschlangenmodelle wird festgestellt, dass die Dimensionen (Einheiten) der einzelnen Parameter in den vorgegebenen Wartezeitformeln inkonsistent sind. Dies führt dazu, dass die Umrechnung der Verkehrsstärke von Fahrzeugen in Pkw-Einheiten die Berechnungsergebnisse und daher die ermittelten Verkehrsqualitäten direkt beeinflusst. Dieses Problem wird erläutert und es wird herausgestellt, dass die Warteschlangenmodelle in sich korrekt sind und dass bei der Anwendung dieser Modelle bestimmte Voraussetzungen beachtet werden müssen.

## **Abstract**

In order to conduct a traffic quality assessment, queuing models are used for estimating delays and queue lengths. By applying the queuing models in HBS 2001 and HCM 2000 a dimension inconsistency of the parameters in those queuing models is determined. This inconsistency of dimension calculations leads to incorrect calculation results if the traffic flow rates are converted from the unit veh/h into the unit pcu/h. This unit conversion directly affects the calculation results for delays and queue lengths. Thus, it also affects the estimated traffic qualities directly. This problem is addressed and clarified. It turns out that basically the queuing models are correct. But for applications of these models certain pre-conditions have to be taken into account.

**Keywords:** queuing model, dimension calculation, personal car equivalent

## **Einführung**

In der Straßenverkehrstechnik werden zur Beurteilung der Verkehrsqualität Warteschlangenmodelle verwendet, um die Rückstaulängen und Wartezeiten zu schätzen. Es kommen vor allem die Standardwarteschlangensysteme der Typen M/M/1 und M/D/1 und deren abgewandte Untertypen zur Anwendung. Zur Berücksichtigung der speziellen Randbedingungen der unterschiedlichen Verkehrssysteme wird oft auch das allgemeine Warteschlangenmodell von Polaczek - Khintchine (vgl. Stark und Nicholls, 1972) verwendet. Dabei können die Streuung der Ankünfte und der Bedienungszeiten eines realen Verkehrssystems hinreichend berücksichtigt werden. Allerdings haben die Standardwarteschlangenmodelle ihre Gültigkeit nur bei stationärer Voraussetzung, was in der realen Welt selten zutrifft. Daher werden zur Berechnung der Verkehrsqualität in der Realität Warteschlangenmodelle entwickelt, die auch instationäre Verkehrsbedingungen mit teilweisen Überlastungen berücksichtigen. Zur Herleitung der instationären Warteschlangenmodelle wurde die so genannte Transit-Technik verwendet, mit der ein Standardwarteschlangensystem mit einem deterministischen Warteschlangensystem nach Bilanzierung von Zu- und Abfluss kombiniert wird. Zu den instationären Warteschlangenmodellen gehören vor allem die Ansätze von Kimber/Hollis (1979) und Akcelik (1980), die auch in den bekannten Regelwerken HBS und HCM (FGSV, 2001; TRB, 2000) ihre Anwendung gefunden haben (vgl. auch Wu 1996, 1997).

Bei Anwendung der oben genannten Regelwerke wird festgestellt, dass die Dimensionen (Einheiten) der einzelnen Parameter in den vorgegebenen Wartezeitformeln nicht abgestimmt sind. Dies führt dazu, dass die Umrechnung der Verkehrsstärke zwischen unterschiedlichen Einheiten (z.B. von Fahrzeugen zu Pkw-Einheiten) die Berechnungsergebnisse und daher die ermittelten Verkehrsqualitäten direkt beeinflusst. Die Umrechnung der Verkehrsstärke ist manchmal notwendig, wenn die Kapazität (z. B. im Fall der vorfahrtgeregelten Knotenpunkte) nur in der Einheit [Pkw-E/h] vorliegt.

Solche Probleme führen zur Unsicherheit bei der Anwendung der Wartezeitmodelle und manchmal sogar zum Zweifel an der Richtigkeit der Formeln, die in den Regelwerken angegeben sind.

Im Folgenden werden diese Probleme erläutert und klargestellt, dass die Wartezeitformeln in sich korrekt sind. Jedoch müssen bei der Anwendung dieser Formeln einige Voraussetzungen beachtet werden

## Problemdarstellung

In den Standardwarteschlangenmodellen werden als Eingangsgrößen die Stärke des Zuflusses  $q$  und die Kapazität  $C$  des Warteschlangensystems verwendet. Dabei ist die Kapazität der Kehrwert der Bedienungszeit  $t_B$ . Die Berechnungsergebnisse eines Warteschlangensystems sind die mittlere Rückstaulänge  $N$  und die mittlere Wartezeit  $w$ .

Betrachtet wird zuerst ein stochastisches, stationäres Warteschlangensystem. Ein stationäres Warteschlangensystem bedeutet, dass die Mittelwerte des Zuflusses und der Kapazität über die Zeit konstant sind und der Mittelwert des Zuflusses niedriger als der Mittelwert der Kapazität ist. Für ein M/M/1-Warteschlangensystem lautet die Rückstaulänge  $N$  (vgl. Stark und Nicholls, 1972):

$$N = \frac{x}{1-x}$$

Dabei ist  $x$  der Auslastungsgrad. In der Verkehrstechnik wird der Parameter  $x$  immer als der Quotient von  $q$  zu  $C$  aufgefasst. D.h.:

$$x = \frac{q}{C}$$

Da die Verkehrsstärke  $q$  und die Kapazität  $C$  immer die gleiche Dimension (Einheit) besitzen (z.B. Fz/s oder Fz/h), muss der Auslastungsgrad  $x$  dimensionslos sein. In mathematischer Form ausgedrückt lautet dies:

$$x = \frac{q[\text{Fz/s}]}{C[\text{Fz/s}]} \quad [-]$$

Demnach ist die Rückstaulänge

$$N = \frac{x[-]}{1[-] - x[-]} \quad [-] \quad (1)$$

ebenfalls dimensionslos. Nach dem Gesetz von Little erhält man dann die mittlere Wartezeit:

$$w = \frac{N[-]}{q[\text{Fz/s}]} \quad [\text{s/Fz}] \quad (1a)$$

Die Wartezeit hat hier die Dimension [s/Fz]. Um die stochastische Eigenschaft eines realen Verkehrssystems zu berücksichtigen, wird pragmatisch oft noch eine Konstante  $0 \leq C_0 \leq 1$  mit Gl. (1) multipliziert (vgl. Kimber - Hollis, 1979 und Akcelik 1980). Der Wert von  $C_0$  wird in der Regel ebenfalls als dimensionslos betrachtet. Dann lauten die mittlere Rückstaulänge und die mittlere Wartezeit unter stationärer Bedienung i. A.:

$$N = \frac{C_0[-]x[-]}{1[-] - x[-]} \quad [-] \quad (2)$$

und

$$w = \frac{C_0[-]N[-]}{q[\text{Fz/s}]} \quad [\text{s/Fz}] \quad (2a)$$

D.h., nach dem Standardwarteschlangensystem hat die mittlere Rückstaulänge  $N$  die Dimension [-] und die mittlere Wartezeit  $w$  die Dimension [s/Fz].

Jetzt wird ein anderes, deterministisches Warteschlangensystem mit Überlastung (d. h. instationär) betrachtet. Die mittlere Rückstaulänge  $N$  in einem Bezugszeitraum  $T$  kann nach der Bilanzierung des Zu- und Abflusses einfach berechnet werden. Die mittlere Rückstaulänge lautet (vgl. Kimber - Hollis, 1979 und Akcelik 1980):

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} (q[\text{Fz/s}] - C[\text{Fz/s}]) \cdot T[\text{s}] \\ &= \frac{1}{2} C[\text{Fz/s}] \cdot \left( \frac{q[\text{Fz/s}]}{C[\text{Fz/s}]} - 1[-] \right) \cdot T[\text{s}] \\ &= \frac{1}{2} C[\text{Fz/s}] \cdot (x[-] - 1[-]) \cdot T[\text{s}] \end{aligned} \quad [\text{Fz}] \quad (3)$$

Die Rückstaulänge hat hier die Dimension [Fz]. Die mittlere Wartezeit unter der instationären Bedingung lautet nach Akcelik (1980):

$$w = \frac{N[\text{Fz/s}] \cdot T[\text{s}]}{C[\text{Fz/s}] \cdot T[\text{s}]} = \frac{N[\text{Fz}]}{C[\text{Fz/s}]} \quad [\text{s}] \quad (3a)$$

Die Wartezeit hat hier die Dimension [s]. Die Wartezeit  $w$  wird hier abweichend von der Regel von Little (vgl. Gl. (1)) berechnet, um den Abfluss der zurück gestauten Fahrzeuge nach dem Bezugszeitraum  $T$  zu berücksichtigen.

Es gibt anscheinend zwei unterschiedliche Dimensionen für die mittleren Rückstaulängen ([-] und [Fz]) und für die mittleren Wartezeiten ([s/Fz] und [s]) für zwei unterschiedliche Warteschlangensysteme. Es stellt sich die berechtigte Frage: Welche Dimension haben die mittlere Rückstaulänge und die mittlere Wartezeit wirklich?

Bei der Herleitung der instationären Wartezeitformeln in den Regelwerken werden die beiden oben genannten Warteschlangensysteme (Gl. (2) und Gl. (3)) durch die so genannte Transit - Technik zusammengefügt. Dies führt zwangsläufig zur scheinbaren "unkorrekten" Dimensionsrechnung in den resultierenden Formeln für die Berechnung der Wartezeit und der Rückstaulänge (z. B. in den Gleichungen im HBS auf Seite 7-81 und in den Gleichungen 17-37, 17-38, und 17-55 im HCM; vgl. auch Wu, 2005).

Die Dimensionsrechnung für die Wartezeitformel für Knotenpunkte ohne LSA im HBS (FGSV, 2001, Seite 7-81) lautet (vgl. auch Kimber - Hollis, 1979) z. B.:

$$w = D_1[\text{inkonsistent}] + E[s/Pkw - E] + \frac{1}{\mu[Pkw - E/s]} \quad [\text{inkonsistent}]$$

mit:

$$D_1 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{F^2[\text{inkonsistent}] + G[s^2/Pkw - E]} - F[\text{inkonsistent}] \right) \quad [\text{inkonsistent}]$$

$$F = \frac{1}{\mu_0[Pkw - E/s] - q_0[Pkw - E/s]} \cdot \left[ \frac{T[s]}{2} (\mu[Pkw - E/s] - q[Pkw - E/s]) y[-] + \left( y[-] - \frac{\mu[Pkw - E/s] - \mu_0[Pkw - E/s] + q_0[Pkw - E/s]}{\mu[Pkw - E/s]} \right) \right] + E[s/Pkw - E] \quad [\text{inkonsistent}]$$

$$G = \frac{2T[s]y[-]}{\mu_0[Pkw - E/s] - q_0[Pkw - E/s]} \cdot \left[ \frac{q[Pkw - E/s]}{\mu[Pkw - E/s]} - (\mu[Pkw - E/s] - q[Pkw - E/s])E[s/Pkw - E] \right] \quad [s^2/Pkw-E]$$

$$E = \frac{q_0[Pkw - E/s]}{\mu_0[Pkw - E/s](\mu_0[Pkw - E/s] - q_0[Pkw - E/s])} \quad [s/Pkw-E]$$

$$y = 1[-] - \frac{\mu[Pkw - E/s] - \mu_0[Pkw - E/s] + q_0[Pkw - E/s]}{q[Pkw - E/s]} \quad [-]$$

$w$	=	mittlere Wartezeit der Fahrzeuge	[s]
$T$	=	Dauer des betrachteten Spitzenintervalls	[s]
$\mu$	=	Kapazität des Nebenstroms im betrachteten Spitzenintervall	[Pkw-E/s]
$q$	=	Verkehrsstärke des Nebenstroms	[Pkw-E/s]
$\mu_0$	=	Kapazität in der Zeit nach dem Spitzenintervall	[Pkw-E/s]
	=	$\mu/0,8$ , wenn nicht explizit definiert	
$q_0$	=	Verkehrsstärke des Nebenstroms nach dem Spitzenintervall	[Pkw-E/s]
	=	$q \cdot 0,8$ , wenn nicht explizit definiert	

Die Dimensionsrechnung in dieser Formel ist inkonsistent. Die Einheit der mittleren Wartezeit ist undefinierbar.

Das Problem in der Dimensionsrechnung führt auch zu unterschiedlichen Berechnungsergebnissen für die Rückstaulänge und Wartezeit. Es hängt davon ab, ob die Berechnung mit der Einheit [Fz] oder mit der umgerechneten Einheit [Pkw-E] durchgeführt wird. Dieses Problem der Umrechnung von der Einheit [Fz] in die Einheit [Pkw-E] wird im Folgenden ausführlich dargestellt.

Es wird hier angenommen, dass die Verkehrsstärke  $q$  und die Kapazität  $C$  mit einem pauschalen Faktor  $f$  von der Einheit [Fz/s] in die Einheit [Pkw-E/s] umgerechnet werden können. D. h.:

$$q_{Pkw-E} = q_{Fz} \cdot f \quad \text{und} \quad C_{Pkw-E} = C_{Fz} \cdot f \quad \text{mit } f \geq 1$$

Demnach gilt immer

$$x_{Fz} = \frac{q_{Fz}}{C_{Fz}} = \frac{q_{Fz} \cdot f}{C_{Fz} \cdot f} = \frac{q_{Pkw-E}}{C_{Pkw-E}} = x_{Pkw-E}$$

Nach Gl. (1) oder Gl.(2) erhält man ohne Umrechnung der Verkehrsstärke von der Einheit [Fz] in die Einheit [Pkw-E]

$$N_{Fz} = \frac{x_{Fz}[-]}{1[-] - x_{Fz}[-]} \quad [-]$$

$$w_{Fz} = \frac{N_{Fz}[-]}{q_{Fz}[Fz/s]} \quad [s/Fz]$$

und mit Umrechnung der Verkehrsstärke von der Einheit [Fz] in die Einheit [Pkw-E]

$$N_{Pkw-E} = \frac{x_{Pkw-E}[-]}{1[-] - x_{Pkw-E}[-]} \quad [-]$$

$$w_{Pkw-E} = \frac{N_{Pkw-E}[-]}{q_{Pkw-E}[Pkw-E/s]} \quad [s/Pkw-E]$$

Da nach der Definition in der Verkehrstechnik  $x_{Pkw-E} = x_{Fz}$  sein muss, folgt

$$N_{Pkw-E} = N_{Fz}$$

Dies ist offensichtlich nicht plausibel. Dies würde bedeuten, dass ein erforderlicher Stauraum kürzer ist, wenn man ihn mit der Einheit [Pkw-E] berechnet (kürzer als die Berechnung mit der Einheit [Fz]), weil die Länge einer Pkw-Einheit kürzer als die Länge eines durchschnittlichen (einschließlich Lkw) Fahrzeuges ist. Erwartet wird eigentlich

$$N_{Pkw-E} = N_{Fz} \cdot f$$

Für die Wartezeit ergibt sich hier

$$w_{Pkw-E} = \frac{N_{Pkw-E}}{q_{Pkw-E}} = \frac{N_{Fz}}{q_{Pkw-E}} = \frac{w_{Fz}}{f}$$

Auch dies ist nicht plausibel. Im Mittel wird nicht kürzer gewartet, wenn man die Verkehrsstärke von der Einheit [Fz] in die Einheit [Pkw-E] umrechnet. Erwartet wird hierfür

$$w_{Pkw-E} = w_{Fz}$$

Andererseits erhält man nach Gl. (3) ohne Umrechnung der Verkehrsstärke von der Einheit [Fz] in die Einheit [Pkw-E]

$$N_{Fz} = \frac{1}{2} C_{Fz}[Fz/s] \cdot (x_{Fz}[-] - 1[-]) \cdot T[s] \quad [Fz]$$

$$w_{Fz} = \frac{N_{Fz}[Fz]}{C_{Fz}[Fz/s]} \quad [s]$$



und mit Umrechnung der Verkehrsstärke von der Einheit [Fz] in die Einheit [Pkw-E]

$$N_{Pkw-E} = \frac{C_{Pkw-E} [Pkw - E/s] \cdot (x_{Pkw-E} [-] - 1[-]) \cdot T[s]}{2} \quad [Pkw-E]$$

$$W_{Pkw-E} = \frac{N_{Pkw-E} [Pkw - E]}{C_{Pkw-E} [Pkw - E/s]} \quad [s]$$

Es folgt

$$N_{Pkw-E} = \frac{1}{2} C_{Pkw-E} \cdot (x_{Pkw-E} - 1) \cdot T = \frac{1}{2} C_{Fz} \cdot f \cdot (x_{Fz} - 1) \cdot T = N_{Fz} \cdot f$$

Dies entspricht der Erwartung. Für die Wartezeit gilt hier

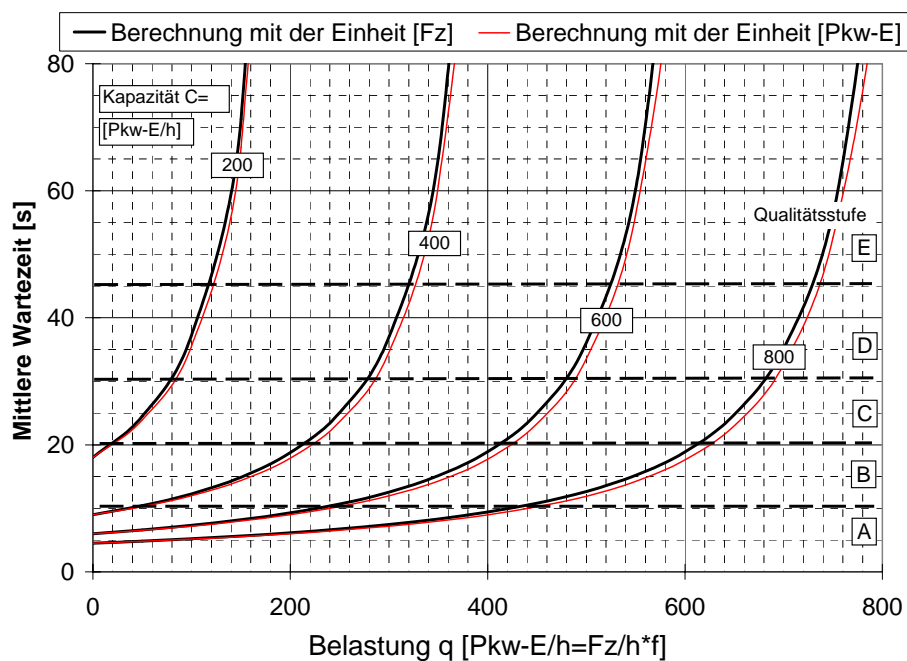
$$W_{Pkw-E} = \frac{N_{Pkw-E}}{C_{Pkw-E}} = \frac{N_{Fz} \cdot f}{C_{Fz} \cdot f} = \frac{N_{Fz}}{C_{Fz}} = W_{Fz}$$

Dies ist ebenfalls korrekt.

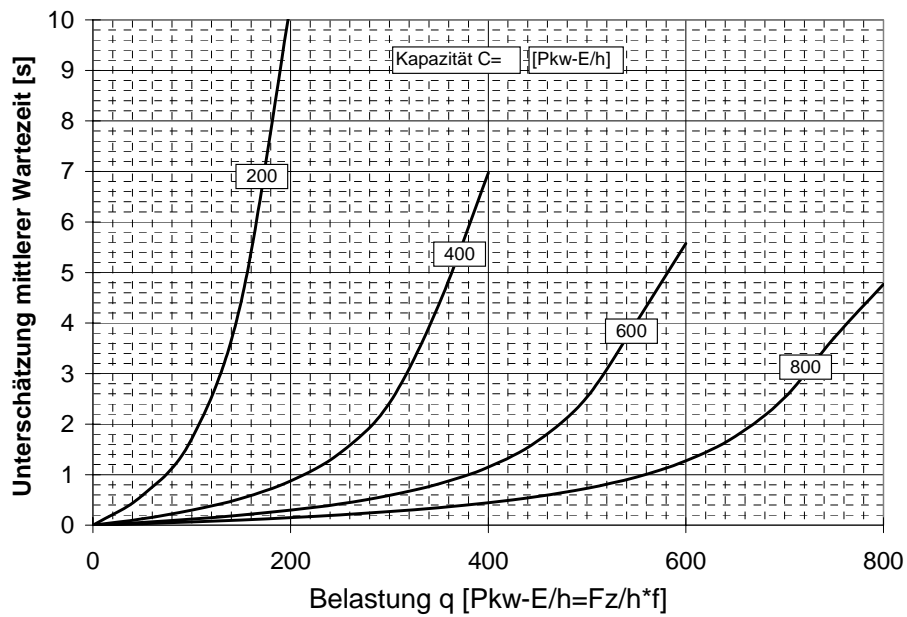
Weil die instationären Wartezeitformeln in den Regelwerken aus einer Kombination von Gl. (1) und Gl. (3) bestehen, führt auch dort die Umrechnung der Verkehrsstärke von der Einheit [Fz] in die Einheit [Pkw-E] zur inkorrekten Berechnung für die Wartezeit und Rückstaulänge. Die Umrechnung der Verkehrsstärke von der Einheit [Fz] in die Einheit [Pkw-E] führt in der Regel zur Unterschätzung der mittleren Rückstaulänge und der mittleren Wartezeit. Diese Unterschätzung entspricht ca. dem Kehrwert des Umrechnungsfaktors  $f$ . Für vorfahrtgeregelte Knotenpunkte mit einem Schwerverkehrsanteil  $a_{Lkw} = 10\%$  ist z. B.  $f = 1,05$  (1 Lkw = 1,5 Pkw-E). Die Rückstaulänge und die Wartezeit haben dann nur ca. 95% (=1/1,05) der korrekten Werte. Die Unterschätzung beträgt ca. 5%. Bei  $a_{Lkw}=20\%$  liegt die Unterschätzung bei ca. 9%. Für Knotenpunkte mit Lichtsignalanlagen wären die Unterschätzungen noch größer, da dort ein Lkw in der Regel in 2 Pkw-E umgerechnet wird. Solche erheblichen Unterschätzungen sind nicht zu vernachlässigen.

In wie fern diese Unterschätzung für die Berechnung der Verkehrsqualität relevant ist, wird hier mit Rechenbeispielen verdeutlicht. In Bild 1 werden die Wartezeiten für die Berechnung mit der Einheit [Fz/h] und mit der Einheit [Pkw-E] nach der Wartezeitformel für Knotenpunkte ohne LSA im HBS verglichen. Dabei wird ein Umrechnungsfaktor  $f = 1,1$  (entspricht 20% Schwerverkehrsanteil) eingesetzt. Man

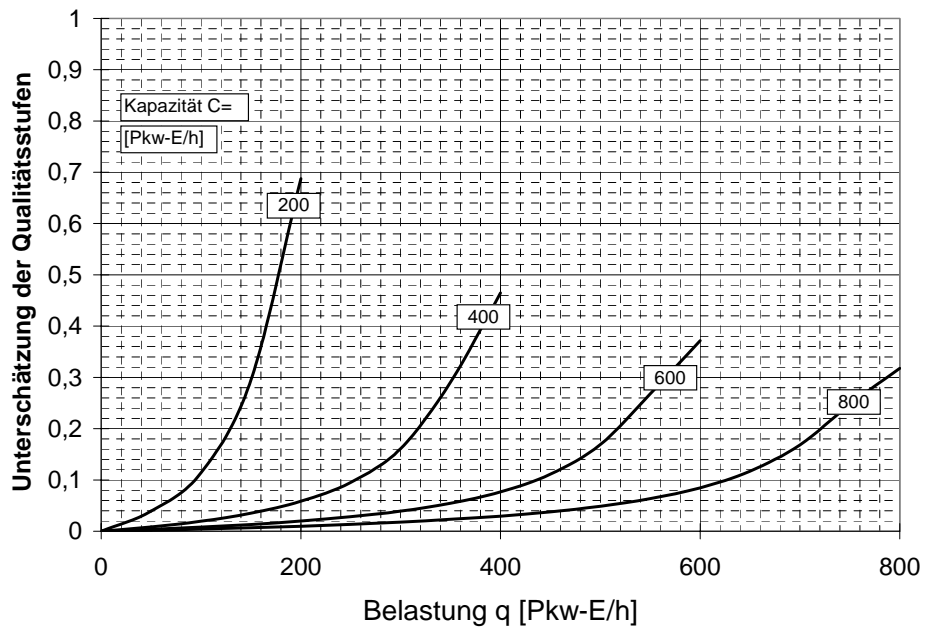
kann hier deutlich die Verläufe der Wartezeiten als Funktion von der Belastung  $q$  und von der Kapazität  $C$  erkennen. In Bild 2 wird die Unterschätzung der Wartezeiten bei der Umrechnung von der Einheit [Fz/h] in die Einheit [Pkw-E] dargestellt. Diese Unterschätzungen sind ebenfalls von der Belastung  $q$  und von der Kapazität  $C$  abhängig. Mit zunehmendem Auslastungsgrad ( $x = q/C$ ) nimmt die Unterschätzung zu. In Bild 3 ist die Auswirkung durch die Unterschätzung der Wartezeiten auf die Verkehrsqualitätsstufen dargestellt (Annahme: Eine QSV =  $w_E - w_D = 15s$ ). Man kann erkennen, dass die Verkehrsqualität bis zu einer ganzen Qualitätsstufe unterschätzt werden kann. Nach dem Bild 3 wird die Verkehrsqualität im Bereich, in dem der Auslastungsgrad  $x$  größer oder gleich 0,8 (im Bereich zwischen QSV D und E) ist, im Schnitt um 0,23 Qualitätsstufen unterschätzt. D. h., die Verkehrsqualität kann in diesem Bereich in 23% aller Fälle um eine Qualitätsstufe durch die Umrechnung von der Einheit [Fz/] in die Einheit [Pkw-E] unterschätzt werden.



**Bild 1 – Vergleich der Wartezeiten für die Berechnung mit der Einheit [Fz/h] und der Einheit [Pkw-E] (mit [Pkw-E] = [Fz]\*f)**



**Bild 2 – Unterschätzung der Wartezeiten bei Umrechnung von der Einheit [Fz/h] in die Einheit [Pkw-E]**



**Bild 3 – Unterschätzung der Qualitätsstufen bei Umrechnung von der Einheit [Fz/h] in die Einheit [Pkw-E]**

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die instationären Wartezeitformeln nach der Transit - Technik, die in den meisten vorhandenen Regelwerken verwendet werden, einige scheinbare Probleme mit der Dimensionsrechnung und mit der Einheitsumrechnung mit sich bringen. Dies ergibt sich aus der Kombination eines stochastischen, stationären Warteschlangensystems mit einem deterministischen Warteschlangensystem mit Überlastung.

Das gleiche Problem existiert auch für die stationären Wartezeitformeln für Lichtsignalanlagen (z. B. die Formel von Webster, 1958 und die Formel von Miller, 1968). Dort werden bei der Berechnung ebenfalls ein deterministisches (für die Berechnung von  $w_1$ , die durch die periodische Umschaltung der Grün- und Rotzeiten entsteht) und ein stochastisches (für die Berechnung von  $w_2$ , die durch die stochastischen Schwankungen des Verkehrsflusses entsteht) Warteschlangensystem miteinander kombiniert. Die Probleme der Dimensionsrechnung und der Umrechnung von der Einheit [Fz] in die Einheit [Pkw-E] treten auch dort auf.

## Ursachensuche für die Probleme

Bei genauer Betrachtung der Herleitung für die allgemeine Standardwarteschlangenformel von Polazcek - Khinshine wird festgestellt, dass für die Berechnung der mittleren Ankunftsanzahl während der Bedienungszeit der Ausdruck  $E(m) = q \cdot t_B = x$  verwendet wird (vgl. Start und Nicholls, 1972, Seite 426). Dabei ist  $t_B$  = mittlere Bedienungszeit und  $q$  = Verkehrsstärke. Im weiteren Verlauf der Herleitung wird immer  $x = E(m)$  verwendet. Der Parameter  $x$  ist demnach mit dem Parameter  $E(m)$  gleichzusetzen. Daher hat hier der Parameter  $x_{st}[\text{Fz}] = E(m) = q[\text{Fz/s}] \cdot t_B [\text{s}]$  die Dimension [Fz] nicht die Dimension [-].

Die Rückstaulänge nach der Polazcek – Khinshine - Formel lautet demnach

$$N = x_{st}[\text{Fz}] + \frac{x_{st}^2[\text{Fz}^2] + q^2[\text{Fz}^2/\text{s}^2]\sigma_{t_B}^2[\text{s}^2]}{2(1[\text{Fz}] - x_{st}[\text{Fz}])} \quad [\text{Fz}]$$

mit  $\sigma_{t_B}^2[\text{s}^2]$  = Varianz der Bedienungszeiten

Hier hat die Rückstaulänge ebenfalls die Dimension [Fz].

Für ein M/M/1 - Warteschlangensystem sind die Bedienungszeiten exponentiell verteilt. Demnach gilt

$$\sigma_{t_B} [s] = t_B [s]$$

Man erhält dann

$$N = x_{st} [Fz] + \frac{x_{st}^2 [Fz^2] + x_{st}^2 [Fz^2]}{2(1[Fz] - x_{st} [Fz])} = \frac{x_{st} [Fz] \cdot 1[Fz]}{1[Fz] - x_{st} [Fz]} = \frac{x[-]}{1[-] - x[-]} \cdot 1[Fz]$$

[Fz]

In dieser o. g. Gleichung kann der Parameter  $x_{st}[Fz]$  in  $x[-]$  überführt werden, indem eine Konstante 1 mit der Dimension [Fz] zu  $x$  multipliziert wird. Die Dimension von  $x_{st}$  wird in die Konstante 1 überführt.

Für die Gl. (1) lautet die Ausdrücke für die Rückstaulänge und für die Wartezeit mit den zugehörigen Dimensionen:

$$N_{pkw-E} = \frac{x[Fz \cdot f] \cdot 1[Fz \cdot f]}{1[Fz \cdot f] - x[Fz \cdot f]} = \frac{x[Fz] \cdot 1[Fz]}{1[Fz] - x[Fz]} \cdot f = N_{Fz} \cdot f$$

$$w_{pkw-E} = \frac{x[Fz \cdot f] \cdot 1[Fz \cdot f]}{q[Fz \cdot f](1[Fz \cdot f] - x[Fz \cdot f])} = \frac{x[Fz] \cdot 1[Fz]}{q[Fz](1[Fz] - x[Fz])} = w_{Fz}$$

Jetzt wird auch die korrekte Relation zwischen den umgerechneten Einheiten wiederhergestellt.

Schreibt man die Gl. (2) mit den zugehörigen Dimensionen aus, erhält man

$$N = \frac{x[Fz] \cdot 1[Fz] \cdot C_0[-]}{1[Fz] - x[Fz]} = \frac{x[-]}{1[-] - x[-]} \cdot C_0[Fz] \quad [-]$$

D.h., der Parameter  $C_0$  muss die Dimension [Fz] besitzen, damit der Parameter  $x$  als dimensionslos betrachtet wird und die Dimensionsrechnung konsistent bleibt. Die Dimension von  $x$  wird in die Konstante  $C_0$  überführt.

An dieser Stelle wird mit Nachdruck hervorgehoben, dass für ein stochastisches, stationäres Standardwarteschlangensystem (z.B. Gl. (1) und Gl. (2)) immer  $x_{st}[Fz] = t[s] \cdot q[Fz/s]$  gilt anstelle von  $x[-] = q[Fz/s] / C[Fz/s]$ . Es gilt

$x_{st}[Fz] = x[-] \cdot 1[Fz]$ . Wenn man den Parameter  $x = x_{st}$  als dimensionslos betrachtet, muss eine Konstante mit der Dimension [Fz] hinzugefügt werden.

Für ein deterministisches Warteschlangensystem gilt nach der Herleitung (siehe Gl. (3), vgl. auch Kimber - Hollis, 1979 und Akcelik 1980)  $x_{inst}[-] = q[Fz/s] / C[Fz/s] = x[-]$ .

Wenn man die Dimensionen von beiden unterschiedlich definierten  $x$  ( $x_{st}$  und  $x_{inst}$ ) bei der Herleitung der instationären Wartezeitformeln, die in den Regelwerken verwendet werden, mitnimmt, dann stimmt die Dimensionsrechnung auch in den resultierenden Ausdrücken. Dann lautet z. B. die Wartezeitformel für Knotenpunkte ohne LSA im HBS (FGSV, 2001, Seite 7-81) mit allen zugehörigen Dimensionen:

$$w = D_1 + E + \frac{1}{\mu} \quad [s]$$

mit:  $D_1 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{F^2 + G} - F \right) \quad [s]$

$$F = \frac{1}{\mu_0 - q_0} \cdot \left[ \frac{T}{2} \cdot (\mu - q) \cdot y + C_0 \cdot \left( y - \frac{\mu - \mu_0 + q_0}{\mu} \right) \right] + E \quad [s]$$

$$G = \frac{2 \cdot T \cdot y}{\mu_0 - q_0} \cdot \left[ \frac{C_0 \cdot q}{\mu} - (\mu - q) \cdot E \right] \quad [s^2]$$

$$E = \frac{C_0 \cdot q_0}{\mu_0 \cdot (\mu_0 - q_0)} \quad [s]$$

$$y = 1 - \frac{\mu - \mu_0 + q_0}{q} \quad [-]$$

$w$  = mittlere Wartezeit [s]

$T$  = Dauer des betrachteten Spitzenintervalls [s]  
(für Bild 7-19 im HBS ist  $T = 3600s$ , also 1 h)

$\mu$  = Kapazität des Nebenstroms im betrachteten Spitzenintervall [Pkw-E/s]

$q$  = Verkehrsstärke des Nebenstroms [Pkw-E/s]

$\mu_0$  = Kapazität in der Zeit nach dem Spitzenintervall [Pkw-E/s]  
=  $\mu / 0,8$ , wenn nicht explizit definiert

$q_0$  = Verkehrsstärke des Nebenstroms nach dem Spitzenintervall [Pkw-E/s]

$$= q \cdot 0,8, \text{ wenn nicht explizit definiert}$$

$$C_0 = f \cdot 1[\text{Pkw-E}] = q_{\text{Pkw-E}} / q_{\text{Fz}} \cdot 1[\text{Pkw-E}] \quad [\text{Pkw-E}]$$

Damit werden die Ursachen für die Probleme bei der Dimensionsrechnung und bei der Umrechnung der Verkehrsstärke von der Einheit [Fz] in die Einheit [Pkw-E] gefunden und klargestellt.

## Zusammenfassung

Naturgemäß müssen bei der Anwendung der Rückstaulängen- und Wartezeitformeln mit unterschiedlichen Einheiten für die Verkehrsstärke folgende Bedingungen eingehalten werden:

$$N_{\text{Pkw-E}} = N_{\text{Fz}} \cdot f$$

$$W_{\text{Pkw-E}} = \frac{N_{\text{Pkw-E}}}{q_{\text{Pkw-E}}} = \frac{N_{\text{Fz}} \cdot f}{q_{\text{Fz}} \cdot f} = W_{\text{Fz}}$$

Alle Formeln in den Regelwerken (HBS 2001; HCM 2000) für die Berechnung der Wartezeit und Rückstaulänge erfüllen diese Bedingungen nicht. Die Dimensionsrechnung in solchen Formeln ist nicht konsistent. Der Grund liegt darin, dass die Dimensionen der Eingangsparameter bei der Herleitung solcher Formeln falsch aufgefasst oder vernachlässigt wurden. Eine Klarstellung der Dimensionen in allen Rückstaulängen- und Wartezeitformeln ist dringend notwendig (vgl. Wu, 2005).

Bei der Anwendung der in den Regelwerken angegebenen Wartezeit- und Rückstaulängenformeln führt die Umrechnung der Eingangsparameter (Verkehrsstärke  $q$  und Kapazität  $C$ ) von der Einheit [Fz] in die Einheit [Pkw-E] in der Regel zur Unterschätzung der mittleren Rückstaulänge und der mittleren Wartezeit. Dies kann in bis zu 20% aller Fälle zur Unterschätzung um eine Verkehrsqualitätsstufe führen.

Die hier erwähnten Unklarheiten in der Dimensionsrechnung und in der Umrechnung von Fahrzeugen in Pkw-Einheiten können vermieden werden, wenn bei der Anwendung der Regelwerke in der vorhandenen Form alle Berechnungen mit der Einheit [Fz] – wie es bei der Berechnung der LSA im HBS 2001 und HCM 2000 bereits der Fall ist – durchgeführt werden. Wenn die Kapazität nur in der Einheit [Pkw-E] zur Verfügung steht, z. B. bei den vorfahrtgeregelten Knotenpunkten, kann der Einfluss des

Schwerverkehrs durch Umrechnung der Kapazität in die Einheit [Fz/h] berücksichtigt werden. Alle Eingangsparameter sollten entsprechend in die Einheit [Fz/h] umgerechnet werden. Falls Berechnungsergebnisse in der Einheit [Pkw-E] weiter verwendet werden müssen (z.B. für die Berechnung der Staurlängen), können sie dann wieder von der Einheit [Fz] in die Einheit [Pkw-E] zurück umgerechnet werden.

## **Literatur**

### **Akcelik, R. (1980):**

Time-dependent expressions for delay, stop rate and queue length at traffic signals. *Australian Road Research Board*, No. 361-1, Okt./1980.

### **FGSV (2001):**

*Handbuch für die Bemessung von Straßenverkehrsanlagen (HBS 2001)*.  
Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen (Hrsg.), Nr. 299, FGSV  
Verlag GmbH, Köln.

### **Kimber, R.M.; Hollis, E.M. (1979):**

Traffic queues and delays at road junctions. *TRRL Laboratory Report*, LR 909,  
1979.

### **Miller, A.J. (1968):**

Signalised intersections - capacity quite. *Australian Research Board Bull*, No. 4,  
1968. Reprinted as *ARRB Research Report ARR No. 79*, 1978

### **Stark, R.; Nicholls, R. (1972):**

*Mathematical Foundations for Design: Civil Engineering*. McDraw-Hill Book  
Company.

### **TRB (2000):**

*Highway Capacity Manual (HCM 2000)*. TRB, National Research Council,  
Washington, D.C.

### **Webster, F.V. (1958):**

Traffic signal settings. *RRL Technical Paper No. 39*, HMSO, London 1958.



**Wu, N. (1996):**

Rückstaulängen an Lichtsignalanlagen unter verschiedenen Verkehrsbedingungen.  
*Straßenverkehrstechnik*, Heft 5, 1996. Kirschbaum Verlag GmbH, Bonn.

**Wu, N. (1997):**

Verteilung der Rückstaulängen an vorfahrtgeregelten Knotenpunkten.  
*Straßenverkehrstechnik*, Heft 8, 1997. Kirschbaum Verlag GmbH, Bonn.

**Wu, N. (2005):**

Dimensionsrechnung in Warteschlangenmodellen - Unklarheiten bei der Anwendung in der Straßenverkehrstechnik und Klarstellung der Wartezeitformeln in HBS und HCM. *Arbeitsblätter des Lehrstuhl für Verkehrswesen*, Nr. 30, Ruhr-Universität, Bochum.

## **Anschrift des Verfassers**

Dr.-Ing. habil., Privatdozent an der Fakultät für Bauingenieurwesen, Ruhr-Universität Bochum, 44780 Bochum, [ning.wu@rub.de](mailto:ning.wu@rub.de)

## **Unterschriften der Abbildungen**

Bild 1 – Vergleich der Wartezeiten für die Berechnung mit der Einheit [Fz/h] und der Einheit [Pkw-E] ( $[Pkw-E] = [Fz/h] \cdot f$ )

Bild 2 – Unterschätzung der Wartezeiten bei Umrechnung von der Einheit [Fz/h] in die Einheit [Pkw-E]

Bild 3 – Unterschätzung der Qualitätsstufen bei Umrechnung von der Einheit [Fz/h] in die Einheit [Pkw-E]