Affine Wirkungen unipotenter Gruppen und steinsche homogene Mannigfaltigkeiten

Annett Pütmann

23.7.2003

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Suche nach Kriterien, mit deren Hilfe man entscheiden kann, ob der Quotient G/V einer algebraischen Gruppe G nach einer unipotenten Untergruppe V affin ist. Die ursprüngliche analytische Frage, ob der Quotient G/H einer komplexen Liegruppe G nach einer abgeschlossenen, komplexen Untergruppe H steinsch ist, läßt sich auf diesen algebraischen Fall reduzieren [23].

Der Quotient G/V kann nur steinsch sein, wenn V in G die sogenannte Matsushimabedingung erfüllt. Für wichtige Spezialfälle, wie z.B. wenn die komplexe Liegruppe G reduktiv, nilpotent oder auflösbar und steinsch ist, liefert die Matsushimabedingung bereits ein hinreichendes gruppentheoretisches Kriterium dafür, daß G/H steinsch ist.

Die Matsushimabedingung ist jedoch kein hinreichendes Kriterium für die Affinität des Quotienten, wenn man den allgemeineren Fall einer linearen algebraischen Gruppe G betrachtet, wie ein Beispiel von Winkelmann [26] mit $V = (\mathbb{C}^2, +)$ und $G = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ zeigt. In der vorliegenden Arbeit wird eine Serie, d.h. $n > 4$ beliebig, von qualitativ neuen Beispielen vorgestellt, die die Matsushimabedingung erfüllen, aber nicht-affine Quotienten besitzen.

Es ist bekannt, daß man sich bei der Untersuchung des Quotienten G/V auf die Betrachtung von kommutativen Untergruppen V beschränken kann. Wir diskutieren, inwiefern eine Reduktion auf den Fall $G = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$, der affin genannt wird, zulässig ist.

Für die affine Situation werden Verfahren zur Untersuchung des Quotienten G/V entwickelt und auf mehrere Beispiele, alte und neue, angewendet. Wichtige Methoden dabei sind die Ausnutzung der algebraischen Struktur, die Verwendung von Aufblasungen und von induzierten Gruppenwirkungen.

Besondere Beachtung wird dem Fall $V = (\mathbb{C}^2, +)$ geschenkt, für den gezeigt wird, daß das Auftreten von nicht-affinen Quotienten G/V kein singuläres Ereignis ist. Dazu konzentrieren wir uns auf die Untersuchung der induzierten V-Wirkung auf dem unipotenten Anteil von G, der isomorph zu $\mathbb{C}^n$ ist.

Es ist zu bemerken, daß selbst der einfachste Fall einer freien, algebraischen $(\mathbb{C},+)$-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ nicht trivial ist [26]. Im hier behandelten, recht speziellen Kontext von affinen Wirkungen treten für $V = (\mathbb{C}^2,+)$ die ersten interessanten Phänomene von freien Wirkungen auf, die nicht trennbare Bahnen besitzen, obwohl alle Bahnen abgeschlossen sind. Außerdem erhält man durch diese Sichtweise eine Verbindung zum Divisionsproblem, also der Frage, ob die Basis jedes trivialen $(\mathbb{C}^m,+)$-Prinzipalbündels mit Totalraum $\mathbb{C}^{n+m}$ isomorph zu $\mathbb{C}^n$ ist.

Ich möchte mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Dr.h.c. A.T.Huckleberry für die Anregung zu dieser Arbeit, seine Unterstützung und die gewährte Freiheit bei der thematischen Gestaltung bedanken.

2 Überblick

Ausgangspunkt der Untersuchungen dieser Arbeit ist die folgende Situation: Es sei G eine zusammenhängende, lineare algebraische Gruppe und V eine zusammenhängende, unipotente Untergruppe. Die zentrale Frage ist: Unter welchen Bedingungen ist G/V steinsch?

In Kapitel 3 werden einige bereits bekannte Resultate, die für die Beantwortung dieser Frage wichtig sind, teilweise mit Beweisen zusammengestellt. Neben anderen sind dies folgende Aussagen: Man kann annehmen, daß V kommutativ ist. Wenn G/V steinsch ist, muß V die Matsushimabedingung in G erfüllen,

Für alle bisher in [23], [26] und [4] konkret betrachteten Beispiele ist $G = \mathrm{Sl}_n\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^n$. Deshalb beschäftigt sich das Kapitel 4 damit, ob man sich auf diesen Fall zurückziehen kann. Es wird gezeigt, daß dies möglich ist, wenn sich die Matsushimabedingung überträgt (siehe Satz 4.10). In allen folgenden Kapiteln wird $G = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ angenommen.

Die Untersuchung der Quotienten G/V ist eng mit der Wirkung unipotenter Gruppen auf $\mathbb{C}^n$ verknüpft, denn die Wirkung von V auf G induziert eine V-Wirkung auf $U \cong M\backslash G$ (siehe Kapitel 3). Diese Wirkung ist genau dann frei, wenn V die Matsushimabedingung erfüllt. Es gibt bereits Beispiele dafür, daß die Quotienten einer freien, holomorphen $\mathbb{C}$-Wirkung auf $\mathbb{C}^5$ und einer freien, algebraischen $\mathbb{C}$-Wirkung auf $\mathbb{C}^4$ nicht hausdorffsch sein müssen [26]. Auch im hier vorliegenden Fall affiner Wirkungen, d.h. $V \subset \mathrm{Sl}_n\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^n$, impliziert die Matsushimabedingung nicht, daß der Quotient $\mathbb{C}^n/V$ hausdorffsch ist, wie das Beispiel einer affinen, nicht eigentlichen $\mathbb{C}^2$-Wirkung auf $\mathbb{C}^5$ in Abschnitt 6.2.4 zeigt. Dieses Beispiel ist das kleinste einer Wirkung, deren Quotient nicht existiert, bezüglich der Dimension von V, des Grades der Exponentialabbildung $\mathfrak{v} \to V$ und n. Jedoch ist die Quotiententopologie des Bahnenraumes U/V hausdorffsch, falls der Grad der Exponentialabbildung $\mathfrak{v} \to V$ kleiner als 2 ist (siehe Satz 5.5, Satz 5.8), da V dann eigentlich wirkt. Umgekehrt gilt, wie in Folgerung 3.8 gezeigt wird, daß jede freie, affine V-Wirkung auf U mit hausdorffschem Quotienten eigentlich ist.

Auch wenn die Matsushimabedingung nicht ausreicht, um die Existenz eines komplex-analytischen Quotienten der V-Wirkung auf U zu sichern, so ist die

Betrachtung dieser Wirkung doch sinnvoll, denn G/V ist genau dann steinsch, wenn U/V existiert und steinsch ist (siehe Satz 3.9).

In Kapitel 7 wird untersucht, ob das Auftreten von affinen $\mathbb{C}^2$-Wirkungen auf $\mathbb{C}^n$ mit nicht-hausdorffschem Quotienten ein singuläres Ereignis ist. Dazu werden die affinen $\mathbb{C}^2$-Wirkungen auf $\mathbb{C}^n$, die die Matsushimabedingung erfüllen und nicht trivialerweise steinsche Quotienten haben, durch eine konstruierbare, reduzible Teilmenge $X(2,n)$ einer Grassmanschen parametrisiert, auf der die Gruppe H der affinen Koordinatentransformationen auf $\mathbb{C}^n$ in natürlicher Weise wirkt. Es wird gezeigt, daß für ungerades $n \geq 5$ eine offene H-Bahn aus Wirkungen besteht, deren Quotient isomorph zu $\mathbb{C}^{n-2}$ ist. Für gerades $n \geq 6$ gibt es eine offene H-Bahn von Wirkungen, die einen nicht-hausdorffschen Quotienten besitzen. Die Beweise werden direkt durch Angabe eines globalen Schnittes der V-Wirkung auf U bzw. durch Angabe von nicht trennbaren V-Bahnen geführt. Die Tatsache, daß die Quotienten U/V nicht hausdorffsch sind, impliziert sofort, daß die Quotienten G/V in diesen Beipielen nicht affin sind.

Mit Hilfe der Verfahren aus Kapitel 6 könnte man nur folgern, daß die V-invarianten Funktionen (holomorph oder algebraisch) auf U die V-Bahnen nicht trennen, was schwächer ist, als die Aussage, daß kein geometrischer Quotient existiert, aber immer noch reicht, um zu schließen, daß G/V nicht steinsch ist. Es bleibt in diesem Kontext eine offene Frage, ob aus der Existentz eines Quotienten einer freien, affinen V-Wirkung auf U folgt, daß dieser Quotient holomorph oder algebraisch separabel ist.

Grundlage der in Kapitel 6 beschriebenen Konstruktionen ist die Tatsache, daß es eine Zariski-offene, V-invariante Teilmenge $U_0 \subset G$ bzw. $U_0 \subset U \cong M\backslash G$ gibt, so daß die Quotientenabbildung $U_0 \to U_0/V$ trivial und explizit ist (siehe [5] und Abschnitt 6.2.1). Die Quotientenabbildung läßt sich regularisieren, d.h. es gibt eine dominante, reguläre Abbildung $\Psi : G \to Z$ in eine affine Varietät Z, so daß die Einschränkung von Ψ auf U_0 mit der Quotientenabbildung auf U_0 übereinstimmt.

Vielleicht trennt Ψ auf $G \setminus U_0$ oder $U \setminus U_0$ die Bahnen noch nicht. Jedoch gibt es rationale Funktionen x auf Z, die reguläre Invarianten auf G sind, d.h. $\Psi^*(x) \in \mathbb{C}[G]^V$. Mit Hilfe der G-Wirkung auf $\mathbb{C}[G]$ kann man genügend solcher rationalen Invarianten konstruieren, um eine V-invariante Abbildung zu erhalten, die die V-Bahnen auf G trennt. Die Hinzunahme von rationalen Invarianten kann man als Liftung der Abbildung Ψ zu einer Abbildung von G in eine spezielle affine Teilmenge einer Aufblasung von $\overline{\Psi(G \setminus U_0)} \subset Z$ interpretieren. Angewendet auf die V-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ ergibt die Aufblasungsmethode zusammen mit dem Igusa-Kriterium eine Bedingung dafür, wann der Quotient $\mathbb{C}^n/V$ nicht holomorph separabel ist.

Neben einer affinen $\mathbb{C}^2$-Wirkung auf $\mathbb{C}^5$ mit nicht-hausdorffschem Quotienten gibt es [26] eine affine $\mathbb{C}^2$-Wirkung auf $\mathbb{C}^6$, deren Quotient dicht, mit Komplement von Kodimension 2 in einer nichtsingulären Quadrik in $\mathbb{C}^5$ liegt, also auch nicht affin ist. In Abschnitt 6.2.4 wird gezeigt, wie sich diese beiden Beispiele nicht-steinscher Quotienten, die als $\mathbb{C}^n/V$ sehr verschieden sind, bei der Untersuchung von G/V ähneln. Es besteht die Hoffnung, durch die Betrachtung von G/V statt U/V zeigen zu können, daß es eine V-invariante Abbildung

$\pi : G \to X$ in eine affine, normale, irreduzible Varietät X gibt, die die V-Bahnen trennt, generisch die Quotientenabbildung ist und die Eigenschaft $X = \pi(G)$ oder $\operatorname{codim}(X \setminus \pi(G)^0) \geq 2$ besitzt. So könnte man die schwierige Frage nach der Affinität von Hyperebenenkomplementen umgehen.

In Kapitel 8 werden die Parameterräume $X(2, n)$ für $n = 4, 5, 6$ diskutiert. Für $X(2, 4)$ besteht der Parameterraum nur aus einer H-Bahn. Die Bahnenraumstruktur von $X(2, 5)$ wird vollständig angegeben. Die Bestimmung von Repräsentanten der H-Wirkung erfolgt durch systematische Fallunterscheidung. Außerdem werden die zu den parametrisierten Wirkungen gehörigen Quotienten untersucht. Im Fall affiner Quotienten wird gezeigt, daß diese isomorph zu $\mathbb{C}^{n-2}$ $(n = 4, 5, 6)$ sind. Es ist eine offene Frage, ob dies für alle freien, affinen $\mathbb{C}^2$-Wirkungen auf $\mathbb{C}^n$ mit affinem Quotienten der Fall ist.

3 Grundlegende Definitionen und Sätze

Wenn G eine zusammenhängende, komplexe Liegruppe ist und H eine abgeschlossene, zusammenhängende, komplexe Untergruppe, so erhält man eine eindeutige komplexe Struktur auf G/H mit der Eigenschaft, daß die Abbildung $G \times G/H \to G$, gegeben durch $(g_1, g_2H) = (g_1g_2)H$, eine G-Wirkung, also insbesondere eine holomorphe Abbildung, ist, indem man lokale Schnitte der H-Wirkung auf G mit Hilfe der Gruppenmultiplikation in G verschiebt. Also ist $G \to G/H$ ein H-Prinzipalbündel und der folgende Satz von Matsushima damit von großer Bedeutung.

Satz 3.1 ([14]). *Es seien M eine komplexe, reduktive, zusammenhängende Liegruppe und $E \to B$ ein M-Prinzipalbündel. Der Totalraum E ist genau dann steinsch, wenn die Basis B steinsch ist.*

Ebenso ist G/H in eindeutiger Weise eine Varietät, wenn man voraussetzt, daß G eine zusammenhängende, komplex-algebraische Gruppe und H eine zusammenhängende, komplex-algebraische Untergruppe ist, und fordert, daß die G-Wirkung auf G/H algebraisch ist. Die Menge G/H erhält dabei eine algebraische Struktur als Untervarietät eines projektiven Raumes durch die Konstruktion einer G-äquivarianten Abbildung $G \to \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$, für die es einen Punkt $w \in \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ mit $G_w = H$ gibt.

Wenn H eine Untergruppe von G ist, so wirkt H durch Rechtsmultiplikation auf G. Es sei nun H eine komplexe Liegruppe bzw. eine algebraische Gruppe, die auf eine komplexe Mannigfaltigkeit bzw. auf eine Varietät X wirkt. Ein komplexer Raum bzw. eine Varietät Y heißt wie in [19] zusammen mit einem Morphismus $\pi : X \to Y$ *geometrischer Quotient* der H-Wirkung auf X, wenn π surjektiv und offen ist, jede Faser von π aus genau einer H-Bahn besteht und für alle offenen Mengen $U \subset X$ der Homomorphismus $\pi_Y^* : \mathbb{C}[U] \to \mathbb{C}[\pi^{-1}(U)]^H$ ein Isomorphismus ist. Mit der Quotientenabbildung $G \to G/H$, gegeben durch $g \mapsto gH$ ist G/H, ein geometrischer Quotient. Für weniger spezielle H-Wirkungen ist das folgende Kriterium zur Bestimmung von geometrischen Quotienten hilfreich.

Satz 3.2 ([19]). *Wenn $\pi : X \to Y$ ein surjektiver Morphismus von einer irreduziblen Varietät X auf eine normale Varietät Y ist, dessen Fasern genau die Bahnen einer Wirkung auf X sind, dann ist Y der geometrische Quotient dieser Wirkung.*

Häufig ist es sinnvoll, den Quotienten einer Gruppenwirkung schrittweise zu konstruieren. Es sei $V \subset H$ eine abgeschlossene, algebraische Untergruppe von H. Dann ist die Abbildung $G/V \to G/H$, gegeben durch $gV \mapsto gH$, ein Faserbündel, dessen Fasern isomorph zu der Varietät H/V sind, denn jede lokale Trivialisierung $\varphi : U \times H \to \pi^{-1}(U)$ des H-Prinzipalbündels $\pi : G \to G/H$ liefert mit Hilfe der Abbildung $U \times H/V \to G/V$, gegeben durch $(u, hV) \mapsto \pi_V(\varphi(u,h))$, wobei π_V die Projektion $G \to G/V$ bezeichnet, eine lokale Trivialisierung von $G/V \to G/H$. Ist nun V ein Normalteiler von H, so ist H/V eine algebraische Gruppe, die auf der Varietät G/V wirkt, und es gilt:

Satz 3.3. *Die Abbildung $G/V \to (G/V)/(H/V)$ ist ein H/V-Prinzipalbündel und $G/H \cong (G/V)/(H/V)$.*

Folgerung 3.4. *Es sei G eine zusammenhängende, linear algebraische Gruppe, H eine abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe und $H = L \ltimes V$ eine Zerlegung von H in ein semidirektes Produkt einer reduktiven Untergruppe L und eines unipotenten Radikals V.*
Der Quotient G/H ist genau dann steinsch, wenn G/V steinsch ist.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 3.1 und Satz 3.3, da V ein Normalteiler in H und die Gruppe $L \cong H/V$ reduktiv ist. □

Für den Rest des Kapitels bezeichne, wenn nicht anders erläutert, G eine zusammenhängende, komplex-algebraische Gruppe und V eine unipotente Untergruppe. Da V keine nichttrivialen Charaktere besitzt, ist G/V quasiaffin.

Aus der Affinität von G/V folgt natürlich, daß G/V steinsch ist. Die Umkehrung ist noch nicht bewiesen, aber vielleicht wahr. Jedoch gibt es ein quasiaffines, nicht-affines Schema, dessen analytische Form steinsch ist [18]. Problematisch ist auch, daß es lineare Wirkungen unipotenter Gruppen gibt, deren Invariantenring nicht endlich erzeugt ist [19], [17]. Die Frage, ob der Invariantenring $\mathbb{C}[G]^V$ endlich erzeugt ist, erweist sich als sehr interessant. Denn wenn $\mathbb{C}[G]^V$ endlich erzeugt und G/V steinsch ist, so ist G/V auch affin [2], [3].

Unter dem Gesichtspunkt, daß man nur kommutative Untergruppen V betrachten möchte, ist zusätzlich das folgende, schon bekannte Resultat, wichtig:

Satz 3.5. *Der Quotient G/V ist genau dann steinsch (affin), wenn das V-Prinzipalbündel $G \to G/V$ holomorph (algebraisch) trivial ist.*

Beweis. Da vorausgesetzt wird, daß V unipotent ist, existieren abgeschlossene Untergruppen V_i von V für $i = 0, \ldots, \dim V$, so daß $V_0 = V$, $V_n = \{0\}$ und $V_{i+1}/V_i \cong (\mathbb{C}, +)$, also insbesondere V_{i+1} Normalteiler von V_i ist. Die Behauptung folgt mit Satz 3.3 durch Induktion aus der Tatsache, daß jedes $(C, +)$-Prinzipalbündel über einer steinschen Mannigfaltigkeit (nichtsingulären, affinen Varietät) holomorph (algebraisch) trivial ist, denn G/V_i ist immer auch eine komplexe Mannigfaltigkeit. □

Es sei $G = M \ltimes U$ eine Zerlegung von G in ein semidirektes Produkt einer reduktiven Untergruppe M und ein unipotentes Radikal U. Die Gruppe V erfüllt in G die *Matsushimabedingung*, falls für alle $g \in G$ gilt $g^{-1}Vg \cap M = \{e\}$. Die Matsushimabedingung ist eine wichtige gruppentheoretische Bedingung. Wenn G/V steinsch ist, so erfüllt V in G die Matsushimabedingung [23].

Die V-Wirkung auf G induziert eine algebraische V-Wirkung durch Multiplikation von rechts auf $M\backslash G \cong U$ (siehe [23] und Kapitel 4). Die Matsushimabedingung ist äquivalent dazu, daß V frei auf U wirkt. Übereinstimmend mit der Notation in [23] sagt man, daß der *Quotient* einer holomorphen Wirkung auf einer komplexen Mannigfaltigkeit *existiert*, falls die Quotiententopologie auf dem Raum der Bahnen hausdorffsch ist. Dies ist im Fall einer freien, algebraischen Wirkung gleichbedeutend damit, daß der geometrische Quotient der Wirkung auf existiert [23], [9].

Die V-Wirkung auf G durch Multiplikation von rechts und die M-Wirkung auf G durch Multiplikation von links kommutieren. Deshalb ist es auch sinnvoll, die Wirkung der reduktiven Gruppe M auf G/V zu betrachten. Ein wichtiges Ergebnis der Theorie der Wirkung reduktiver Gruppen ist:

Satz 3.6 ([23])**.** *Es sei G eine zusammenhängende, steinsche Liegruppe und V eine zusammenhängende, komplexe Untergruppe, die die Matsushimabedingung erfüllt. Wenn der geometrische Quotient Y der M-Wirkung auf G/V existiert, so ist $G/V \to Y$ ein M-Prinzipalbündel.*

Lemma 3.7. *Die Abbildung $G/V \to M\backslash(G/V) \cong Y$ ist genau dann ein M-Prinzipalbündel, wenn $M\backslash G \cong U \to U/V \cong Y$ ein V-Prinzipalbündel ist.*

Beweis. Die Situation ist symmetrisch. Es sei $s_2 : M\backslash G/V \supset S \to G/V$ ein lokaler Schnitt. Da $G \to G/V$ ein V-Prinzipalbündel ist, kann man S so wählen, daß es einen Schnitt $s_1 : s_2(S) \to G$ gibt. Es bezeichne $\pi : G \to U$ die Projektion von G auf den Quotienten der M-Wirkung. Nun ist $\pi \circ s_1 \circ s_2 : S \to U$ ein Schnitt. □

Folgerung 3.8. *Falls der Quotient der V-Wirkung auf U hausdorffsch ist, so ist die Quotientenabbildung $U \to U/V$ ein V-Prinzipalbündel.*

Beweis. Aus Satz 3.6 folgt, daß $G/V \to M\backslash(G/V)$ ein M-Prinzipalbündel ist. Die Behauptung ergibt sich mit Lemma 3.7. □

Satz 3.9. *Unter der Voraussetzung, daß V die Matsushimabedingung in G erfüllt, ist der Quotient G/V genau dann steinsch, wenn der Quotient der V-Wirkung auf U existiert und steinsch ist. In diesem Fall ist die Quotientenabbildung $U \to U/V$ ein holomorph triviales V-Prinzipalbündel.*

Beweis. Die Quotienten $M\backslash(G/V)$ und $(M\backslash G)/V$ sind isomorph [23]. Der Quotient G/V ist genau dann steinsch, wenn das V-Prinzipalbündel $G \to G/V$ holomorph trivial ist. Da V die Matsushimabedingung erfüllt, wirkt M frei auf G/V.

Wenn G/V steinsch ist, so existiert der geometrische Quotient der Wirkung der reduktiven Gruppe M, ist steinsch und die Quotientenabbildung $G/V \to$

$M\backslash(G/V)$ ist ein analytisches, lokal triviales M-Bündel [22]. Die lokalen Trivialisierungen von $G \to M\backslash G/V$ liefern lokale, analytische Schnitte der V-Wirkung auf U.

Umgekehrt folgt wegen Satz 3.6 und Satz 3.1, daß G/V steinsch ist, wenn $M\backslash(G/V)$ steinsch ist. $\square$

Satz 3.10. *Unter der Voraussetzung, daß V die Matsushimabedingung in G erfüllt, ist der Quotient G/V genau dann affin, wenn der geometrische Quotient der algebraischen V-Wirkung auf U existiert und affin ist. In diesem Fall ist die Quotientenabbildung $U \to U/V$ ein algebraisch triviales V-Prinzipalbündel.*

Beweis. Falls G/V affin ist, so wirkt die reduktive Gruppe M frei auf der affinen Varietät G/V. Dies bedeutet, daß alle M-Bahnen abgeschlossen sind. Da der kategorische Quotient der M-Wirkung auf G/V nun ein geometrischer Quotient ist, ist auch U/V affin.

Wenn U/V der geometrische Quotient der V-Wirkung auf U und affin ist, so ist neben $G \to G/V$ und $G \to U$ auch die Abbildung $U \to U/V$ affin. Weiterhin muß U/V nichtsingulär sein, denn $G/V \to U/V$ ist wegen 3.6 ein holomorphes M-Prinzipalbündel. Dies reicht, um wie in [24] zu zeigen, daß auch $G/V \to U/V$ ein affiner Morphismus ist, und zu folgern, daß G/V affin ist. (Alternativ kann man ausnutzen, daß $U \to U/V$ eine Zariski-offene Trivialisierung besitzt, da V unipotent ist. Damit besitzt auch das holomorphe M-Prinzipalbündel $G/V \to U/V$ eine Zariski-offene Trivialsierung. Dies genügt, um zu folgern [21], daß $G/V \to U/V$ durch Zariski-offene Trivialsierungen überdeckt werden kann.)

Unter Ausnutzung der Tatsache, daß die algebraische Wirkung eines zu $(\mathbb{C}, +)$ isomorphen Normalteilers von V auf U triangulär und damit äquivalent zu einer Translation in U ist [4], und der Zerlegung von V folgt durch Induktion wie in Satz 3.5 und [25], daß $U \to U/V$ ein algebraisch triviales V-Prinzpalbündel ist. $\square$

Die Wirkung einer komplexen Liegruppe H auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X heißt *eigentlich*, falls die Abbildung $H \times X \to X \times X$, gegeben durch $(x, h) \mapsto (x, h.x)$, eigentlich ist. Eigentliche Wirkungen besitzen Quotienten mit hausdorffscher Quotiententopologie [9]. Mit Folgerung 3.8 erhält man

Folgerung 3.11. *Wenn V die Matsushimabedingung erfüllt, so existiert der Quotient der V-Wirkung auf $U \cong M\backslash G$ genau dann, wenn die V-Wirkung auf U eigentlich ist.*

4 Reduktion auf affine Wirkungen

Es sei $G = M \ltimes U$ eine lineare algebraische Gruppe, wobei M eine reduktive und U eine unipotente algebraische Untergruppe von G ist. Jedes Element g aus G läßt sich eindeutig als Produkt $g = mu = (m, u)$ mit $m \in M$ und $u \in U$ schreiben. Die Gruppenmultiplikation in G ist durch $(m, u)(m', u') = (mm', \varphi({m'}^{-1})(u)u')$ gegeben. Dabei ist $\varphi : M \to \mathrm{Aut}(U)$ ein algebraischer Homomorphismus.

Jede Wirkung der Gruppe G von links auf eine Varietät X induziert eine Linkswirkung von G auf $\mathbb{C}[X]$ gegeben durch $(g.f)(x) := f(g^{-1}.x)$. Die Darstellung von G auf einem endlichen Untervektorraum von $\mathbb{C}[\mathfrak{u}]$ soll genutzt werden, um G als Untergruppe in eine affine Gruppe einzubetten, so daß die Einschränkung der Einbettung auf U treu ist.

Da U eine unipotente Gruppe ist, existiert zur aufsteigenden Zentralreihe $\mathfrak{u}_{(0)} = \{0\} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}_{(1)} \subset \cdots \subset \mathfrak{u}_{(r)} = \mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{u}_{(j+1)} = \{X \in \mathfrak{u} \,|\, [X, \mathfrak{u}] \subset \mathfrak{u}_{(j)}\}$, $\dim \mathfrak{u}_{(j)} = m_j$ und $\dim \mathfrak{u} = m$ eine starke Malcev-Basis von $\mathfrak{u}$ [5]. Das ist eine Basis $\{X_1, \ldots, X_m\}$ mit den Eigenschaften: $\mathfrak{h}_k = \langle X_1, \ldots, X_k \rangle_{\mathbb{C}}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{h}_{m_j} = \mathfrak{u}_{(j)}$. Die Abbildungen $\log : U \to \mathfrak{u}$ und $\exp : \mathfrak{u} \to U$ sind polynomial und Diffeomorphismen von Mannigfaltigkeiten bzw. Isomorphismen von Varietäten.

Weiterhin wirkt G auf den Quotientenraum $M\backslash G \cong U$ durch $g.Mu = Mug^{-1}$. Auf der Varietät U gilt also $g.u = \varphi(m_{g^{-1}}^{-1})(u)u_{g^{-1}}$, wobei $g^{-1} = (m_{g^{-1}}, u_{g^{-1}})$. Durch $g.X = \log(g.\exp(X))$ für $X \in \mathfrak{u}$ ist in kanonischer Weise eine G-Wirkung auf $\mathfrak{u}$ definiert. Damit ist $\exp : \mathfrak{u} \to U$ ein G-äquivarianter Isomorphismus.

Lemma 4.1. *Es sei V eine unipotente, algebraische Untergruppe von G, die die Matsushimabedingung erfüllt. Der Quotient G/V ist genau dann steinsch (affin), wenn der Quotient $\mathfrak{u}/V$ steinsch (affin) ist.*

Beweis. Die Gruppe V wirkt als Untergruppe von G auf X und $\mathfrak{u}$. Der Quotient G/V ist nach Satz 3.9 genau dann steinsch, wenn $(M\backslash G)/V$ steinsch ist. Mit Hilfe von Satz 3.10 folgt die Aussage für affine Quotienten. Weiterhin ist $(M\backslash G)/V \cong \mathfrak{u}/V$. □

Die Wahl einer festen Malcev-Basis $\{X_1, \ldots, X_m\}$ liefert einen Isomorphismus $\Phi : \mathfrak{u} \to \mathbb{C}^m$ durch $X = \sum_{i=1}^m \xi_i X_i \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Die Komponenten von Φ seien $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$. Für die G-Wirkung auf $\mathbb{C}[\mathfrak{u}]$ gilt $(g.f)(X) = f(g^{-1}.X) = f(\log(g^{-1}.\exp(X))) = f(\log(\exp(X)g))$. Mit $g = (m, u)$ erhält man $(g.f)(X) = f(\log(\varphi(m^{-1})(\exp(X))u))$.

Lemma 4.2. *Die Gruppe M wirkt durch lineare Transformationen auf den Vektorraum $W_1 = \langle \Phi_1, \ldots, \Phi_m \rangle_{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Für jedes $m \in M$ ist $\varphi(m)$ ein Automorphismus von U und $\log \circ \varphi(m) \circ \exp$ ein Automorphismus von $\mathfrak{u}$. Es gilt $\varphi(m^{-1})(u) = m^{-1}um$ und $\log \circ \varphi(m^{-1}) \circ \exp = \mathrm{Ad}(m^{-1})$, also $m.X = \mathrm{Ad}(m^{-1})(X)$. □

Der Vektorraum $W_1 = \langle \Phi_1, \ldots, \Phi_m \rangle_{\mathbb{C}}$ muß nicht U-invariant sein. Um die Wirkung von Elementen aus der Untergruppe $U \subset G$ auf Elemente aus W_1 beschreiben zu können, benötigt man eine Aussage darüber, wie sich die Gruppenmultiplikation in U mit Hilfe der exp- und der log-Funktion auf Liealgebraniveau überträgt. Für zwei Elemente $X, Y \in \mathfrak{u}$ betrachtet man $X * Y := \log(\exp(X)\exp(Y))$.

Satz 4.3 ([5]). *Es gilt*

$$X * Y = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{p_i+q_i>0} \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i+q_i)^{-1}}{p_1!q_1!\dots p_n!q_n!} (\operatorname{ad} X)^{p_1}(\operatorname{ad} Y)^{q_1}\dots(\operatorname{ad} X)^{p_n}(\operatorname{ad} Y)^{q_n-1}Y$$

Folgerung 4.4. *Es sei $m_{j-1} < k \leq m_j$. Dann gilt*

$$\Phi_k(X*Y) = \Phi_k(X) + \Phi_k(Y) + P(\Phi_{m_j+1}(X),\dots,\Phi_m(X),\Phi_{m_j+1}(Y),\dots,\Phi_m(Y)),$$

wobei das Polynom $P(x_{m_j+1},\dots,x_m,y_{m_j+1},\dots,y_m)$ keine Summanden enthält, die nur ein Produkt aus $x_{m_j+1},\dots,x_m$ oder nur ein Produkt aus $y_{m_j+1},\dots,y_m$ sind.

Beweis. Die Summe in Satz 4.3 ist endlich, da U eine unipotente Liegruppe ist. Die Summanden $\Phi_k(X)$ und $\Phi_k(Y)$ erhält man für $n = 1$ und $(p_1, q_1) = (1, 0)$ bzw. $(p_1, q_1) = (0, 1)$. Alle anderen Summanden, für die alle p_i oder alle q_i gleich 0 sind, entfallen in der Formel in Satz 4.3. □

Folgerung 4.5. *Es sei $m_{j-1} < k \leq m_j$. Dann gilt*

$$(u.\Phi_k)(X) = \Phi_k(X) + \Phi_k(\log(u)) + P(\Phi_{m_j+1}(X),\dots,\Phi_m(X))$$

für $u \in U$, wobei P ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}[\mathfrak{u}]$ ohne Absolutglied ist.

Beweis. Die Aussage folgt mit $u = \exp(Y)$. □

Sei nun W_0 ein minimaler G-invarianter Untervektorraum von $\mathbb{C}[\mathfrak{u}]$, der W_1 und die konstante Funktion 1 enthält. Der Vektorraum W_0 ist endlichdimensional, da die G-Wirkung algebraisch ist. Jedes Element in W_0 läßt sich als Polynom in $\Phi_1,\dots,\Phi_m$ schreiben. Es sei $W = \{f \in W_0 \,|\, f(0) = 0\}$, also der Untervektorraum von W_0 aller Polynome in $\Phi_1,\dots,\Phi_m$ ohne konstantes Glied.

Es sei $\operatorname{Aff}(W) := \{T \in \operatorname{Gl}(W_0) \,|\, T(1) = 1\}$. Die Gruppe $\operatorname{Aff}(W)$ enthält die Untergruppe $\operatorname{Gl}(W)$ und den Normalteiler $\{T \in \operatorname{Aff}(W) \,|\, (T(f)-f) \in \langle 1\rangle_{\mathbb{C}}\ \forall f \in W_0\}$, welcher isomorph zu W ist. Der Isomorphismus wird durch $W \cong W^*$ induziert, indem jedem $f \in W$ die Transformation T_f mit $T_f(g) = g + f^*(g)$ zugeordnet wird. Es gilt $\operatorname{Aff}(W) = \operatorname{Gl}(W) \ltimes W$, denn $W_0 = \langle W, 1\rangle_{\mathbb{C}}$.

Folgerung 4.6. *Für die Darstellung ρ von G auf W_0 gilt $\rho(G) \subset \operatorname{Aff}(W)$.*

Beweis. Für jedes $g \in G$ gilt $g.1 = 1$. □

Wegen Lemma 4.2 ist $\rho(M) \subset \operatorname{Gl}(W)$. Für ein $u \in U$ ist die Zerlegung $\rho(u) = L_u + T_u$ in den linearen und den Translationsanteil durch $L_u(P) = u(P) - u(P)(0)$ und $T_u(P) = u(P)(0)$ gegeben.

Es sei $X := \rho(G).0$ mit $0 \in W$. Da M linear auf $\mathbb{C}[\mathfrak{u}]$ wirkt, gilt $X = \rho(U).0$. Mit der Bezeichnung $\pi : \operatorname{Aff}(W) \to W$ für die Projektion gilt $X =$

$\pi \circ \rho(U)$. Wegen Folgerung 4.5 ist X isomorph zu U, die Einschränkung von ρ auf U injektiv und die Einschränkung von π auf $\rho(U)$ ein Isomorphismus. Durch $w.g = \pi(w\rho(g))$ ist in kanonischer Weise eine G-Wirkung auf W definiert, denn $w.(g_1g_2) = \pi(w\rho(g_1g_2)) = \pi(w\rho(g_1)\rho(g_2)) = \pi(\pi^{-1}\pi(w\rho(g_1))\rho(g_2)) = \pi(\pi(w\rho(g_1))\rho(g_2)) = (w.g_1).g_2$.

Lemma 4.7. *Die Menge X ist eine abgeschlossene, G-invariante Untervarietät von W, so daß $W \cong X \times \mathbb{C}^N$ für ein gewisses $N \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beweis. Die Einschränkung der Projektion $W \to \langle \Phi_1, \dots, \Phi_m \rangle_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^m$ auf X ist wegen Folgerung 4.5 und der Tatsache, daß U isomorph zu $\mathbb{C}^m$ ist, ein Isomorphismus. Also $N = \dim W - m$. □

Lemma 4.8. *Die Abbildung $\pi \circ \rho : U \to X$ ist ein G-äquivarianter Isomorphismus.*

Beweis. Es gilt $\pi(\rho(u.g)) = \pi(\rho(ug)) = \pi(\rho(u)\rho(g)) = \pi \circ \rho(u).g$. □

Unter der Voraussetzung, daß V die Matsushimabedingung erfüllt, ist der Quotient G/V ist genau dann steinsch (affin), wenn $X/\rho(V)$ steinsch (affin) ist. Nun sollen die $\rho(V)$-Wirkungen auf W und auf X verglichen werden. Wenn $\rho(V)$ die Matsushimabedingung als Untergruppe von $\mathrm{Aff}(W)$ erfüllt, dann erfüllt sie sie auch als Untergruppe von $\rho(G)$, denn $\rho(M)$, der reduktive Anteil von $\rho(G)$, ist in $\mathrm{Gl}(W)$ enthalten. Wenn $W/\rho(V)$ steinsch (affin)ist, dann auch $X/\rho(V)$, denn X ist eine V-invariante, abgeschlossene Untervarietät von W.

Lemma 4.9. *Wenn $X = W$ ist, so erfüllt $\rho(V)$ die Matsushimabedingung in* $\mathrm{Aff}(W)$ *genau dann, wenn sie sie in $\rho(G)$ erfüllt.*

Beweis. Die Matsushimabedingung ist genau dann in $\mathrm{Aff}(W)$ nicht erfüllt, wenn es ein $w \in W$ und ein nichttriviales $v \in \rho(V)$ mit $w^{-1}vw \in \mathrm{Gl}(W)$ gibt. Die Behauptung folgt, da unter der Voraussetzung $X = W$ die Projektion $\pi|_{\rho(U)} \to W$ surjektiv ist. Es gilt dann $u^{-1}vu \in \mathrm{Gl}(W)$ für ein $u \in \pi^{-1}(w)$. □

Insbesondere ist die Voraussetzung $X = W$ erfüllt, wenn U kommutativ ist. Aber auch wenn U nicht kommutativ ist, kann es passieren, daß $X = W$ gilt, nämlich wenn in der Formel aus Folgerung 4.5 nur Polynome vom Grad ≤ 2 auftreten. Zum Beispiel überträgt sich für die Heisenberggruppe

$$U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{C} \right\} \quad \mathfrak{u} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_3 \\ 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \,\middle|\, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

die Gruppenmultiplikation auf Liealgebraniveau durch

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) * (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3 + \frac{1}{2}(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2).$$

Die Darstellung von U auf $\langle 1, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \rangle_{\mathbb{C}}$ mit $\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_i$ ist

$$\rho\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z - \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt bisher kein Beispiel dafür, daß der Quotient $X/\rho(V)$ affin ist, der Quotient $W/\rho(V)$ jedoch nicht.

Satz 4.10. *Wenn die Gruppe $\rho(V)$ in $\mathrm{Aff}(W)$ die Matsushimabedingung erfüllt, der Quotient $X/\rho(V)$ existiert und steinsch (affin) ist, dann existiert auch der Quotient $W/\rho(V)$ und ist steinsch (affin).*

Beweis. Da ρ eine algebraische Darstellung ist, ist auch $\rho(V)$ eine unipotente Gruppe. Wenn $X/\rho(V)$ steinsch ist, dann ist damit das Bündel $X \to X/\rho(V)$ trivial. Es gibt einen Schnitt $s : X/\rho(V) \to X$. Der Untervektorraum $W_2 := \{f \in \mathbb{C}[\Phi_1, \ldots, \Phi_m] \,|\, f \in W, \deg f \geq 2\}$ ist wegen Lemma 4.2 $\rho(M)$-invariant. Jedes Element $w \in W$ läßt sich wegen Lemma 4.7 eindeutig in $w = x+z$ mit $x \in X$ und $z \in W_2$ zerlegen. Für ein $v \in \rho(V)$ gilt $v(w) = v(x+z) = L_v(x+z)+T_v$ mit $L_v \in \rho(M) \subset \mathrm{Gl}(W)$ und $T_v \in W$, also $v(w) = v(x) + L_v(z)$. Da die Matsushimabedingung impliziert, daß $\rho(V)$ frei auf W wirkt, ist $X/\rho(V) \times W_2 \to W$, gegeben durch $(x, z) \mapsto s(x)+z$, ein Schnitt der $\rho(V)$-Wirkung auf W. Also ist $W/\rho(V) \cong X/\rho(V) \times W_2$ und steinsch. □

Da $\det(L_v) = 1$ für jedes $v \in \rho(V)$ gilt und nur die $\rho(V)$-Wirkung auf W wichtig ist, genügt es, die Gruppe $\mathrm{SAff}(W) \cong \mathrm{Sl}(W) \ltimes W$ statt $\mathrm{Aff}(W)$ zu betrachten. Auch wenn $\rho(V)$ die Matsushimabedingung in $\mathrm{Aff}(W)$ nicht erfüllt, kann es sinnvoll sein, die Darstellung ρ zu nutzen, weil die Methoden aus Kapitel 6 auch Aussagen über die $\rho(V)$-Wirkung auf $\rho(V)$-invarianten, abgeschlossenen Teilmengen von W liefern können. Die in [23], [26] und [4] untersuchten Beispiele zeigen, daß schon die Betrachtung von zusammenhängenden, unipotenten, algebraischen Untergruppen $V \subset G = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ und den dazugehörigen Quotienten G/V sehr interessant ist.

An dieser Stelle soll noch auf zwei Spezialfälle eingegangen werden, für die bereits gezeigt wurde, daß die Matsushimabedingung hinreichend für die Affinität der Quotienten G/V ist [23], nämlich $G = M \times U$ und $\dim U \leq 3$.

Wenn $G = M \times U$ ein direktes Produkt ist und V die Matsushimabedingung erfüllt, so gilt $\rho(V) \subset \rho(U)$. Der Quotient $\rho(U)/\rho(V)$ ist affin, da $\rho(U)$ unipotent ist und $\rho(V)$ trivialerweise der Matsushimabedingung genügt.

Wenn $\dim U \leq 3$, so ist U kommutativ oder isomorph zur Heisenberggruppe. Also ist die Voraussetzung von Satz 4.10 erfüllt und man kann $G = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ mit $n \leq 3$ annehmen. Mit dieser Reduktion bestätigt sich für $\dim V = 1$ mit Satz 5.3, daß die Matsushimabedingung hinreichend ist. Falls $\dim V = n$, so besteht der Quotient U/V aus einem Punkt und ist damit affin. Für den verbleibenden Fall $\dim V = 2$ und $n = 3$ folgt mit Hilfe von Lemma 8.2 und Lemma 6.15 einfach, daß die Matsushimabedingung die Affinität von U/V impliziert.

5 Bedingungen für die Existenz von Quotienten

5.1 Die Matsushimabedingung

Es sei $G = M \ltimes U$ eine lineare algebraische Gruppe, wobei M reduktiv und U unipotent ist. Weiterhin sei V eine zusammenhängende, unipotente, algebraische

Untergruppe von G. Die Matsushimabedingung, d.h. $V \cap g^{-1}Mg = \{e\}$ für alle $g \in G$, ist eine notwendige Bedingung dafür, daß der Quotient G/V steinsch ist [23].

Lemma 5.1. *Die Matsushimabedingung ist äquivalent zu*

1. *V wirkt frei von rechts auf $U \cong M\backslash G$.*
2. *$V \cap u^{-1}Mu = \{e\}$ für alle $u \in U$.*
3. *$\mathrm{Ad}(u)(\mathfrak{v}) \cap \mathfrak{m} = \{0\}$ für alle $u \in U$.*

Beweis. Die Matsushimabedingung ist genau dann nicht erfüllt, wenn es ein $v \in V$, ein $g \in G$ und ein $m \in M$ mit $m \neq e$ und $gvg^{-1} = m$ gibt.

1. Für ein Element Mg aus $M\backslash G$ gilt genau dann $V_{Mg} \neq \{Me\}$, wenn $Mgv = Mg$, also $gvg^{-1} \in M$ und $\neq e$.
2. Jedes Gruppenelement $g \in G$ läßt sich eindeutig als Produkt $g = mu$ mit $m \in M$ und $u \in U$ schreiben. Damit ist gvg^{-1} genau dann in M und verschieden von e, wenn $uvu^{-1} \in M$ und $\neq e$.
3. Da V eine unipotente Gruppe ist, ist die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{v} \to V$ surjektiv. Außerdem gilt die Formel $\exp(\mathrm{Ad}(g)(X)) = i_g(\exp(X))$.

□

Ein Beispiel von Winkelmann [26] zeigte, daß die Matsushimabedingung kein hinreichendes Kriterium dafür ist, daß U/V steinsch ist. Wie sich herausstellen wird, impliziert die Matsushimabedingung auch nicht, daß U/V hausdorffsch ist.

Die Frage, ob G/V steinsch ist, läßt sich unter gewissen Bedingungen, wie in Abschnitt 4 gezeigt, auf den Fall $G = \mathrm{SAff}(\mathbb{C}^n)$ reduzieren. Es gilt $\mathrm{SAff}(\mathbb{C}^n) \cong \{g \in \mathrm{Sl}_{n+1}(\mathbb{C}) \mid g(e_0) = e_0\}$ für jedes $e_0 \neq 0$ in $\mathbb{C}^{n+1}$. Durch die Wahl einer Basis $\{e_0, \ldots, e_n\}$ von $\mathbb{C}^{n+1}$ erhält man für jedes Element $g \in G$ eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$ mit $a \in \mathbb{C}^n$ und $A \in \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C})$ und damit auch eine Zerlegung von g in einen linearen Anteil A und einen Translationsanteil a. Der reduktive Anteil $\{g \in G \mid a = 0\}$ von G ist isomorph $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{C})$. Der unipotente Anteil $\{g \in G \mid A = \mathrm{id}\}$ von G ist isomorph zu $\mathbb{C}^n$ und Normalteiler in G. Die Gruppe G und damit auch alle ihre Untergruppen wirken von rechts auf $\langle e_1, \ldots e_n \rangle = \mathbb{C}^n \cong U$ durch affine Koordinatentransformationen $z.g = (z_1, \ldots, z_n)A + a$ mit $g \in G$ und $z = \sum_{i=1}^n z_i e_i$.

Folgerung 5.2. *Für $G = Sl_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ ist mit der obigen Bezeichnung die Matsushimabedingung äquivalent zu einer der folgenden Bedingungen:*

1. *Es gibt kein Element $v \neq e$ in V mit $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a_v \\ 0 & A_v \end{smallmatrix}\right)$, für das das Gleichungssystem $(A_v - \mathrm{id})^T z^T = -a_v^T$ eine Lösung besitzt.*
2. *Es gibt kein Element $t \neq 0$ in der Liealgebra $\mathfrak{v}$ von V mit $t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a_t \\ 0 & A_t \end{smallmatrix}\right)$, für das das Gleichungssystem $A_t^T z^T = -a_t^T$ eine Lösung besitzt.*

Falls $\dim V = 1$, so ist die Matsushimabedingung auch hinreichend dafür, daß der Quotient G/V steinsch ist [4]. Für den Fall $G = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ vereinfacht sich der Beweis dieser Aussage:

Satz 5.3. *Wenn $V \subset G = Sl_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ eine eindimensionale, unipotente, algebraische Untergruppe ist, die die Matsushimabedingung erfüllt, so ist der Quotient G/V steinsch. Insbesondere ist dann der Quotient der V-Wirkung auf U isomorph zu $\mathbb{C}^{n-1}$.*

Beweis. Sei $\{T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)\}$ eine Basis von $\mathfrak{v}$. Da $\mathfrak{v}$ nilpotent ist, gibt es eine Basis von $\mathbb{C}^n$, so daß A in Jordan-Normalform ist, also $A_{ii+1} = 1$ oder 0 und $A_{ij} = 0$ sonst. Aus der Auswertung der Matsushimabedingung für die Liealgebra $\mathfrak{v}$ in Folgerung 5.2, ergibt sich, daß für es eine solche Basis einen Index i^* mit $A_{i^*i^*+1} = 0$ und $a_{i^*} \neq 0$ geben muß, weil anderenfalls das Gleichungssystem $zA = -a$ lösbar ist. Dies bedeutet $(z.\exp(tT))_{i^*} = a_{i^*}t + z_{i^*}$. Damit ist $\{z \in \mathbb{C}^n \mid z_{i^*} = 0\}$ ein Schnitt der V-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$. □

5.2 Einfluß des Grades der Exponentialabbildung

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen zur Topologie von U/V ist der

Satz 5.4 ([26])**.** *Der Quotientenraum jeder freien $\mathbb{C}$-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ der Form $\mu(t, z) = z + \Phi(z)t$ mit $\Phi \in \mathcal{O}^n(\mathbb{C}^n)$ ist hausdorffsch.*

Falls $\dim V = 1$ gilt, ist die Matsushimabedingung äquivalent dazu, daß U/V steinsch ist ([23] und Satz 5.3), also ist dann insbesondere der Quotient U/V hausdorffsch.

Satz 5.5. *Wenn die Exponentialabbildung* $\exp : \mathfrak{v} \to V \subset \mathrm{SAff}(\mathbb{C}^n)$ *eine polynomiale Abbildung vom Grad 1 ist und V die Matsushimabedingung erfüllt, dann ist der Quotient U/V hausdorffsch.*

Beweis. Es reicht nun zu zeigen, daß die V-Wirkung auf $U \cong \mathbb{C}^n$ eigentlich ist [9]. Man betrachtet die Abbildung $\phi : U \times V \to U \times U$, gegeben durch $(z, v) \mapsto (z, z.v)$. Da die Gruppe V als Mannigfaltigkeit isomorph zu $\mathbb{C}^m = \mathfrak{v}$ und die Abbildung ϕ stetig ist, genügt es zu zeigen, daß Urbilder beschränkter Mengen wieder beschränkt sind. Die Bedingung des Satzes bedeutet, daß für jedes $t \in \mathfrak{v}$ die Gleichung $v = \exp(t) = \mathrm{id} + t$ gilt. Aus $|(z, z.v)| \leq R$ folgt mit $z.v = z + zA_t + a_t$, daß $|zA_t + a_t| = |-z + z + zA_t + a_t \leq |z| + |z.v| \leq 2R$ ist. Die Hilfsfunktion $h(z, t) := |zA_t + a_t|$ besitzt auf der kompakten Menge $K := \{|z| \leq R\} \times \{|t| = 1\} \subset U \times \mathbb{C}^m$ ein Minimum c. Wegen der Matsushimabedingung (Folgerung 5.2) gilt $c > 0$. Betrachtet man nun die Funktion h auf $\{|z| \leq R\} \times \mathbb{C}^m$, so erhält man $h(z, t) = h(z, t/|t|)|t| \geq c|t|$. Damit folgt aus $|(z, z.v)| \leq R$, daß (z, t) beschränkt ist durch $|z| \leq R$ und $|t| \leq 2R/c$. □

Es soll nun eine entsprechende Aussage für den Fall gezeigt werden, daß die Exponentialfunktion $\mathfrak{v} \to V$ vom Grad 2 ist. Es wird genügen, für jedes $z \in U$ eine Umgebung U_z zu finden, so daß $\{v \in V \mid (\{z.v - z \mid z \in U_z\} \cap B_{2R}) \neq \emptyset\}$

beschränkt ist. Deshalb wird vorab gezeigt, daß für jede lokale Situation geeignete affine Koordinaten von U gefunden werden können. Jede Wahl von affinen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ auf U induziert eine eindeutige Zerlegung von $\mathrm{SAff}(\mathbb{C}^n)$ in einen linearen Anteil M aller $g \in G$, die linear in den Koordinatenfunktionen sind, und einen Translationsanteil, d.h. $u.g = (u.L_g).T_g$ mit $L_g \in M$ und T_g unabhängig von u oder in Koordinaten $(z_1, \ldots, z_n).g = (z_1, \ldots, z_n)A_g + a_g$ mit $A_g \in \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C})$ und $a \in \mathbb{C}^n$.

Lemma 5.6. *Zu jedem $T \in \mathfrak{v}$ mit $T \neq 0$ gibt es affine Koordinaten auf U, so daß*

1. *für alle $v \in V$ und für $j = 1, \ldots, n$ die Unterräume $\{z_1 = \ldots = z_j = 0\}$ L_v-invariant sind,*
2. *es für die Matrix $\Phi = (\Phi_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ des linearen Anteils von T, also $\exp(\Phi) = A_{\exp(T)}$, zu jedem Index i höchstens einen Index j und zu jedem Index j höchstens einen Index i mit $\Phi_{ij} \neq 0$ gibt.*

Beweis. Da die Gruppe V unipotent ist, kann man affine Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ finden, in denen die erste Bedingung erfüllt ist. Für $j = 1, \ldots, n$ führt man dann nacheinander folgende Transformationen aus.

1. Falls kein $\Phi_{ij} \neq 0$, geht man zum nächsten j über.
2. Falls ein $\Phi_{ij} \neq 0$ existiert, sei $i^* := \max\{i \mid \Phi^1_{ij} \neq 0\}$. Man führt die neuen Koordinaten $z'_1, \ldots, z'_n$ durch
$$z'_{i^*} := \sum_{\Phi_{ij} \neq 0} \Phi_{ij} z_i, \quad z'_l := z_l - \Phi_{i^*l} z_{i^*} \ \forall l > j$$
ein und bezeichnet diese wieder mit $z_1, \ldots, z_n$.

□

Man betrachtet die Funktion $h : S \times \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{C}^n$, gegeben durch $h(z, t, \alpha) = z.\exp(\alpha t) - z$, mit $S := U \times \{t \in \mathfrak{v} \mid |t| = 1\}$. Es gilt $|h| \geq |h_j|$ für alle Komponentenfunktionen $h_1, \ldots, h_n$ von h. Ein Element $t \in \mathfrak{v}$ läßt sich bezüglich einer Basis $\{T_1, \ldots, T_n\}$ in eindeutiger Weise als $t = t_1 T_1 + \cdots + t_m T_m$ mit $t_k \in \mathbb{C}$ darstellen. Man kann die Funktionen h_j als auf $U \times \mathfrak{v}$ definiert interpretieren, denn $z.\exp(t) - z = h(z, t/|t|, |t|)$. Die Funktionen h_j sind für festes z Polynome in $t_1, \ldots, t_m$ ohne Absolutglied, $h_j(z, t) = \sum_{k>0} \sum_{i_1+\ldots+i_n=k} a_{ji_1\ldots i_n}(z) t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$, wobei $a_{ji_1\ldots i_n}(z)$ jeweils eine lineare Funktion von z ist.

Nun muß zu jedem $(z_0, t_0) \in S$ eine Umgebung $U_{(z_0,t_0)} \subset S$ gefunden werden, so daß $\cup_{(z,t)\in U_{(z_0,t_0)}} \{\alpha \mid |h(z, t, \alpha| \leq 2R\}$ beschränkt ist. Für festes z ist die Menge $\{|t| \mid |z.\exp(t) - z| \leq 2R\}$ beschränkt durch eine Zahl S_z, denn die Komponentenfunktionen h_j sind Polynome. Die Aufgabe besteht nun darin, für jedes $z_0 \in U$ eine obere Schranke der Menge $\{S_z \mid z \in U_{z_0}\}$, wobei U_{z_0} eine Umgebung von z_0 ist, zu finden. Dies ist nicht einfach, wenn $\deg h_j(z, \ ) > \deg h_j(z_0, \ )$ für

$z \neq z_0$, da dann der Leitkoeffizient von $h_j(z,\ )$ in der Nähe von z_0 beliebig klein wird.

Der Anteil h_{j1} vom Grad 1 der Polynome h_j ist wichtig. Wenn $h_j(z,\ ) \not\equiv 0$, so ist $h_{j1}(z,\ ) := \sum_{i_1+\ldots+i_n=1} a_{ji_1\ldots i_n}(z) t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \not\equiv 0$ als Polynom in $t_1, \ldots, t_n$. Die Funktion h_{j1} läßt sich einfach mit Hilfe der Spalten der Matrizen der Basis von $\mathfrak{v}$ ausdrücken. Es gilt $h_{1j}(z,t) = \sum_{k=1}^n z\Phi_j^k t_k + \varphi_j^k t_k$, wobei $\exp(\left(\begin{smallmatrix} 0 & \varphi^k \\ 0 & \Phi^k \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a_{\exp(T_k)} \\ 0 & A_{\exp(T_k)} \end{smallmatrix}\right)$.

Lemma 5.7. *Zu jedem Punkt $(z_0, t_0) \in S$ gibt es eine Umgebung $U_{(z_0,t_0)}$ von (z_0, t_0) in S, eine reelle Konstante $c_{(z_0,t_0)} > 0$ und ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, so daß $|h_{j1}(z,t)| \geq c_{(z_0,t_0)}$ für alle $(z,t) \in U_{(z_0,t_0)}$.*

Beweis. Da die Koordinatentransformation $z \mapsto z - z_0$ affin ist, kann man $z_0 = 0$ annehmen. Man wählt die in Lemma 5.6 für $t_0 = T$ beschriebenen Koordinaten auf U. Wenn V die Matsushimabedingung erfüllt, dann gibt es einen Index j^* mit $\Phi_{ij^*} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $\varphi_{j^*} \neq 0$, wobei $\exp(\left(\begin{smallmatrix} 0 & \varphi \\ 0 & \Phi \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a_{\exp(T)} \\ 0 & A_{\exp(T)} \end{smallmatrix}\right)$ und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Dann ist $h_{j^*1}(z_0, t_0) = \varphi_{j^*} \neq 0$. Also gibt es eine Umgebung $U_{(z_0,t_0)}$ von (z_0, t_0) in S und ein $c_{(z_0,t_0)} > 0$ mit $|h_{j^*1}(z,t)| \geq c_{(z_0,t_0)}$ für alle $(z,t) \in U$. □

Satz 5.8. *Wenn die Exponentialabbildung* $\exp : \mathfrak{v} \to V \subset Sl_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ *eine polynomiale Abbildung vom Grad ≤ 2 ist und V die Matsushimabedingung erfüllt, dann ist der Quotient $\mathbb{C}^n/V$ hausdorffsch.*

Beweis. Wie in Satz 5.5 genügt es zu zeigen, daß die V-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ eigentlich ist. Dazu reicht es, zu jedem Punkt $(z_0, t_0) \in S$ eine Umgebung $U_{(z_0,t_0)}$ in S zu finden, so daß die Menge $\{\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0} \mid \exists (z,t) \in U_{(z_0,t_0)} \text{ mit } |h(z,t,\alpha)| \leq 2R\}$ durch eine Zahl $S_{(z_0,t_0)}$ beschränkt ist. Man wählt affine Koordinaten und ein $j^* \in \{1, \ldots, n\}$ wie in Lemma 5.7 beschrieben.

1. Falls die j^*-te Spalte von $(\exp(t) - \mathrm{id})$ nur Polynome ersten Grades enthält, gilt $|h(z,t,\alpha)| \geq |h_{j^*}(z,t,\alpha)| = |h_{j^*1}(z,t)|\alpha \geq c_{(z_0,t_0)}\alpha$ für alle $(z,t) \in U_{(z_0,t_0)} = U$ wie in Lemma 5.7. Man kann $S_{(z_0,t_0)} = 2R/c_{(z_0,t_0)}$ wählen.

2. Falls die j^*-te Spalte von $(\exp(t) - \mathrm{id})$ auch Polynome zweiten Grades enthält, gilt

$$h(z,t,\alpha)_{j^*} = |(\varphi(t) + z\Phi(t))_{j^*}\alpha + \frac{1}{2}(\varphi(t) + z\Phi(t))\Phi(t)_{j^*}\alpha^2|,$$

   wobei $\Phi(t)$ die Matrix des Linearteils von t bezüglich der gewählten Koordinaten ist. Da die Exponentialabbildung ein Polynom vom Grad ≤ 2 ist, gilt $\sum_{i=1}^{j*-1}(\Phi(t)^2)_i \Phi(t)_{ij^*} = (0, \ldots, 0)^T$ und $\sum_{i=1}^{j*-1}(\varphi(t)\Phi(t))_i \Phi(t)_{ij^*} = 0$. Da für alle $i < j^*$ die Gleichung $\Phi(t_0)_{ij^*} = 0$ gilt, kann man $U_{(z_0,t_0)}$, aus Lemma 5.7, so verkleinern, daß zu einem beliebigen, aber fest gewählten $r > 1$ die Ungleichung $\sum_{i<j^*} |\Phi(t)_{ij^*}| \leq \frac{(r-1)c_{(z_0,t_0)}}{2rR}$ für alle $t \in \{t \mid \exists z :$

$(z,t) \in U_{(z_0,t_0)}\}$ gilt. Unter der Voraussetzung $h(z,t,\alpha) \leq 2R$ folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{r-1}{2r} c_{(z_0,t_0)} \geq & R \sum_{i<j^*} |\Phi(t)_{ij^*}| \geq \frac{1}{2} \sum_{i<j^*} h(z,t,\alpha)_i |\Phi(t)_{ij^*}| \\
= & \frac{1}{2} \sum_{i<j^*} |(\varphi(t) + z\Phi(t))(\mathrm{id}\,\alpha + \frac{1}{2}\Phi(t)\alpha^2)_i||\Phi(t)_{ij^*}| \\
\geq & \frac{1}{2} |\sum_{i<j^*} (\varphi(t) + z\Phi(t))_i \alpha \Phi(t)_{ij^*} + \frac{1}{2}(\varphi(t) + z\Phi(t))\Phi(t)_i \alpha^2 \Phi(t)_{ij^*}| \\
= & \frac{1}{2} |\sum_{i<j^*} (\varphi(t) + z\Phi(t))_i \alpha \Phi(t)_{ij^*}| \geq \frac{1}{2} |(\varphi(t) + z\Phi(t))\Phi(t)_{j^*}| \alpha
\end{aligned}
$$

Also kann man $\frac{r-1}{r} |(\varphi(t) + z\Phi(t))_{j^*}| \alpha \geq \frac{1}{2} |(\varphi(t) + z\Phi(t))\Phi(t)_{j^*}| \alpha^2$ annehmen. Es gilt die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
2R \geq & |h_{j^*}(z,t,\alpha)| = |(\varphi(t) + z\Phi(t))_{j^*} \alpha + \frac{1}{2}(\varphi(t) + z\Phi(t))\Phi(t)_{j^*} \alpha^2| \\
\geq & |(\varphi(t) + z\Phi(t))_{j^*} \alpha| - \frac{1}{2} |(\varphi(t) + z\Phi(t))\Phi(t)_{j^*} \alpha^2| \geq \frac{1}{r} |(\varphi(t) + z\Phi(t))_{j^*}| \alpha \\
\geq & \frac{1}{r} c_{(z_0,t_0)} \alpha
\end{aligned}
$$

Man kann $S_{(z_0,t_0)} = 2Rr/c_{(z_0,t_0)}$ wählen.

$\square$

Aber allein aus der Matsushimabedingung folgt nicht, daß der Quotient U/V hausdorffsch ist. Zum Beispiel wirkt die zu $\mathbb{C}^2$ isomorphe Gruppe

$$
V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\ 0 & 1 & t_1 & \frac{1}{2}t_1^2 & \frac{1}{6}t_1^3 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_1 & \frac{1}{2}t_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathrm{Sl}_5\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^5
$$

nicht eigentlich auf $\mathbb{C}^5$ und die Bahnen durch $p = (0, -\sqrt{-3}, 0, 0, 0)$ und $q = (0, \sqrt{-3}, 0, 0, 0)$ lassen sich, wie in Satz 7.13 gezeigt wird, nicht trennen. Das bedeutet, daß der Quotient $\mathbb{C}^5/V$ nicht hausdorffsch ist. Dies ist das kleinste nicht-hausdorffsche Beispiel bezüglich des Grades der Exponentialabbildung, der Dimension n des unipotenten Anteils von G und der Dimension von V.

6 Untersuchungsmethoden für G/V und U/V

Nun werden verschiedene Methoden zur Untersuchung der Quotienten G/V und U/V vorgestellt. Die Verfahren unterscheiden sich bezüglich des Aufwandes, der Anwendbarkeit und der Komplexität, liefern aber auch verschiedene Aussagen über die Natur der zu untersuchenden Quotienten.

In erster Linie wird es darum gehen, Abbildungen zu konstruieren, die die V-Bahnen trennen. Dann stellt sich die Frage, ob diese geometrische Quotienten liefern. Die Konstruktionen sind rein algebraisch.

In diesem Kapitel wird angenommen, daß V kommutativ ist. Die Aussagen in den Abschnitten 6.1 und 6.2.1 gelten auch für nichtkommutative Gruppen V.

6.1 Darstellung auf regulären Funktionen

Es sei G eine zusammenhängende, algebraische Gruppe und H eine zusammenhängende, algebraische Untergruppe. Der Satz von Chevalley [20] besagt, daß der Quotientenraum G/H eine eindeutige algebraische Struktur besitzt, so daß G auf G/H algebraisch wirkt. Diese Struktur erhält G/H als Untervarietät eines projektiven Raumes $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$. Dabei induziert eine G-äquivariante Darstellung ρ von G auf einem endlichdimensionalen Untervektorraum W von $\mathbb{C}[G]$ eine G-Wirkung auf $\mathbb{P}(W)$, der einen Punkt mit Isotropiegruppe H besitzt.

Falls die Untergruppe $H = V$ unipotent ist, so besitzt sie keine nichttrivialen Charaktere. Daraus folgt, daß G/V quasiaffin ist, denn schon die Gruppenwirkung auf W besitzt einen Punkt w mit Isotropiegruppe V, also $G_{[w]} = G_w = V$. Es ist schwer, die definierenden Gleichungen der Untervarietät $\overline{G.w} \subset W$ zu finden, um zu entscheiden, ob G/V affin ist oder nicht.

6.2 Aufblasung regularisierter trivialer Quotienten

Eine *Parametervarietät* einer algebraischen Wirkung einer algebraischen Gruppe V auf einer Varietät X sei eine konstruierbare Menge $\Sigma \subset X$, die ein Schnitt der V-Wirkung auf G ist. Für die algebraische Wirkung einer linearen, unipotenten, algebraischen Gruppe $V \subset \mathrm{Sl}(W)$ auf einem Vektorraum W ist es möglich, eine Parametervarietät konstruktiv anzugeben [5]. In Abschnitt 6.2.1 wird beschrieben, wie dies eine Zariski-offene, V-invariante Teilmenge U_0 von G oder U liefert, auf der die Quotientenbildung $\Psi_0 : U_0 \to \Sigma_0$ trivial ist.

Die rationale Abbildung Ψ_0 kann zu einer regulären, V-invarianten Abbildung Ψ erweitert werden, welche auf dem Komplement von U_0 die Bahnen noch nicht trennt. Wie in Abschnitt 6.2.2 gezeigt wird, ist das Bild von Ψ einfach zu beschreiben und dicht in einer affinen Varietät Z.

In Abschnitt 6.2.3 wird gezeigt, daß sich Z entlang einer Untervarietät so zu $\tilde{Z}$ aufblasen läßt, daß eine V-invariante Liftung $\tilde{\Psi} : G \to \tilde{Z}$ von Ψ existiert, die die V-Bahnen trennt.

In Abschnitt 6.2.4 wird am Beispiel gezeigt, daß sich der Fall, in dem U/V nicht hausdorffsch ist, und der Fall, in dem U/V quasiaffin aber nicht affin ist, bei der Betrachtung von G/V ähneln.

6.2.1 Schnittvarietät der Wirkung unipotenter Gruppen

Sei $V \subset G = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n \subset \mathrm{Sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ eine unipotente, algebraische Untergruppe, die die Matsushimabedingung erfüllt. Sie wirkt von rechts auf $W = \mathbb{C}^{n+1}$ durch Rechtsmultiplikation $w.v = wv$ und auf $U \cong \mathbb{C}^n$ durch $z.v = a_v + zA_v$

mit $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a_v \\ 0 & A_v \end{smallmatrix}\right)$. Die Matsushimabedingung impliziert, daß die V-Wirkung auf U frei ist, wohingegen die V-Wirkung auf W nicht frei ist.

Man wähle eine Jordan-Hölder-Basis $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ von W, das ist eine Basis für die alle Vektorräume $W_j = \langle e_{j+1}, \ldots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$ V-invariant sind, mit der Eigenschaft $U = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$. Eine solche Basis ist nicht eindeutig. Nun kann man U als V-invariante, abgeschlossene Teilmenge $\{e_0^* = 1\} \subset W$ auffassen. Die V-Wirkung auf U ist dann auch durch Rechtsmultiplikation gegeben.

Eine Parametervarietät Σ für alle V-Bahnen in W kann algorithmisch konstruiert werden [5] (Kapitel 3.1). Die konstruierbare Menge Σ ist die disjunkte Vereinigung $\Sigma = \Sigma_0 \cup \cdots \cup \Sigma_r$, wobei $W^{(k)} = \Sigma_k.V$ Zariski-offen in $W \setminus \cup_{l=0}^{k-1} W^{(l)}$ ist. Die Menge $\{w \in \Sigma \,|\, e_0^*(w) = 1\}$ ist dann eine Parametervarietät für alle V-Bahnen in U.

Satz 6.1 (Chevalley-Rosenlicht [5]). *Es sei $V \subset Sl(W)$ eine zusammenhängende, unipotente, algebraische Gruppe. Für jedes $w \in W$ gibt es $X_1, \ldots, X_m$ in $\mathfrak{v}$, so daß die Abbildung $\mathbb{C}^m \to w.V$ gegeben durch*

$$(t_1, \ldots, t_m) \mapsto w.(\exp t_m X_m \cdot \cdots \cdot \exp t_1 X_1)$$

ein Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{C}^m$ und der Bahn $w.V$ ist.

Die Funktionen Q_j, die man bezüglich einer Jordan-Hölder-Basis durch

$$w.(\exp t_m X_m \cdot \cdots \cdot \exp t_1 X_1) = \sum_{j=1}^{n} Q_j(t_1, \ldots, t_m) e_j$$

definiert, sind Polynome. Es existieren disjunkte Mengen von Indizes $S \cup T = \{1, \ldots, n\}$ mit $S = \{j_1 < \cdots < j_m\}$, so daß die Polynome Q_j nur von den t_i mit $j_i \leq j$ abhängen. Außerdem gilt $Q_{j_i} = t_i +$ Polynom in $t_1, \ldots, t_{i-1}$.

Es ist wichtig zu wissen, wie man die Liealgebraelemente X_i systematisch wählen kann. Falls V frei wirkt, ist die Wahl kanonisch, aber abhängig von der Wahl der Jordan-Hölder-Basis. Die V-Wirkung auf W induziert eine V-Wirkung auf W/W_j und für jedes $w \in W$ einen Endomorphismus $\mathfrak{v} \to W$ gegeben durch $X \mapsto w.X = \frac{d}{dt}(w.\exp(tX))|_{t=0}$. Nun sei $\mathfrak{v}_j = \{X \in \mathfrak{v} \,|\, w.X \in W_j\}$, $S = \{j_1 < \cdots < j_m\}$ die Menge der Indizes, für die $\mathfrak{v}_{j-1} \supsetneq \mathfrak{v}_j$, und $X_i \in \mathfrak{v}_{j_i - 1}$ mit $w.X_i = e_{j_i} \pmod{W_{j_i}}$. Die Wahl der X_i ist nur $\pmod{\mathfrak{v}_{j_i}}$ eindeutig. Falls die Dimension der Bahn $w.V$ gleich $\dim V$ ist, also $V_w = \{e\}$, so gibt es ein kanonisches Verfahren, um die X_i zu wählen: Dazu betrachtet man die Matrix M des Endomorphismus $X \mapsto w.X$ bezüglich der Jordan-Hölder-Basis und einer Basis $\{T_1, \ldots, T_m\}$ von $\mathfrak{v}$ und streicht aus ihr alle Zeilen $j \notin S$ heraus. Dies ist eine nichtsinguläre Matrix M_w und man wählt X_i mit $M_w(X_i) = e_i$.

Um einen Satz über die Existenz einer Parametervarietät Σ formulieren zu können, sind einige Definitionen notwendig. Die Projektionen $p_j : W \to W/W_j$ sind V-äquivariant. Sei $d_j(w) := \dim V.p_j(w)$. Falls $w \in U$ ist, gilt $\{d_0(w), \ldots, d_n(w)\} = \{0, \ldots, m\}$, da die V-Wirkung auf U frei ist. Für jedes

$(n+1)$-Tupel $d = (d_0, \ldots, d_n)$ von natürlichen Zahlen definiert man

$$\begin{aligned}
U_d &:= \{w \in U \,|\, d_j(w) = d_j, 0 \leq j \leq n\} \\
\mathcal{D} &:= \{d \,|\, U_d \neq \emptyset\} \\
S(d) &:= \{j \,|\, d_j = 1 + d_{j-1}\} \ (d_{-1} = 0) \\
T(d) &:= \{j \,|\, d_j = d_{j-1}\} \\
U_{S(d)} &:= \langle e_j \,|\, j \in S(d) \rangle_{\mathbb{C}} \\
U_{T(d)} &:= \langle e_j \,|\, j \in T(d) \rangle_{\mathbb{C}} \cap U
\end{aligned}$$

Die Menge $\mathcal{D}$ ist endlich. Alle Bahnen in den V-invarianten Mengen U_d sind von gleicher Dimension. Aber nicht alle Bahnen gleicher Dimension befinden sich notwendigerweise in einer gemeinsamen Menge U_k.

Satz 6.2. *Sei $V \subset Sl_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ eine zusammenhängende, unipotente, algebraische Untergruppe und $\{e_0, \ldots, e_n\}$ eine Jordan-Hölder-Basis.*
Es existiert eine Ordnung der Elemente von $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} = \{d^{(0)} > \cdots > d^{(r)}\}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Für jedes $d \in \mathcal{D}$ ist die Menge $\cup_{d' \geq d} U_{d'}$ Zariski-offen in U.*

2. *Das größte Element $d^{(0)}$ ist durch $d_j^{(0)}$ = maximale Bahndimension in W/W_j gegeben.*

3. *Jede V-Bahn in U_d trifft $U_{T(d)}$ in genau einem Punkt. Die Menge $\Sigma_d = U_d \cap U_{T(d)}$ ist eine algebraische Menge und die disjunkte Vereinigung $\Sigma = \cup \Sigma_d$ ist eine Parametervarietät der V-Bahnen in U.*

4. *Für jedes $d \in \mathcal{D}$ ist die Abbildung $\Psi_d : \Sigma_d \times \mathbb{C}^m \to U_d$ gegeben durch $(u, (t_1, \ldots, t_m)) \mapsto u.\exp(\sum_{i=1}^m t_i T_i)$ ein Isomorphismus. Die Quotientenabbildung $\pi_d : U_d \to \Sigma_d$ ist gegeben durch $u \mapsto u.\exp(\sum_{i=1}^m t_i^d(w) T_i)$, wobei die Funktionen $t_i^d(u)$ rationale, nichtsinguläre Funktionen auf U_d sind.*

Beweis. Die Aussagen des Satzes folgen mit $U = \{e_0^*(w) = 1\}$ aus [5] Theorem 3.1.14, Theorem 3.1.6 und der Tatsache, daß V auf U frei wirkt.

Die Ordnung der Elemente in $\mathcal{D}$ erhält man ausgehend von der teilweisen Ordnung $d \geq d'$, falls $d_j \geq d'_j$ für alle j. Die Mengen $\mathcal{D}_0 = \{d^{(0)}\}$, $\mathcal{D}_{k+1} = \{d \,|\, d \text{ maximal in } \mathcal{D} \setminus \cup_{j \leq k} \mathcal{D}_j\}$ werden induktiv definiert. Innerhalb der endlichen Mengen $\mathcal{D}_k$ kann man eine beliebige Ordnung wählen. Durch Aneinanderreihung der geordneten Elemente aus $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots$ ergibt sich die gewünschte Ordnung der Elemente aus $\mathcal{D}$.

Da V auf U frei wirkt, ist die Untermatrix M_u für alle $u \in U_d$ eindeutig bestimmt und entsteht durch das Herausstreichen derselben Zeilen. Man erhält von u abhängige Basen $\{X_1(u), \ldots, X_m(u)\}$ mit der besonderen Eigenschaft $(u.(\exp s_m X_m \cdot \cdots \cdot \exp s_1 X_1))_{j_i} = u_i + s_i +$ rationale Funktion in $u, s_1, \ldots, s_{i-1}$. Dabei sind die Koeffizienten von $X_i(u)$ bezüglich der Basis $\{T_1, \ldots, T_m\}$ rationale Funktionen auf U, die sich als Quotient zweier Polynome darstellen lassen.

Man kann annehmen, daß der Nenner $\det(M_u)$ ist, also ein Polynom, dessen Nullstellen außerhalb von U_d liegen. $\square$

Die Parametervarietät Σ ist von der Wahl der Jordan-Hölder-Basis abhängig. Das Beispiel mit affinem Quotienten in 6.2.4 zeigt, daß $U \to U/V$ trivial sein kann, selbst wenn $(U \cap U_0) \neq U$ gilt.

Während der Quotientenraum U/V nicht hausdorffsch sein muß, besitzt der Quotientenraum G/V eine eindeutige algebraische Struktur. Der Satz 6.2 über die Existenz einer Parametervarietät Σ für die V-Wirkung auf U induziert die Existenz einer Parametervarietät Π der V-Wirkung auf $G = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ mit $\Pi = \cup_{k=0}^{r} \Pi_k$ und $\Pi_k = \Sigma_{d^{(k)}} \times \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C})$. Die Quotientenabbildungen auf $U_k := \Pi_k.V$ werden wieder durch die Wirkung geeigneter Gruppenelemente $\exp(\sum_{i=1}^{m} t_i^k(u) T_i)$ realisiert.

6.2.2 Quasiquotienten

Die V-invariante Menge U_0 ist Zariski-offen in G und die Quotientenabbildung $\pi_0 : U_0 \to \Pi_0 \subset \mathbb{C}^{n-m} \times \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C})$, gegeben durch $\pi_0(g) = g.exp(\sum_{i=1}^{m} t_i^0(u) T_i)$, kann man als rationale Abbildung $G \to \Pi_0$ interpretieren. Die rationalen Komponentenfunktionen lassen sich global als Quotient zweier Polynome darstellen, deren Nenner eine Potenz von $f(u) := \det(M_u)$ ist. Man beachte, daß $U_0 = \{f(u) \neq 0\}$ gilt.

Lemma 6.3. *Sei $V \subset G = Sl_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ eine zusammenhängende, unipotente, algebraische Untergruppe und $f \in \mathbb{C}[G]$ ein Polynom. Falls $\{g \in G \,|\, f(g) = 0\}$ eine V-invariante Menge ist, so ist f ein V-invariantes Polynom.*

Beweis. Die Funktion $h : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ mit $(t_i, \ldots, t_m) \mapsto f(g.\exp(\sum_{i=1}^{m} t_i T_i))$ ist ein Polynom in $t_1, \ldots, t_m$. Ihr Wertebereich ist gleich dem Wertebereich der Funktion f auf $g.V$. Entweder ist $h \equiv 0$ oder h hat auf $\mathbb{C}^m$ keine Nullstellen. Dies bedeutet, daß h konstant ist. $\square$

Aus Lemma 6.3 folgt, daß $f(u)$ eine V-invariante Funktion ist. Also läßt sich jede Komponentenfunktion von π_0 als Quotient zweier V-invarianter Polynome darstellen, wobei der Nenner eine Potentz von $f(u)$ sein kann. Dies folgt auch aus [19] Theorem II.3.3, da V unipotent und G affin ist.

Da die V-Bahnen in U abgeschlossene, irreduzible Untervarietäten sind, ist auch jeder Faktor von f eine V-invariante Funktion. Dies würde nicht gelten, falls V keine zusammenhängende, unipotente Gruppe wäre. Zum Beispiel ist bei der durch $x \mapsto -x$ erzeugten $\mathbb{Z}_2$-Wirkung $x^2 \in \mathbb{C}[x]^{\mathbb{Z}_2}$ aber $x \notin \mathbb{C}[x]^{\mathbb{Z}_2}$.

Lemma 6.4. *Wenn V kommutativ ist, dann ist die Determinantenfunktion $f : U \to \mathbb{C}$ ein Polynom in linearen Invarianten der V-Wirkung und der Konstanten* 1.

Beweis. Es sei W_{l_0} ein maximaler, V-invarianter Untervektorraum von $\mathbb{C}^{n+1}$ auf dem V trivial wirkt. Dies bedeutet, daß der Dualraum $W_{l_0}^*$ der Raum der linearen Invarianten von V ist. Dabei ist $e_0^* = 1$ auf $U = \{e_0 = 1\}$. Man erweitert eine Basis $\{e_0, \ldots, e_{l_0}\}$ von W_{l_0} zu einer Basis von $\mathbb{C}^{n+1}$, so daß V bezüglich dieser Basis obere Dreiecksform hat. Nun wirkt V nichttrivial auf $W_{l_0+1} = \langle W_{l_0}, e_{l_0+1}\rangle_{\mathbb{C}}$. Es gilt $V.W_{l_0+1} \subset W_{l_0}$.

Man wählt jetzt eine Basiserweiterung von $\{e_0, \ldots, e_{l_0+1}\}$ so, daß die Untervektorräume $\langle e_0, \ldots, e_k\rangle_{\mathbb{C}} = W_k$ V-invariant sind und l_1 mit $V.W_{l_1+1} \not\subset W_{l_0}$ minimal ist. Existiert so ein l_1 nicht, so folgt die Behauptung des Lemmas sofort. Falls es so ein l_1 gibt, bedeutet dies, daß es einen $r_1 = l_1 - l_0$-dimensionalen Untervektorraum V_1 von V gibt, der effektiv auf W_{l_1+1}/W_{l_0} wirkt. Man kann $(e_{l_0+1}W_0, \ldots, e_{l_1+1}W_0) \mapsto (0, \ldots, 0, t_1 e_{l_0+1}W_0 + \ldots + t_r e_{l_1}W_0)$ annehmen.

Aus der Kommutativität von V folgt, daß die V-Wirkung auf W_{l_1} durch die V_1-Wirkung gegeben ist und V_1 effektiv wirkt. Damit enthält die Matrix M aus Satz 6.2, deren Determinante f ist, die r Spalten $l_0+1, \ldots, l_1$. Die $r \times r$-Unterdeterminante $(\frac{\partial V_1.e_i}{\partial t_j}|_{t=0})_{i=l_0+1,\ldots,l_1, j=1,\ldots,r}$ ist ein Polynom in linearen Invarianten und muß verschieden von 0 sein, da alle Invarianten schon in W_0 liegen.

Die Iteration dieses Argumentes liefert die Behauptung. □

Nun seien Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ als Produkte aus irreduziblen Faktoren von f minimal gewählt, so daß sich die durch

$$g \mapsto \pi_0(g)\,\mathrm{diag}(1, f_1(u), \ldots, f_n(u))$$

auf U_0 definierte Abbildung zu einer regulären Abbildung

$$\Psi : G \to \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & (z_1, \ldots z_n) \\ 0 & (z_{ij}) \end{smallmatrix}\right) \mid z_j = 0 \text{ für alle } j \in S_0 \right\} \cong \mathbb{C}^{n^2+n-m}$$

fortsetzen läßt. Diese Abbildung läßt sich verbessern, da die Komponentenfunktionen $z_j(u)$ für $j > 1$ noch nichttriviale gemeinsame Teiler mit f_j haben können. Man kann diese Faktoren ausdividieren. Da man wegen Lemma 6.15 davon ausgehen kann, daß z_1 eine Invariante ist, wird $f_1 = 1$ sein. Wegen Lemma 6.4 gibt es eine reguläre Funktion z_0 auf $Z := \overline{\Psi(G)}$ mit $\Psi^*(z_0) = f$.

Lemma 6.5. *Die Abbildung Ψ ist eine reguläre Abbildung $G \to \mathbb{C}^{n^2+n-m}$ in eine irreduzible, affine Varietät $Z := \overline{\Psi(G)}$, die konstant entlang der V-Bahnen in G ist. Außerdem ist $\Psi|_{U_0} : U_0 \to \{z_0 \neq 0\}$ eine surjektive, triviale Quotientenabbildung.*

Beweis. Der Abschluß des Bildes $\Psi(G)$ ist eine irreduzible Komponente der affinen Varietät, die in $\mathbb{C}^{n^2+n-m}$ durch die Gleichung $\det(z_{ij}) = \prod_{j=1}^n h_j(z)$ mit $\Psi^*(h_j) = f_j$ gegeben ist. Das Urbild von $\{z_0 \neq 0\}$ ist U_0 und ein kanonischer Schnitt $s : \{z_0 \neq 0\} \to U_0 \subset G$ ist gegeben durch

$$z \mapsto z\,\mathrm{diag}(1, h_1(z)^{-1}, \ldots, h_n(z)^{-1}).$$

□

6.2.3 Konstruktion neuer Invarianten durch Aufblasung

Auf $G \setminus U_0$ muß Ψ die V-Bahnen nicht trennen. Es wird gezeigt, daß es eine Aufblasung $\pi : \tilde{Z} \to Z$ gibt, so daß eine V-invariante Abbildung $\tilde{\Psi} : G \to \tilde{Z}$ mit $\Psi = \pi \circ \tilde{\Psi}$ existiert, die auf G die V-Bahnen trennt. Dies gelingt durch die Hinzunahme von V-Invarianten, die rationale Funktionen auf Z, aber reguläre Funktionen auf G sind.

Der Begriff der Aufblasung entlang einer Untervarietät wird wie in [7] mit Hilfe von Graphen definiert. Es sei Z eine affine Varietät, $Y \subset Z$ eine Untervarietät und $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ reguläre Funktionen auf Z mit $Y = \{z \in Z \,|\, \varphi_0(z) = \ldots \varphi_N(z) = 0\}$. Die *Aufblasung* Z_Y *von* Z *entlang* Y ist der Abschluß des Graphen $\Gamma_\varphi = \{(z, [y]) \in Z \times \mathbb{P}_N(\mathbb{C}) \,|\, z \in Z \setminus Y, [y] = [\varphi_0(z) : \ldots : \varphi_N(z)] \in \mathbb{P}_N(\mathbb{C})\}$ der rationalen Abbildung $\varphi : Z \to \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$, also $Z_Y = \overline{\Gamma_\varphi} \subset Z \times \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$, und die Projektion $\pi : Z_Y \to Z$. Die Definiton ist unabhängig von der Wahl der Erzeuger φ_i [7], [8].

Da die Parametervarietät Π_k die Form $\Sigma_k \times \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C})$ hat, trennt die Abbildung $\Psi : G \to Z$ genau dann die V-Bahnen, wenn $f_i = 1$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn Ψ surjektiv ist, denn die Bestimmung eines Urbildes $\Psi^{-1}(z)$ bedeutet die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Für die entsprechende Annäherung des Quotienten U/V durch $\Psi : U \to \mathbb{C}^{n-m}$ gilt immerhin noch, daß Ψ die Bahnen trennt, wenn $f_i = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Die Umkehrung ist nicht wahr, wie das Beispiel eines affinen Quotienten in Abschnitt 6.2.4 zeigt. Man kann davon ausgehen, daß $U_0 = \{\prod_{j=1}^n f_j(g) \neq 0\}$.

Die Menge $E := \overline{\Psi(G \setminus U_0)} \subset \{z \in Z \,|\, z_0(z) = 0\}$ wird *Ausnahmemenge* genannt. Jede Faser über einem Punkt aus dieser Ausnahmemenge enthält im allgemeinen mehr als eine V-Bahn. Deshalb wird versucht, die Ausnahmemenge E, oder eine E enthaltende Menge, aufzublasen.

Wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, existiert eine G-äquivariante Abbildung $\rho : G \to G/V \subset \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$. Zusammen mit dem Schnitt $s : \{z_0 \neq 0\} \to \Pi_0 \subset G$ erhält man eine rationale Abbildung $\varphi = \rho \circ s : Z \to \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$. Dabei liegt $\Psi(U_0)$ im Regularitätsbereich von φ und es gilt $\varphi(\{z_0 \neq 0\}) \subset G/V$.

Nun sind eine affine Varietät $\tilde{Z}$ und reguläre Abbildungen $\tilde{\Psi}$ und $\tilde{\varphi}$ gesucht, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist. Dabei bedeuten gestrichelte Pfeile rationale Abbildungen.

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{Z} \arrow[d, "\pi"] \arrow[rrd, "\tilde{\varphi}"] & & \\
G \arrow[ru, "\tilde{\Psi}"] \arrow[r, shift left, "\Psi"] \arrow[rr, bend right, "\rho"'] & Z \arrow[l, dashed, shift left, "s"] \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & G/V \arrow[r, hook] & \mathbb{P}_N(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Satz 6.6. *Es existiert eine affine Varietät $\tilde{Z}$, ein regulärer Morphismus $\pi : \tilde{Z} \to Z$, der surjektiv und über $\Psi(U_0)$ ein Isomorphismus ist, und reguläre Morphismen $\tilde{\varphi} : \tilde{Z} \to \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ und $\tilde{\Psi} : G \to \tilde{Z}$, so daß $\varphi \circ \pi = \tilde{\varphi}$ und $\Psi = \pi \circ \tilde{\Psi}$.*

Beweis. Da Z irreduzibel ist, ist die rationale Abbildung $\varphi = \rho \circ s$ durch die Einschränkung auf die Zariski-offene und dichte Teilmenge $\{z_0 \neq 0\}$, die im Regularitätsbereich von φ liegt, bestimmt. Es existieren wegen Lemma 6.5 reguläre Funktionen $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ auf Z, so daß $\varphi(z) = [\varphi_0(z) : \ldots : \varphi_N(z)]$ für alle $z \in \{z_0 \neq 0\}$, also insbesondere $Y := \{z \in Z \mid \varphi_0(z) = \ldots = \varphi_N(z) = 0\} \subset \{z_0 = 0\}$. Man kann $U_0 \neq G$ annehmen, da anderenfalls $Z = \tilde{Z}$ und φ regulär ist. Also gilt $E \subset Y$, da Ψ auf $G \setminus U_0$ die V-Bahnen nicht trennt.

Es seien Z_Y die Aufblasung von Z entlang Y und $\pi : Z_Y \to Z$ bzw. $\tilde{\varphi} : Z_Y \to \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ die Projektionen auf den ersten Faktor bzw. den zweiten Faktor von $Z_Y \subset Z \times \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$. Da π über $\{z_0 \neq 0\}$ ein Isomorphismus ist, gilt $\varphi \circ \pi = \tilde{\varphi}$.

Da die Hyperfläche $\{z_0 = 0\}$ die Untervarietät Y enthält, ist Z_Y isomorph zum Abschluß des Graphen $\Gamma_{\zeta_0,\varphi} = \{(z,[y]) \in Z \times \mathbb{P}_{N+1}(\mathbb{C}) \mid z \in Z \setminus Y, [y] = [\zeta_0 : \varphi_0(z) : \ldots : \varphi_N(z)] \in \mathbb{P}_{N+1}(\mathbb{C})\}$, wobei ζ_0 das Produkt aus allen paarweise verschiedenen, irreduziblen Faktoren von z_0 ist. Also $\langle \Psi^*(\zeta_0) \rangle = I(G \setminus U_0) := \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f|_{G \setminus U_0} = 0\}$.

Die durch $g \mapsto (\Psi(g), [\Psi^*(\zeta_0)(g) : \Psi^*(\varphi_0)(g) : \ldots : \Psi^*(\varphi_N)(g)])$ gegebene Abbildung ist wohldefiniert als Abbildung $\tilde{\Psi} : U_0 \to Z_Y$. Wegen $E \subset Y$ gilt $\Psi^*(\varphi_i)|_{G \setminus U_0} = 0$ für alle i, also $\langle \Psi^*(\zeta_0), \Psi^*(\varphi_0), \ldots, \Psi^*(\varphi_N) \rangle = \langle \Psi^*(\varphi_0) \rangle = I(G \setminus U_0)$. Damit ist $\tilde{\Psi} : G \to Z_Y$ eine wohldefinierte reguläre Abbildung mit $\Psi = \pi \circ \tilde{\Psi}$. Das Bild $\tilde{\Psi}(G)$ liegt dicht in der affinen, offenen Teilmenge $\tilde{Z} := \{(z,[y]) \in Z \times \mathbb{P}_{N+1}(\mathbb{C}) \mid y_0 \neq 0\} \in Z_Y$. □

Lemma 6.7. *Der geometrische Quotient G/V und $\tilde{\Psi}(G)$ sind isomorphe Varietäten.*

Beweis. Die Abbildung $\tilde{\Psi}$ ist V-invariant. Wegen $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\Psi}(G) = \rho(G) = G/V$ trennt $\tilde{\Psi}$ die V-Bahnen auf G. Damit ist $\tilde{\varphi}|_{\tilde{\Psi}(G)} : \tilde{\Psi}(G) \to G/V$ ein bijektiver Morphismus.

Da $\Psi|_{U_0}$ die Quotientenabbildung auf U_0 ist und $\tilde{\Psi}|_{U_0} = \Psi|_{U_0}$ gilt, gibt es einen Isomorphismus $s_0 : G/V \supset U_0/V \to \tilde{\Psi}(U_0)$. Für die Morphismen $s_g : (gU_0)/V \to \tilde{\Psi}(gU_0)$, gegeben durch $guV \mapsto \tilde{\Psi}(gs(\pi(s_0(u))))$, gilt $\tilde{\varphi} \circ s_g = \mathrm{Id}_{gU_0}$. Damit ist $\tilde{\varphi}|_{\tilde{\Psi}(G)}$ ein Isomorphismus zwischen $\tilde{\Psi}(G)$ und G/V. □

Die aufzublasende Untervarietät Y ist die gemeinsame Nullstellenmenge der Komponentenfunktionen der rationalen Abbildung $\varphi = \rho \circ s : Z \to \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$. Sie hängt also von der Abbildung ρ ab und ist damit schwer zu bestimmen. In Abschnitt 6.2.4 wird in drei Beispielen gezeigt, wie man die Ausnahmemenge E so aufblasen kann, daß die daraus konstruierte V-invariante Abbildung $\tilde{\Psi} : G \to \tilde{Z}$ die Bahnen trennt. Es ist nicht klar, ob dann noch $\tilde{\Psi}(G) \cong G/V$ gilt. In den Beispielen ist das Komplement des Bildes von $\tilde{\Psi}$ in $\tilde{Z}$ leer oder von Kodimension ≥ 2. Um im letzteren Fall daraus folgern zu können, daß G/V nicht steinsch ist, benötigt man das

Lemma 6.8. *Es sei V eine algebraische Gruppe, die auf eine normale, affine Varietät X wirkt und $\pi : X \to Z$ ein V-invarianter Morphismus auf eine irreduzible, affine Varietät Z, der die V-Bahnen auf X trennt. Wenn $Z \setminus \pi(X)$ die*

Menge der singulären Punkte von Z enthält und $\operatorname{codim}(Z \setminus \pi(X)^0) \geq 2$*, so ist der Quotient X/V nicht affin.*

Beweis. Da X normal ist, liftet sich die Abbildung π zu einer kanonischen Abbildung $\tilde{\pi} : G \to \tilde{Z}$, wobei $\tilde{Z}$ die Normalisierung von Z ist. Weil die Abbildung $\tilde{Z} \to Z$ über den normalen Punkten ein Isomorphismus ist, folgt aus Satz 3.2 $X/V \cong \tilde{\pi}(X)$. Die Behauptung ergibt sich wegen $\operatorname{codim}(\tilde{Z} \setminus \tilde{\pi}(X)^0) \geq 2$ aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz. □

Die Aufblasungsmethode liefert auch Ergebnisse für die Quotientenbildung $U \to U/V$. Im Unterschied zur Betrachtung von G/V kann man hier nicht davon ausgehen, daß es eine Einbettung des Quotienten U/V in einen projektiven Raum gibt. Erstens ist die Existenz des Quotienten U/V nicht gesichert. Zweitens ist es noch eine offene Frage, ob der Quotient U/V holomorph separabel oder sogar algebraisch separabel ist, wenn er existiert. Ein Hilfsmittel ist jetzt:

Satz 6.9 (Igusakriterium [19])**.** *Es sei V eine algebraische Gruppe, die auf eine irreduzible Varietät X wirkt, Y eine normale, irreduzible Varietät und $\pi : X \to Y$ ein Morphismus, der konstant auf V-Bahnen ist. Wenn die beiden Bedingungen*

1. $\operatorname{codim}(Y \setminus \pi(X)^0) \geq 2$
2. *Es existiert eine offene Menge $Y_0 \subset Y$, so daß für alle $y \in Y_0$ die Faser $\pi^{-1}(y)$ eine dichte V-Bahn enthält.*

erfüllt sind, dann ist $\pi^* : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]^V$ ein Isomorphismus.

Wie bei der Konstruktion des Quotienten G/V betrachtet man aber $\pi_0 : U_0 = \{f \neq 0\} \to \Sigma_0$ und die Regularisierung $\Psi : U \to \mathbb{C}^{n-m}$, gegeben durch $u \mapsto \pi_0(u) \operatorname{diag}(f_1, \ldots, f_n)$, wobei $f_1, \ldots, f_n$ als Produkt von irreduziblen Komponenten von f minimal gewählt sind. Wegen Lemma 6.4 existiert ein Polynom z_0 in den Koordinatenfunktionen von $\mathbb{C}^{n-m}$, die lineare Invarianten sind, mit $\Psi^*(z_0) = f$. Es sei $E := \overline{\Psi(U \setminus U_0)} \subset \{z_0 = 0\} \subset \mathbb{C}^{n-m}$.

Lemma 6.10. *Falls $E = \{z_0 = 0\}$ ist, so ist Ψ eine Quotientenabbildung oder der Quotient U/V ist nicht holomorph separabel, wenn er existiert.*

Beweis. Aus dem Igusa-Kriterium 6.9 folgt mit $X = U$ und $Y = \mathbb{C}^{n-m}$, daß $\mathbb{C}[U]^V \cong \mathbb{C}[Y]$ ist. Wenn Ψ die V-Bahnen trennt, dann folgt aus Satz 3.2, daß $\Psi(U) \cong U/V$. □

Falls E Kodimension ≥ 2 in $\mathbb{C}^{n-m}$ hat, kann man versuchen durch Aufblasung von E zu einer besseren Annäherung an den Quotienten U/V zu kommen. Man erhält eine V-invariante Abbildung $\tilde{\Psi} : U \to \tilde{Z}$, die auf U_0 die V-Bahnen trennt. Außerdem kann man annehmen, daß $\tilde{Z}$ normal ist.

Folgerung 6.11. *Es sei $\tilde{\Psi} : U \to \tilde{Z}$ eine V-invariante Abbildung in eine normale, affine, irreduzible Varietät $\tilde{Z}$, so daß $\tilde{\Psi}(U_0)$ dicht in $\tilde{Z}$ und* $\operatorname{codim}(\tilde{Z} \setminus \tilde{\Psi}(U) \geq 2$*. Wenn $\tilde{\Psi}$ die V-Bahnen trennt, dann ist $\tilde{\Psi}$ die Quotientenabbildung. Wenn $\tilde{\Psi}$ die V-Bahnen nicht trennt und U/V existiert, dann ist U/V nicht holomorph separabel.*

6.2.4 Beispiele

Es wird je ein Beispiel einer affinen $V = \mathbb{C}^2$-Wirkung auf $\mathbb{C}^4$, $\mathbb{C}^5$ und $\mathbb{C}^6$ betrachtet. Die dazugehörigen Quotienten $\mathbb{C}^4/V$ und $\mathbb{C}^6/V$ wurden schon in [23] bzw. [26] untersucht. Allerdings wird dort nicht beschrieben, wie man die für die Quotientenabbildung benötigten V-invarianten Funktionen bestimmt. In der folgenden Behandlung dieser Beispiele erhält man dieselben Invarianten systematisch.

In allen Beispielen werden die Matrixkoeffizienten von $g \in G = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ mit a_j und a_{ij} bezeichnet, wobei $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a_j \\ 0 & a_{ij} \end{smallmatrix}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$. Die Berechnung der Parametervarietäten und der Abbildung Ψ ist einfach. Für die durch Matrizen in oberer Dreiecksform beschriebenen Wirkungen wählt man die Standardbasis als Jordan-Hölder-Basis und verfährt wie in den Abschnitten 6.2.1 und 6.2.2 über die Parametervarietät und die Quasiquotienten.

Ein affiner Quotient In [23] wird gezeigt, daß für

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\ 0 & 1 & 2t_1 & t_1^2 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathrm{Sl}_4(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^4 = G,$$

die Quotienten $\mathbb{C}^4/V$ und G/V affin sind. Es handelt sich hierbei bis auf Äquivalenz um das einzige nichttriviale Beispiel einer zweidimensionalen, unipotenten Untergruppe von $\mathrm{Sl}_4 \ltimes \mathbb{C}^4$, die die Matsushimabedingung erfüllt (siehe Abschnitt 8.2). Insbesondere ist es äquivalent zu $\exp(\mathfrak{v})$ mit

$$\mathfrak{v} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\ 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Die Parametervarietäten Π und Σ werden beschrieben durch

$$\begin{aligned} d^{(0)} &= (0,0,1,2,2), \quad U_0 = \{a_1 \neq 0\}, \quad S_0 = \{2,3\} \\ d^{(1)} &= (0,0,0,1,2), \quad U_1 = \{a_1 = 0\}, \quad S_1 = \{3,4\}. \end{aligned}$$

Es gilt $t_1^0 = -\frac{a_2}{a_1}$ und $t_2^0 = -a_3 + \frac{a_2^2}{2a_1}$. Mit den Regularisierungsfaktoren $f_2 = a_1$, $f_3 = a_1^2$ und $f_4 = a_1$ erhält man

$$\Psi(g) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & -a_3a_1^2 + a_1(a_4 + \frac{1}{2}a_2^2) - a_2 \\ a_{i1} & a_1a_{i2} - a_2a_{i1} & a_1^2a_{i3} - a_1a_2a_{i2} + \frac{1}{2}a_2^2a_{i1} & a_1(a_{i4} - a_3a_{i1}) + \frac{1}{2}a_2^2a_{i1} \end{pmatrix}_{i=1,\ldots,4}.$$

Die affine Varietät Z ist durch eine Komponente von $\{\det(z_{ij}) = z_1^4\}$ gegeben. Die Abbildung Ψ ist auf U_0 die Quotientenabbildung. Auf $G \setminus U_0 = \{a_1 = 0\}$ trennt sie die Bahnen nicht, denn für ein $g \in G \setminus U_0$ gilt

$$\Psi(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_2 \\ a_{i1} & -a_2a_{i1} & \frac{1}{2}a_2^2a_{i1} & \frac{1}{2}a_2^2a_{i1} \end{pmatrix}_{i=1,\ldots,4}.$$

Man beachte aber, daß die V-invariante Abbildung $\Psi : U \to \mathbb{C}^4$, gegeben durch $(a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto (a_1, -a_3 a_1^2 + a_1(a_4 + \frac{1}{2}a_2^2) - a_2)$, die V-Bahnen in U trennt und wegen $\Psi(0, a_2, a_3, a_4) = (0, -a_2)$ surjektiv ist. Der geometrische Quotient U/V ist also isomorph zu $\Psi(U) = \mathbb{C}^2$. So ist schon jetzt klar, daß der Quotient G/V steinsch ist.

Die gemeinsame Nullstellenmenge von $y_0 = z_1$, $y_{i2} = z_{i2} - z_4 z_{i1}$, $y_{i3} = z_{i3} - \frac{1}{2} z_4^2 z_{i1} - y_{i2} z_4$ und $y_{i4} = z_{i4} - z_{i3}$ für $i = 1, \ldots, 4$ enthält E. Man betrachtet die rationalen V-Invarianten $x_{i2} := y_{i2}/z_1$, $x_{i3} := y_{i3}/z_1^2$ und $x_{i4} := y_{i4}/z_1$. Die Funktionen $\Psi^*(x_{ij})$, die auch wieder mit x_{ij} bezeichnet werden, sind Polynome, also reguläre Funktionen, auf G. Auf $G \setminus U_0 = U_1 = \{a_1 = 0\}$ gilt

$$x_{i2} = a_{i2} - \frac{1}{2} a_{i1} a_2^2 - a_{i1} a_4 \tag{1}$$

$$x_{i3} = a_{i3} + (\frac{1}{2} a_2^2 a_4 + \frac{1}{2} a_4^2 + \frac{1}{8} a_2^4) a_{i1} - (a_4 + \frac{1}{2} a_2^2) a_{i2} \tag{2}$$

$$x_{i4} = a_{i4} - a_3 a_{i1} + a_2 a_{i2}. \tag{3}$$

Das Bild der Abbildung $\tilde{\Psi} : G \to Z \times \mathbb{C}^{12}$, gegeben durch $g \mapsto (\Psi(g), x_{ij}(g))$, das die V-Bahnen auf ganz G trennt, liegt dicht in der affinen Varietät

$$\tilde{Z} = \{y_{i2}(z) = x_{i2} z_1, y_{i3}(z) = x_{i3} z_1, y_{i4}(z) = x_{i4} z_1, \\ \det(z_{ij}) = z_1^4, \det(z_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}) = 1\}.$$

Wegen der Determinantenbedingung $\det(z_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}) = 1$ gilt $\det A = 1$ für die Lösung $A = (a_{ij})$ des linearen Gleichungssystems, das aus den Gleichungen 1, 2, 3 und $a_{i1} = z_{i1}$ für $i = 1, \ldots, 4$ besteht. Zu gegebenem $z \in \tilde{Z}$ mit $z_1 = 0$ ist $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$ mit $a = (0, z_4, 0, 0)$ ein Urbild in $\tilde{\Psi}^{-1} \cap \Pi_1$. Daraus folgt, daß $\tilde{\Psi} : G \to \tilde{Z}$ surjektiv ist.

An diesem Beispiel ist bemerkenswert, daß die V-invariante, Zariski-offene Teilmenge U_0, auf der man sofort einen trivialen Quotienten konstruieren kann, echt kleiner als G ist. Trotzdem ist G/V steinsch und damit die Quotientenabbildung trivial. Die konstruktiv bestimmte, Zariski-offene Menge $U_0 \subset G$ ist also keine maximale, offene Menge, auf der die Quotientenabbildung U_0/V trivial ist.

Ein hausdorffscher, nicht steinscher Quotient In [26] wird gezeigt, daß die zweidimensionale, kommutative Gruppe

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 + \frac{1}{2} t_2^2 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 & 0 & t_2 & \frac{1}{2} t_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & t_1 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathrm{Sl}_6(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^6 = G$$

die Matsushimabedingung erfüllt und der Quotient $\mathbb{C}^6/V$ nicht steinsch ist. Dazu wird U/V mit Hilfe von fünf unabhängigen V-invarianten Funktionen als Zariski-offene Menge Y in einer nichtsingulären Quadrik Q in $\mathbb{C}^5$ dargestellt, so daß das Komplement $Q \setminus Y$ in Q Kodimension 2 besitzt.

Die Parametervarietäten Π und Σ werden durch

$$\begin{aligned}
d^{(0)} &= (0,0,0,1,2,2,2), \quad S_0 = \{3,4\}, \quad U_0 = \{a_2 \neq 0\} \\
d^{(1)} &= (0,0,0,1,1,1,2), \quad S_1 = \{3,6\}, \quad U_1 = \{a_2 = 0, a_1 \neq 0\} \\
d^{(2)} &= (0,0,0,0,0,1,2), \quad S_2 = \{5,6\}, \quad U_2 = \{a_2 = 0, a_1 = 0\}
\end{aligned}$$

beschrieben. Mit $t_1^0 = -\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_1 a_4}{a_2^2}$, $t_2^0 = -\frac{a_4}{a_2}$ und den Regularisierungsfaktoren $f_2 = 1$, $f_3 = f_6 = a_2^2$ und $f_4 = f_5 = a_2$ erhält man die Abbildung

$$\Psi(g) = \begin{pmatrix} a_1 & a_{i1} \\ a_2 & a_{i2} \\ 0 & a_2^2 a_{i3} - a_2(a_4 a_{i1} + a_3 a_{i2}) + a_4 a_1 a_{i2} \\ 0 & a_2 a_{i4} - a_4 a_{i2} \\ a_2 a_5 - a_4(a_1+1) & a_2 a_{i5} - a_4 a_{i1} \\ a_2^2 a_6 - a_2(a_4 a_5 + a_3) + \frac{1}{2} a_4^2 (a_1+1) + a_4 a_1 & a_2^2 a_{i6} - a_2 a_4 a_{i5} + \frac{1}{2} a_4^2 a_{i1} \end{pmatrix}^T_{i=1,\dots,6}.$$

Weder auf $G \setminus U_0$ noch auf $U \setminus U_0$ trennt Ψ die V-Bahnen, denn

$$\Psi|_{\{a_2=0\}}(g) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & -a_4(a_1+1) & \frac{1}{2}a_4^2(a_1+1) + a_4 a_1 \\ a_{i1} & a_{i2} & a_4 a_1 a_{i2} & -a_4 a_{i2} & -a_4 a_{i1} & \frac{1}{2} a_4^2 a_{i1} \end{pmatrix}_{i=1,\dots,6}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi(U \setminus U_0)} = \{(z_1, z_2, z_5, z_6) \in \mathbb{C}^4 \,|\, y_0(z) &:= z_2 = 0, \\
y_1(z) &:= z_6(z_1+1) - \frac{1}{2} z_5^2 + z_5 z_1 = 0\}.
\end{aligned}$$

Man betrachtet die rationale V-Invariante $x := y_1/y_0$. Es gilt $\Psi^*(x) = (a_6 a_1 - \frac{1}{2} a_5^2 + a_6) a_2 + a_1 a_5 - a_3(a_1+1)$. Damit trennt die Abbildung $\tilde{\Psi} : U \to \mathbb{C}^5$ die V-Bahnen auf U. Das Bild $\tilde{\Psi}(U)$ ist Zariski-offen in der nichtsingulären Hyperfläche $Q := \{z_2 x = z_6(z_1+1) - \frac{1}{2} z_5^2 + z_5 z_1\}$ von $\mathbb{C}^5$. Es gilt $Q \setminus \tilde{\Psi}(U) = \{(-1, 0, -1, z_6, x) \,|\, z_6, x \in \mathbb{C}\} \neq \emptyset$. Die Menge $Q \setminus \Psi_2(U)$ hat Kodimension 2 in Q. Damit ist U/V nicht steinsch.

Nun soll der Quotient G/V untersucht werden. Das Bild $\Psi(G)$ liegt dicht in einer Komponente von $\{\det(z_{ij}) = z_2^6\} \subset \mathbb{C}^{36+4}$. Die gemeinsame Nullstellenmenge von

$$\begin{aligned}
y_0 &:= z_2 \\
y_{3ij} &:= z_{i3} z_{j2} - z_{j3} z_{i2} \qquad i < j \\
y_{4i} &:= z_{i3} + z_1 z_{i4} \\
y_{4ij} &:= z_{i4} z_{j2} - z_{j4} z_{i2} \qquad i < j \\
y_{5i} &:= z_5 z_{i2} - (z_1+1) z_{i4} \\
y_{5ij} &:= z_{i5} z_{j2} - z_{j4} z_{i1} \\
y_{6ij} &:= z_{i6} z_{j2}^2 - \frac{1}{2} z_{j2} z_{j4} z_{i5} - \frac{1}{2} z_{j4} y_{5ij} \\
y_{ij} &:= z_6 z_{j2} z_{i2} - z_{j2} z_{i3} - \frac{1}{2}(z_1+1) z_{j4} z_{i4} - \frac{1}{2}(z_{j4} y_{5i} + y_{5j} z_{i4}) + z_2 z_{j4} z_{i1}
\end{aligned}$$

mit $i,j=1,\dots,6$ enthält $E=\overline{\Psi(G\setminus U_0)}$. Dabei wäre $y_{3ii}=y_{4ii}\equiv 0$, $y_{3ji}=-y_{3ij}$ und $y_{4ji}=-y_{4ij}$. Die rationalen Invarianten $x_{3ij}=y_{3ij}/y_0$, $x_{4i}=y_{4i}/y_0$, $x_{4ij}=y_{4ij}/y_0$, $x_{5i}=y_{5i}/y_0$, $x_{5ij}=y_{5ij}/y_0$, $x_{6ij}=y_{6ij}/y_0^2$, $x_{ij}=y_{ij}/y_0^2$ sind reguläre Funktionen auf G, also $\Psi^*(x_{kij}),\Psi^*(x_{li}),\Psi^*(x_{ij})\in\mathbb{C}[G]$ für $i,j=1,\dots,6$, $k=3,4,5,6$ und $l=4,5$.

Lemma 6.12. *Die erweiterte Abbildung $\tilde{\Psi}:G\to\mathbb{C}^N$ mit $N=6\cdot 6+4+2\cdot 6+3\cdot 36+2\cdot 15$, gegeben durch*

$$g\mapsto(\Psi(g),x_{3ij}(g),x_{4i}(g),x_{4ij}(g),x_{5i}(g),x_{5ij}(g),x_{6ij}(g),x_{ij}(g)),$$

trennt die V-Bahnen auf G.

Beweis. Auf U_0 trennt schon die Abbildung Ψ die Bahnen und auf $G\setminus U_0=\{a_2=0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
x_{4i}(g)=&a_1a_{i4}-a_4a_{i1}-a_3a_{i2}\\
x_{5i}(g)=&a_5a_{i2}-(a_1+1)a_{i4}\\
x_{5ij}(g)=&a_{j2}a_{i5}-a_{j4}a_{i1}\\
x_{6ij}(g)=&a_{j2}^2a_{i6}-a_{j2}a_{j4}a_{i5}+\frac{1}{2}a_{j4}^2a_{i1}\\
x_{ij}(g)=&a_6a_{j2}a_{i2}-a_{j2}a_{i3}+\frac{1}{2}((a_1+1)a_{j4}a_{i4}-a_5(a_{j4}a_{i2}+a_{i4}a_{j2}))+a_{j4}a_{i1}.
\end{aligned}$$

Falls $\tilde{\Psi}(g)=\tilde{\Psi}(g')$, so gilt $a_{i1}=a'_{i1}$, $a_{i2}=a'_{i2}$, $a_1=a'_1$, $a_2=a'_2=0$. Also gibt es ein j, so daß $z_{j2}\neq 0$ und es gilt $a'_4=a_4=-z_{j4}/z_{j2}$ für $a_2=0$. Man kann annehmen, daß $g,g'\in\Pi$, da $\tilde{\Psi}$ eine V-invariante Abbildung ist.

Falls $g,g'\in\Pi_1$, d.h. $a_1\neq 0$, so gilt $a_3=a'_3=a_6=a'_6=0$. Aus $x_{4i}(g)=x_{4i}(g')$ folgt $a_{i4}=a'_{i4}$ für $i=1,\dots,6$ und aus $x_{5j}(g)=x_{5j}(g')$ folgt $a_5=a'_5$. Nun folgt aus $x_{5ij}(g)=x_{5ij}(g')$, $x_{6ij}(g)=x_{6ij}(g')$ und $x_{ij}(g)=x_{ij}(g')$ für $i=1,\dots,6$ auch $g=g'$.

Falls $g,g'\in\Pi_2$, d.h. $a_1=a_2=0$, so gilt $a_5=a'_5=a_6=a'_6=0$. Aus $x_{5i}(g)=x_{5i}(g')$ folgt $a_{i4}=a'_{i4}$ für $i=1,\dots,6$ und aus $x_{4j}(g)=x_{4j}(g')$ folgt $a_3=a'_3$. Nun folgt wie oben $g=g'$. □

Man rechnet nach, daß jeder Punkt $z\in\overline{\tilde{\Psi}(G)}=\overline{\tilde{\Psi}(U_0)}=:\tilde{Z}$ die Gleichungen

$$x_{3ij}z_2=z_{i3}z_{j2}-z_{j3}z_{i2}\qquad i<j \tag{4}$$

$$x_{4i}z_2=z_{i3}+z_1z_{i4} \tag{5}$$

$$x_{4ij}z_2=z_{i4}z_{j2}-z_{j4}z_{i2}\qquad i<j \tag{6}$$

$$x_{5i}z_2=z_5z_{i2}-(z_1+1)z_{i4} \tag{7}$$

$$x_{5ij}z_2=z_{i5}z_{j2}-z_{j4}z_{i1} \tag{8}$$

$$x_{6ij}z_2^2=z_{i6}z_{j2}^2-\frac{1}{2}z_{j2}z_{j4}z_{i5}-\frac{1}{2}z_{j4}y_{5ij} \tag{9}$$

$$x_{ij}z_2^2=z_6z_{j2}z_{i2}-z_{j2}z_{i3}-\frac{1}{2}(z_1+1)z_{j4}z_{i4}-\frac{1}{2}(z_{j4}y_{5i}+y_{5j}z_{i4})+z_2z_{j4}z_{i1} \tag{10}$$

für $i, j = 1, \dots, 6$, die sich aus der Definition der neuen Invarianten x_{3ij}, x_{4i}, x_{5i}, x_{5ij}, x_{6ij}, x_{ij} ergeben, die Kompatibilitätsgleichungen

$$x_{3ij} z_{k2} + x_{3jk} z_{i2} + x_{3ki} z_{j2} = 0 \tag{11}$$
$$x_{4ij} z_{k2} + x_{4jk} z_{i2} + x_{4ki} z_{j2} = 0 \tag{12}$$
$$x_{4i} z_{j2} - x_{4j} z_{i2} = x_{3ij} + z_1 x_{4ij} \tag{13}$$
$$x_{5i} z_{j2} - x_{5j} z_{i2} = -(z_1 + 1) x_{4ij} \tag{14}$$
$$x_{5ij} z_{k2} - x_{5ik} z_{j2} = -z_{i1} x_{4jk} \tag{15}$$

$$x_{6ij} z_{k2} - x_{6ik} z_{j2} = -x_{4ik} \frac{1}{2}(x_{5jk} z_{j2} + x_{5ij} z_{k2}) \tag{16}$$
$$x_{ij} z_{k2} - x_{ik} z_{j2} = -\frac{1}{2} x_{4jk} x_{5i} + x_{4jk} z_{i1} \tag{17}$$

für $i, j, k = 1, \dots, 6$, die widerspiegeln, daß in Lemma 6.12 die Bestimmung des Urbildes $\tilde{\Psi}^{-1}(z) \cap \Pi$ nicht von der Wahl des $j \in \{1, \dots, 6\}$ abhängt, solange $z_{j2} \neq 0$ ist, und die Determinantengleichungen

$$\det(z_{ij})_{i,j=1,\dots,6} = z_2^6 \tag{18}$$
$$\det(z_{i1}, z_{i2}, x_{5ij}.x_{6ij}, x_{ij}, x_{4i})_{i=1,\dots,6} = -z_{j2}^3(\frac{1}{2} z_2 x_{5j} - z_1 z_{j2}) \tag{19}$$
$$\det(z_{i1}, z_{i2}, x_{5ij}.x_{6ij}, x_{ij}, x_{5i})_{i=1,\dots,6} = (z_1 + 1) z_{j2}^4 \tag{20}$$

für $j = 1, \dots, 6$ erfüllt.

Daraus folgt, daß die nichtsingulären und damit auch die nichtnormalen Punkte von $\tilde{Z}$ außerhalb der Menge $B := \{z_2 \neq 0\} \cup \bigcup_{j=1}^6 \{z_{j2} \neq 0\}$ liegen, denn für $z \in B$ kann man alle Invarianten, die in Lemma 6.12 nicht gebraucht werden, eliminieren und verbleibt mit einer der Determinantengleichungen. Die Determinantengleichungen sichern auch, daß das Bild $\tilde{\Psi}(G)$ die Menge $\bigcup_{j=1}^6 \{z_{j2} \neq 0\}$ enthält, da das zur Bestimmung eines Urbildes entstehende linearen Gleichungssystem lösbar ist. Nun ist das Komplement des Bildes hinreichend klein, denn es ist in $\cap_{j=1}^6 \{z_{j2} \neq 0\}$ enthalten, aber auch nicht leer, denn $\tilde{Z} \cap \{z_{12} = \ldots = z_{62} = 0\} \neq \emptyset$. Aus Lemma 6.8 folgt, daß G/V nicht steinsch ist.

Ein nicht-hausdorffscher Quotient Man betrachtet die zweidimensionale, kommutative, unipotente Gruppe

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\ 0 & 1 & t_1 & \frac{1}{2}t_1^2 & \frac{1}{6}t_1^3 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_1 & \frac{1}{2}t_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathrm{Sl}_5(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^5 = G.$$

Sie erfüllt die Matsushimabedingung. Die Parametervarietäten Π und Σ werden durch

$$
\begin{aligned}
d^{(0)} &= (0,0,1,1,2,2), \quad S_0 = \{2,4\}, \quad U_0 = \{a_1 \neq 0\} \\
d^{(1)} &= (0,0,0,1,2,2), \quad S_1 = \{3,4\}, \quad U_1 = \{a_1 = 0, a_2 \neq 0\} \\
d^{(2)} &= (0,0,0,0,1,2), \quad S_2 = \{4,5\}, \quad U_2 = \{a_1 = 0, a_2 = 0\}.
\end{aligned}
$$

beschrieben. Mit $t_1^0 = -\frac{a_2}{a_1}$, $t_2^0 = -a_4 + \frac{a_2 a_3}{a_1} - \frac{a_2^3}{3a_1^2}$ und den Regularisierungsfaktoren $f_2 = a_1$, $f_3 = f_5 = a_1^2$, $f_4 = a_1^3$ erhält man die Abbildung

$$
\Psi(g) = \begin{pmatrix} a_1 & a_{i1} \\ 0 & a_1 a_{i2} - a_2 a_{i1} \\ a_1^2 a_3 - \frac{1}{2} a_1 a_2^2 & a_1^2 a_{i3} - a_1 a_2 a_{i2} + \frac{1}{2} a_2^2 a_{i1} \\ 0 & a_1^3 a_{i4} - a_1^2 a_2 a_{i3} + \frac{1}{2} a_1 a_2^2 a_{i2} \\ -a_1^3 a_4 + a_1^2 (a_2 a_3 + a_5) - a_1 (a_2 + \frac{1}{3} a_2^3) & a_1^2 (a_{i5} - a_4 a_{i1}) + a_1 a_2 a_3 a_{i1} - \frac{1}{3} a_2^3 a_{i1} \end{pmatrix}^T_{i=1,\ldots,5}.
$$

Die Abbildung Ψ trennt weder auf $G \setminus U_0$ noch auf $U \setminus U_0$ die V-Bahnen, denn auf $\{a_1 = 0\}$ gilt

$$
\Psi(g) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{i1} & -a_2 a_{i1} & \frac{1}{2} a_2^2 a_{i1} & -\frac{1}{6} a_2^3 a_{i1} & -\frac{1}{3} a_2^3 a_{i1} \end{pmatrix}_{i=1,\ldots,5}.
$$

Man kann die V-Invarianten z_3 und z_5 durch z_3/z_1 und z_5/z_1 ersetzen, also $z_2 = a_1 a_3 - \frac{1}{2} a_2^2$ und $z_5 = -a_1^2 a_4 + a_1(a_2 a_3 + a_5) - a_2(1 + \frac{1}{3} a_2^2)$. Mit dieser Umbenennung gilt $\overline{\Psi(U \setminus U_0)} = \{y_0 := z_1 = 0, y_1 := z_5^2 + 2z_3(1 - \frac{2}{3} z_3)^2\}$. Für die rationale V-Invariante $x := y_1/y_0$ gilt $\Psi^*(x) \in \mathbb{C}[U]^V$ mit

$$
\Psi^*(x)|_{a_1=0} = 2a_2(-a_5 + \frac{1}{3} a_2 a_3 - \frac{1}{3} a_2^2 a_5 + a_3).
$$

Damit trennt die V-invariante Abbildung $\tilde{\Psi} : U \to \mathbb{C}^4$, gegeben durch $\tilde{\Psi}(a) = (\Psi(a), x)$, die V-Bahnen auf $\{a_1 \neq 0\} \cup \{a_2 \neq 0, a_2^2 \neq -3\}$ aber auf $\{a_1 = 0, a_2(3 + a_2^2) = 0\}$ nicht. Das Bild $\tilde{\Psi}(U)$ liegt dicht in $H := \{x z_1 = z_5^2 + 2z_3(1 - \frac{2}{3} z_3)^2\}$ und enthält $H \cap (\{z_1 \neq 0\} \cup \{z_5 \neq 0\})$. Die Hyperfläche H ist singulär, aber es gibt nur einen singulären Punkt, nämlich $(0, 3/2, 0, 0)$. Wenn man zur Normalisierung von H übergeht, folgt aus dem Satz von Igusa 6.9, daß die V-invarianten Polynome auf U die V-Bahnen nicht trennen. In Satz 7.13 wird gezeigt, daß der Quotient U/V sogar nicht-hausdorffsch ist.

Nun soll der Quotient G/V beschrieben werden. Das Bild $\Psi(G)$ liegt dicht in einer Komponente von $\{\det(z_{ij}) = z_1^8\} \subset \mathbb{C}^{25+3}$. Die gemeinsame Nullstellenmenge von

$$\begin{aligned}
y_0 :=& z_1\\
y_{2ij} :=& z_{j1}z_{i2} - z_{j2}z_{i1}\\
y_{3i} :=& z_{i3} + z_3 z_{i1}\\
y_{5i} :=& z_5 z_{i1} - z_{i2} - z_{i5}\\
y'_{3ij} :=& z_{j1}z_{i3} - \frac{1}{2}z_{j2}z_{i2}\\
y_{3ij} :=& z_{j1}y'_{3ij} - \frac{1}{2}z_{j2}y_{2ij}\\
y_{4ij} :=& z_{j1}^3 z_{i4} - \frac{1}{3}z_{j1}^2 z_{j2}z_{i3} - \frac{1}{3}z_{j1}z_{j3}y_{2ij} - \frac{2}{3}z_{j2}y_{3ij}\\
y_{5ij} :=& z_{j1}z_{i5} - 2z_{j1}z_{i4} + z_{j2}y_{3i}\\
y_{ij} :=& z_{j1}z_{i5} - z_{j5}z_{i1}
\end{aligned}$$

mit $i, j = 1, \ldots, 5$ enthält $E = \overline{\Psi(G \setminus U_0)}$. Es gilt $y_{2ii} = y_{ii} = 0$, $y_{2ij} = -y_{2ji}$ und $y_{ij} = -y_{ji}$ für $i, j = 1, \ldots, 6$. Die rationalen V-Invarianten $x_{2ij} := y_{2ij}/y_0$, $x_{3i} := y_{3i}/y_0$, $x_{5i} := y_{5i}/y_0$, $x'_{3ij} := y'_{3ij}/y_0$, $x_{3ij} := y_{3ij}/y_0^2$, $x_{4ij} := y_{4ij}/y_0^3$, $x_{5ij} := y_{5ij}/y_0^2$ und $x_{ij} := y_{ij}/y_0$ sind reguläre V-Invarianten auf G, also $\Psi^*(x_{lij}), \Psi^*(x_{ki}), \Psi^*(x_{ij}), \Psi^*(x'_{3ij}) \in \mathbb{C}[G]^V$ für $i, j = 1, \ldots, 5$, $l = 2, 3, 4, 5$ und $k = 3, 5$.

Lemma 6.13. *Die erweiterte Abbildung $\tilde{\Psi} : G \to \mathbb{C}^N$ mit $N = 5{\cdot}5{+}3{+}6{\cdot}25{+}2{\cdot}5$ gegeben durch*

$$g \mapsto (\Psi(g), x_{2ij}(g), x_{3i}(g), x_{5i}(g), x'_{ij}(g), x_{3ij}(g), x_{4ij}(g), x_{5ij}(g), x_{ij}(g))$$

trennt die V-Bahnen auf G.

Beweis. Auf U_0 trennt schon Ψ die V-Bahnen. Auf $G \setminus U_0 = \{a_1 = 0\}$ gilt für die restlichen Komponentenfunktionen von $\tilde{\Psi}$:

$$\begin{aligned}
x_{3i}(g) =& a_3 a_{i1} - a_2 a_{i2}\\
x_{5i}(g) =& a_5 a_{i1} - a_{i2}\\
x_{3ij}(g) =& a_{j1}^2 a_{i3} - a_{j1}a_{j2}a_{i2} + \frac{1}{2}a_{j2}^2 a_{i1}\\
x_{4ij}(g) =& a_{j1}^3 a_{i4} - a_{j1}^2 a_{j2}a_{i3} + \frac{1}{3}(2a_{j2}^2 - a_{j1}a_{j3})a_{j1}a_{i2} + \frac{1}{3}(a_{j1}a_{j3} - a_{j2}^2)a_{j2}a_{i1}\\
x_{5ij}(g) =& a_{j1}a_{i5} - a_2 a_{j1}a_{i3} - a_2 a_{j2}a_{i2} + (a_3 a_{j2} - a_4 a_{j1})a_{i1}
\end{aligned}$$

Falls $\tilde{\Psi}(g) = \tilde{\Psi}(g')$, so gilt $a_1 = a'_1$ und $a_{i1} = a'_{i1}$. Außerdem gibt es ein $j \in \{1, \ldots, 5\}$ mit $a_{j1} \neq 0$. Damit folgt $a_2 = a'_2 = -z_{j2}/z_{j1}$. Man kann annehmen, daß $g, g' \in \Pi \cap (G \setminus U_0)$. Falls $a_2 \neq 0$, so folgt wegen $a_3 = a'_3 = 0$ aus $x_{3i}(g) = x_{3i}(g')$ auch $a_{i2} = a'_{i2}$ für $i = 1, \ldots, 5$ und aus $x_{5j}(g) = x_{5j}(g')$ auch $a_5 = a'_5$. Falls $a_2 = 0$, so folgt wegen $a_5 = a'_5 = 0$ aus $x_{5i}(g) = x_{5i}(g')$ die Gleichung $a_{i2} = a'_{i2}$ für $i = 1, \ldots, 5$. Dann folgt mit Hilfe von $x_{3ij}, x_{4ij}, x_{5ij}$ für $i = 1, \ldots, 6$ auch $g = g'$. $\square$

Man rechnet nach, daß jeder Punkt $z \in \overline{\tilde{\Psi}(G)} = \overline{\tilde{\Psi}(U_0)} =: \tilde{Z}$ die Gleichungen

$$x_{2ij}z_1 = z_{j1}z_{i2} - z_{j2}z_{i1} \tag{21}$$
$$x_{3i}z_1 = z_{i3} + z_3z_{i1} \tag{22}$$
$$x_{5i}z_1 = z_5z_{i1} - z_{i2} - z_{i5} \tag{23}$$
$$x'_{3ij}z_1 = z_{j1}z_{i3} - \frac{1}{2}z_{j2}z_{i2} \tag{24}$$
$$x_{3ij}z_1 = z_{j1}x'_{3ij} - \frac{1}{2}z_{j2}x_{2ij} \tag{25}$$
$$x_{4ij}z_1^3 = z_{j1}^3z_{i4} - \frac{1}{3}z_{j1}^2z_{j2}z_{i3} - \frac{1}{3}z_1z_{j1}z_{j3}x_{2ij} - \frac{2}{3}z_1^2z_{j2}x_{3ij} \tag{26}$$
$$x_{5ij}z_1^2 = z_{j1}z_{i5} - 2z_{j1}z_{i4} + z_1z_{j2}x_{3i} \tag{27}$$
$$x_{ij}z_1 = z_{j1}z_{i5} - z_{j5}z_{i1}, \tag{28}$$

für $i, j = 1, \dots, 5$, die sich aus der Definition der neuen Invarianten x_{2ij}, x'_{3ij}, x_{3ij}, x_{3i}, x_{5i}, x_{4ij}, x_{5ij}, x_{ij} ergeben, die Kompatibilitätsgleichungen

$$x_{2ij}z_{k2} + x_{2jk}z_{i2} + x_{2ki}z_{j2} = 0 \tag{29}$$
$$x_{ij}z_{k2} + x_{jk}z_{i2} + x_{ki}z_{j2} = 0 \tag{30}$$
$$x_{3i}z_{j1} - x_{3j}z_{i1} = x'_{3ij} - x'_{3ji} \tag{31}$$
$$x_{3ij}z_{k1}^2 - x_{3ik}z_{j1}^2 = -\frac{1}{2}x_{2jk}(x_{2ij}z_{k1} + x_{2ik}z_{j1}) \tag{32}$$
$$x_{5i}z_{j1} - x_{5j}z_{i1} = -z_1x_{ij} - x_{2ij} \tag{33}$$
$$x_{5ij}z_{k1} - x_{5ik}z_{j1} = x_{3i}x_{2jk} \tag{34}$$
$$\begin{aligned} x_{4ij}z_{k1}^3 - x_{4ik}z_{j1}^3 = {} & \frac{1}{3}z_{k1}z_{j1}(x_{2ik}x_{3kj} - x_{2ij}x_{3jk}) \\ & -\frac{1}{2}(z_{j1}^2x_{3ik} + z_{k1}^2x_{3ij})x_{2jk} - \frac{1}{12}z_{i1}x_{2jk}^3 \end{aligned} \tag{35}$$

für $i, j, k = 1, \dots, 5$ und die Determinantenbedingungen

$$\det(z_{ij})_{i,j=1,\dots,5} = z_1^8 \tag{36}$$
$$\det(z_{i1}, x_{3i}, x_{3ij}.x_{4ij}, x_{5ij})_{i=1,\dots,5} = -z_{j1}^5z_{j2} \tag{37}$$
$$\det(z_{i1}, x_{5i}, x_{3ij}.x_{4ij}, x_{5ij})_{i=1,\dots,5} = z_{j1}^6 + \frac{1}{3}z_{j1}^4z_{j2} - \frac{2}{3}z_{j1}^5z_{j3} \tag{38}$$

für $j = 1, \dots, 5$ erfüllt.

Wenn man beachtet, daß aus $z_1 = 0$, $z_3 \neq 0$ und den Gleichungen 22 und 24 folgt, daß es ein $j \in \{1, \dots, 5\}$ mit $z_{j1}z_{j2} \neq 0$ gibt, und aus $z_1 = z_3 = 0$ auch $z_{j2} = z_{j3} = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, 5\}$ folgt, kann man schießen, daß das Bild $\tilde{\Psi}(G)$ die nichtsinguläre offene Menge $\cup_{j=1}^5\{z_{j1} \neq 0\}$ enthält, deren Komplement in $\tilde{Z}$ von Kodimension > 2 ist. Weiterhin ist die Abbildung $\tilde{\Psi}$ nicht surjektiv, denn $\tilde{Z} \cap \{z_{11} = \ldots = z_{51} = 0\}$ ist nicht leer und diskjunkt zu $\tilde{\Psi}(G)$. So kann man wie im vorherigen Beispiel schließen, daß G/V nicht steinsch ist.

6.3 Gemischte Methode

Die Quotientenbildung auf der Zariski-offenen Teilmenge U_0 in Abschnitt 6.2.2 liefert schon viele V-invariante Funktionen auf U bzw. G. Die Wirkung der Gruppe G auf $\mathbb{C}[G]$ wird genutzt, um weitere V-Invarianten zu finden.

In Abschnitt 6.2.2 konstruiert man die Abbildung

$$\Psi : G \to Z = \{\det(z_{ij}) = f(z_1, \dots, z_n)\} \subset \mathbb{C}^{n^2+n-m}.$$

Aus der Konstruktion der Abbildung Ψ folgt, daß die Komponentenfunktionen z_{ij} von Ψ die Form

$$z_{ij}(a) = \sum_{k \leq j} f_{kj}(a_1, \dots, a_n) a_{ik}$$

haben, wobei f_{kj} Polynome in $a_1, \dots, a_n$ und f_{jj} sogar Polynome in linearen Invarianten $z_j(a) = a_j$ mit $j = 1, \dots, l$ sind, also Nenner der Quotientenabbildung $U_0 \to U_0/V$. Für $j \leq l$ gilt $z_{ij}(a) = a_{ij}$. Damit sind z_{ij} für $j \leq l$ lineare Invarianten.

Die Gruppe G wirkt von rechts auf $\mathbb{C}[G]$ durch $f.g(h) := f(gh)$. Da die Wirkung von G algebraisch ist, gibt es einen endlichdimensionalen G-invarianten Vektorraum W, der $\langle z_1, \dots, z_n, z_{i1}, \dots, z_{in} \,|\, i = 1, \dots, n\rangle_{\mathbb{C}}$ enthält. Der Vektorraum W enthält nur V-Invarianten, also $W \subset \mathbb{C}[G]^V$, denn die Wirkungen von G und V auf G kommutieren.

Man betrachtet nun die Auswertungabbildung $G \to W^*$, die einem Element $g \in G$ das lineare Funktional $f \mapsto f(g)$ zuordnet. Diese Auswertungsabbildung wird wieder mit $\tilde{\Psi}$ bezeichnet, denn sie ist eine Quotientenabbildung für die V-Wirkung auf G.

Lemma 6.14. *Der geometrische Quotient G/V ist isomorph zum Bild $\tilde{\Psi}(G)$ der Auswertungsabbildung $\tilde{\Psi}$.*

Beweis. Die Abbildung $\tilde{\Psi}$ ist V-invariant, denn W enthält nur V-invariante Funktionen. Weiterhin wirkt die Gruppe G in natürlicher Weise auf W^* als Untervektorraum von $\mathbb{C}[W]$ durch $(g.F)(f) = F(f.g)$ mit $F \in W^*$, $g \in G$ und $f \in W$. Die Abbildung $\tilde{\Psi}$ ist G-äquivariant, denn $\tilde{\Psi}(hg)(f) = f(hg) = (f.h)(g) = \tilde{\Psi}(g)(f.h) = (h.\tilde{\Psi}(g))(f)$.

Da W die Komponentenfunktionen von Ψ enthält, trennt $\tilde{\Psi}$ auf U_0 die V-Bahnen. Wegen der G-Äquivarianz von $\tilde{\Psi}$ folgt nun aus $\tilde{\Psi}(g) = \tilde{\Psi}(g')$ auch $\tilde{\Psi}(hg) = \tilde{\Psi}(hg')$ für alle $h \in G$. Da G transitiv auf sich selbst wirkt, trennt $\tilde{\Psi}$ die V-Bahnen auf G. Die Abbildung $\tilde{\Psi}(G) \to G/V$ ist G-äquivariant und damit ein Isomorphismus. □

Die Aufblasungmethode kann man als Versuch verstehen, das Komplement von $\tilde{\Psi}(G)$ zu minimieren. Die Sichtweise der gemischte Methode, also die Ausnutzung der G-Wirkung auf V-invariante Funktionen und der Existenz einer trivialen Quotientenabbildung der V-Wirkung auf einer Zariski-offenen Menge, eröffnet eine Möglichkeit, das Bild $\tilde{\Psi}(G)$ zu beschreiben. Dafür ist die besondere

Form der Funktionen in W wichtig. Es gilt

$$z_{ij}.g(a) = z_{ij}(ga) = \sum_{k\leq j} f_{kj}(\sum_{r=1}^{n} g_r a_{r1} + a_1, \ldots, \sum_{l=1}^{n} g_r a_{rn} + a_n)(\sum_{r=1}^{n} g_{ir} a_{rk}). \quad (39)$$

Man erhält sofort mit Hilfe der rationalen Schnitte $a_{ij} = z_{ij}/f_{jj}(z_1, \ldots, z_l)$ wie in Lemma 6.5 und der Gleichung 39 einige Gleichungen, die die Untervarietät $\overline{\tilde{\Psi}(G)} \subset \mathbb{C}^N$ definieren. Wenn $\tilde{\Psi}(a) = z$, so sind $a_{ij} = z_{ij}$ mit $i = 0, \ldots, n$ und $j \leq l$, und der Koeffizient vor $g_{r_1} \ldots g_{r_n} g_{ir} a_{rj}$ in Gleichung 39 ist ein Produkt aus linearen Invarianten. Die Bestimmung eines Urbildes der Abbildung $\tilde{\Psi}$ ist also nur wenig schwieriger als die Lösung eines linearen Gleichungssystems. In den Beispielen in Abschnitt 6.2.4 werden irreduzible Faktoren von Elementen aus W, die kein Erzeugendensystem bilden, benutzt, um die V-Bahnen zu trennen.

6.4 Lineare Invarianten und Semiinvarianten

Es sei $V \subset \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ eine zusammenhängende, unipotente Liegruppe, die die Matsushimabedingung erfüllt. Die V-Wirkung auf $U \cong \mathbb{C}^n$ induziert eine V-Wirkung auf $\mathbb{C}[U]$, die durch $(f.v)(z) = f(z.v^{-1})$ gegeben ist. Eine lineare Funktion $z \in \mathbb{C}[U]$ heißt *Semiinvariante*, falls es für jedes $v \in V$ eine von v abhängige Konstante $c(v)$ mit $z.v = z + c(v)1$ gibt. Aus der Gruppeneigenschaft folgt, daß c ein Homomorphismus $V \to \mathbb{C}$ ist. Falls $c = 0$, so ist die Semiinvariante eine lineare Invariante. Lineare Invariante und Semiinvariante sind Hilfsmittel, um die Quotientenbildung U/V zu vereinfachen, z.B. durch Verringerung der Dimension von U oder V.

Zu gegebener Semiinvariante z sei $U_z := \{z = 0\}$ und $V_z := \ker c$. Der Untervektorraum U_z ist isomorph zu $\mathbb{C}^{n-1}$ und V_z-invariant.

Lemma 6.15. *Es sei z eine Semiinvariante, die keine lineare Invariante ist. Wenn V kommutativ ist, so gilt $U/V \cong U_z/V_z$. Insbesondere existiert der Quotient U/V genau dann, wenn U_z/V_z existiert.*

Beweis. Da die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{v} \to V$ ein Diffeomorphismus ist, existiert eine zu V_z komplementäre Untergruppe $V_0 \subset V$. Der Homomorphismus c ist auf V_0 nichttrivial. Deshalb gilt $U/V_0 \cong \{z = 0\} = U_z$. Die Behauptung folgt mit $V/V_0 \cong V_z$ aus Satz 3.3.

Insbesondere liefert eine eindimensionale, zusammenhängende Untergruppe von V, die in U liegt, eine Semiinvariante. □

Lemma 6.16. *Wenn es eine lineare Invariante z gibt, dann existiert der Quotient U/V genau dann, wenn der Quotient U_z/V existiert, und es gilt $U/V \cong (U_z/V) \times \mathbb{C}$.*

Beweis. Es gilt $U = U_z \times \mathbb{C}$ und die V-Wirkung auf der zweiten Komponente ist trivial. □

Man kann Semiinvarianten und lineare Invarianten in der Liealgebra von V entdecken. In Kapitel 8 werden Repräsentanten von äquivalenten V-Wirkungen auf Liealgebraniveau bestimmt. Ein Element aus der Liealgebra von V wirkt als Element von $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \ltimes \mathbb{C}^n$ auf $\mathbb{C}[U]$.

Lemma 6.17. *Eine lineare Funktion z auf $\mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Invariante, wenn $\mathfrak{v}.z = \{0\}$ gilt.*

Beweis. Die Behauptung folgt mit Hilfe der Exponentialabbildung. $\square$

Falls V kommutativ ist, so ist c ein Homomorphismus von $\mathfrak{v}$ nach $\mathbb{C}$, also ein lineares Funktional auf $\mathfrak{v}$.

Lemma 6.18. *Sei V kommutativ. Eine lineare Funktion z auf $\mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Semiinvariante, wenn $\mathfrak{v}$ als additive Gruppe auf $W := \langle 1, z\rangle_{\mathbb{C}}$ wirkt.*

Beweis. Da $\mathfrak{v}$ nilpotent ist, ist z genau dann eine Semiinvariante, wenn gilt $\mathfrak{v}.W \subset \langle 1\rangle_{\mathbb{C}}$ und damit für $t, t' \in \mathfrak{v}$ mit $t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$, $t' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ folgt $A = B = 0$ und $t.z = -a1$, $t'.z = -b1$, $(t + t').z = -(a + b)1$. $\square$

Lemma 6.19. *Die V-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ besitzt höchstens $n - \dim V$ linear unabhängige, lineare Invarianten.*

Beweis. Die V-Invarianten spannen einen V-invarianten Untervektorraum von $\mathbb{C}[U]$ auf. Da die Wirkung von V auf $\mathbb{C}^n$ frei ist, müssen mehr als $n - \dim V$ Invarianten analytisch abhängig sein. Für lineare Invarianten erhält man aus Gradgründen lineare Abhängigkeit. $\square$

6.5 Projektionen und Erweiterungen

In diesem Abschnitt sei $V \subset \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ eine zusammenhängende, unipotente algebraische Untergruppe, die die Matsushimabedingung erfüllt. Die linearen Anteile der Elemente in V bilden eine Gruppe L_V. Eine *V-Fahne* sei eine Fahne $\{0\} = W_n \subset W_{n-1} \subset \ldots \subset W_1 \subset W_0 = \mathbb{C}^n$ von L_V-invarianten Untervektorräumen von $\mathbb{C}^n$. Zu einer V-Fahne gibt es eine *V-Basis* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von $\mathbb{C}^n$ mit $W_k = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, e_1^*(z) = \ldots = e_k^*(z) = 0\}$ für alle k.

Die Gruppe V wirkt nicht in natürlicher Weise affin auf die Untervektorräume W_k. Sie induziert aber eine Wirkung auf deren Komplemente $W_k^K = \langle e_1, \ldots, e_k\rangle_{\mathbb{C}}$ durch $z.v := \pi_k(zL_v + T_v)$, wobei $v = L_v + T_v$ die Zerlgung von v in Linear- und Translationsanteil und $\pi_k : \mathbb{C}^n \to W_k^K$ die Projektion auf den Untervektorraum W_k^K ist.

Die V-Wirkung auf $W_n^K = \mathbb{C}^n$ heißt *Erweiterung* der V-Wirkung auf W_k^K, falls V auf W_k^K die Matsushimabedingung erfüllt, also frei wirkt. Die V-Wirkung auf W_k^K heißt dann auch *Projektion* der V-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$.

Satz 6.20. *Die V-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ sei eine Erweiterung einer V-Wirkung auf W_k^K. Wenn der Quotient W_k^K/V existiert, so existiert $\mathbb{C}^n/V$. Wenn W_k^K/V affin ist, dann ist $\mathbb{C}^n/V$ affin.*

Beweis. Es gilt $\mathbb{C}^n = W_k^K \oplus W_k$. Die Projektion $\pi_k : \mathbb{C}^n \to W_k^K$ ist V-äquivariant, denn $w_k L_v \in W_k$ und $\pi_k((z+w_k).v) = \pi_k((z+w_k)L_v + T_v) = \pi_k(zL_v + T_v + w_k L_v) = \pi_k(z.v)$ für alle $w_k \in W_k$, $z \in \mathbb{C}^n$, $v \in V$.

Es bezeichne nun W_k^K/V den geometrischen Quotienten der V-Wirkung auf W_k^K und $\Psi : W_k^K \to W_k^K/V$ die Quotientenabbildung. Da V frei auf W_k^K wirkt, ist $(W_k^K/V) \times W_k$ mit der Abbildung $z \mapsto (\Psi(\pi_k(z)), z - \pi_k(z))$ der geometrische Quotient der V-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$.

$$\begin{tikzcd}
W_k^K \oplus W_k = \mathbb{C}^n \arrow[r] \arrow[d, "\pi_k"] & \mathbb{C}^n/V \arrow[d] \\
W_k^K \arrow[r, "\Psi"'] & W_k^K/V
\end{tikzcd}$$

□

Falls die V-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ eine triviale Erweiterung der V-Wirkung auf W_k^K ist, also $\pi_k(z.v) = z.v$ für alle $z \in W_k^K$, so erhält man wie in Lemma 6.16 $W_k^K/V \times \mathbb{C}^{n-k} \cong \mathbb{C}^n/V$.

7 Affine $\mathbb{C}^2$-Wirkungen

Ist die Untergruppe V eindimensional, so folgt aus der Matsushimabedingung bereits, daß G/V und U/V affin sind (siehe Satz 5.3 und [4]). Darüber hinaus ist U/V sogar isomorph zu $\mathbb{C}^{n-1}$.

Ein Beispiel von Winkelmann [26] zeigt, daß es eine zweidimensionale, unipotente, algebraische Untergruppe von $\mathrm{Sl}_6(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^6$ gibt, so daß der Quotient $\mathbb{C}^6/V$ hausdorffsch, aber nicht affin ist. Außerdem gibt es eine freie, affine, algebraische $\mathbb{C}^2$-Wirkung auf $\mathbb{C}^5$, deren Quotient nicht hausdorffsch ist. Es treten also schon für zweidimensionale V viele Phänomene auf. Falls $\dim V = 2$, so ist V als Gruppe isomorph zu $(\mathbb{C}^2, +)$.

In diesem Abschnitt werden die affinen, freien $\mathbb{C}^2$-Wirkungen auf $\mathbb{C}^n$, die nicht wegen Lemma 6.15 und Satz 5.3 schon affine Quotienten besitzen, durch eine konstruierbare Menge $X(2,n)$ parametrisiert, auf der eine Gruppe H wirkt, die Basiswechsel in V und $\mathbb{C}^n$ widerspiegelt, so daß alle Wirkungen in einer H-Bahn äquivalent sind.

Es wird sich herausstellen, daß es für jedes gerade $n \geq 6$ eine offene H-Bahn von Wirkungen gibt, deren Quotienten nicht hausdorffsch sind.

7.1 Definition des Parameterraumes $X(2,n)$

Lemma 7.1. *Es sei $V \subset Sl_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$, $V \cong (\mathbb{C}^2, +)$. Wenn V die Matsushimabedingung erfüllt und eine Semiinvariante besitzt, die keine Invariante ist, dann ist der geometrische Quotient $\mathbb{C}^n/V$ affin und isomorph zu $\mathbb{C}^{n-2}$.*

Beweis. Die Gruppe V ist kommutativ. Es bezeichne z die Semiinvariante. Aus Lemma 6.15 folgt, daß $\mathbb{C}^n/V$ isomorph zu U_z/V_z ist. Dabei ist $V_z \cong (\mathbb{C}, +)$ und wirkt frei und affin auf $U_z \cong \mathbb{C}^{n-1}$. Also ist $U_z/V_z \cong \mathbb{C}^{n-2}$. $\square$

Der *Parameterraum* $X(2,n)$ sei die Menge aller zweidimensionalen, unipotenten, algebraischen Untergruppen V von $G = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$, die die Matsushimabedingung erfüllen und die Eigenschaft haben, daß jede Semiinvariante der V-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ sogar eine Invariante ist.

Eine unipotente, algebraische Untergruppe V von $G = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ ist durch ihre Liealgebra $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$ eindeutig bestimmt. Da V zweidimensional ist, muß V kommutativ sein. Damit ist der Parameterraum $X(2,n)$ eine Teilmenge der durch die Nilpotenzbedingung $\{\mathfrak{v}^{n+1} = 0\}$ definierten Untervarietät der Graßmannschen $Gr(2, \mathfrak{g})$.

Lemma 7.2. *Der Parameterraum $X(2,n)$ ist eine konstruierbare Menge in der Graßmannschen $Gr(2, \mathfrak{g})$.*

Beweis. Die Menge der kommutativen, unipotenten $\mathfrak{v}$ ist abgeschlossen in der Graßmannschen $Gr(2, \mathfrak{g})$. Deshalb genügt es zu zeigen, daß die Menge der $\mathfrak{v}$, die die Matsushimabedingung erfüllen und V-Wirkungen ohne nichttriviale Semiinvarianten auf $\mathbb{C}^n$ induzieren, eine konstruierbare Menge in $Gr(2, \mathfrak{g})$ ist. Es gilt $Gr(2, \mathfrak{g}) \cong \mathrm{Sl}(\mathfrak{g})/\mathrm{Sl}(2, \mathfrak{g})$. Bilder konstruierbarer Mengen sind konstruierbar. Der endliche Durchschnitt von konstruierbaren Mengen ist wieder konstruierbar. Deshalb reicht es aus zu beweisen, daß die Menge X_M aller $M \in \mathrm{Sl}(\mathfrak{g})$, die die Matsushimabedingung erfüllen, und die Menge X_{IS} aller $M \in \mathrm{Sl}(\mathfrak{g})$, die keine nichttrivialen Semiinvarianten besitzt, konstruierbar sind.

Die Matrix M repräsentiert eine zweidimensionale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die durch $M_1 := M(e_1)$ und $M_2 := M(e_2)$ erzeugt ist, wobei $\{e_1, e_2\}$ zu einer Basis von $\mathfrak{g}$ erweitert werden kann.

Zur Untersuchung von X_M betrachtet man $z.M_1, z.M_2 \in \mathbb{C}^n$ mit $z \in \mathbb{C}^n$. Die Matsushimabedingung ist erfüllt, wenn $z.M_1$ und $z.M_2$ für alle z linear unabhängig sind, es also für jedes $z \in \mathbb{C}^n$ mindestens eine nichtsinguläre 2×2-Untermatrix $A_{ij}(z, M)$ von $\left(\begin{smallmatrix} z.M_1 \\ z.M_2 \end{smallmatrix}\right)$ gibt. Die Menge

$$X := \{(z, M) \in \mathbb{C}^n \times \mathrm{Sl}(\mathfrak{g}) \,|\, \det(A_{ij}(z, M)) = 0 \ \forall i \neq j = 1, \dots, n\}$$

ist affin. Mit dem Bild von X unter der Projektion $\mathbb{C}^n \times \mathrm{Sl}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Sl}(\mathfrak{g})$ ist auch das Komplement des Bildes, also X_M, konstruierbar.

Zur Untersuchung von X_{IS} betrachtet man die Beschreibung des Vektorraumes der linearen Invarianten und der Semiinvarianten in Abhängigkeit von $M \in \mathrm{Sl}(\mathfrak{g})$

$$X_I := \{(f, M) \in (\mathbb{C}^n)^* \times \mathrm{Sl}(\mathfrak{g}) \,|\, 0 = M_1.f = M_2.f\}$$
$$X_S := \{(\alpha_1, \alpha_2, f, M) \in \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^n)^* \times \mathrm{Sl}(\mathfrak{g}) \,|\, \alpha_i 1 = M_i.f \ i = 1, 2\}$$

und die Projektionen $\pi_I : X_I \to \mathrm{Sl}(\mathfrak{g})$ und $\pi_S : X_S \to \mathrm{Sl}(\mathfrak{g})$. Es gilt $X_{IS} = \{M \in \mathrm{Sl}(\mathfrak{g}) \,|\, \dim \pi_I^{-1}(M) = \dim \pi_S^{-1}(M)\}$. Wegen der oberen Halbstetigkeit der Faserdimension von Morphismen ist X_{IS} konstruierbar. $\square$

Der Normalisator H von G in $\mathrm{Sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ wirkt durch Konjugation auf G und definiert eine Äquivalenzrelation zwischen Untergruppen von G. Die Gruppe H wirkt durch Konjugation auf Elemente des Parameterraumes $X(2,n)$, da die definierenden Bedingungen von $X(2,n)$ H-invariant sind. Die H-Bahnen auf $X(2,n)$ haben im allgemeinen verschiedene Dimensionen.

Da beim Übergang zum Rand einer H-Bahn aus einer Semiinvarianten eine Invariante werden kann, ist die Invariantenbedingung weder offen noch abgeschlossen auf dieser Untervarietät. Das folgende Beispiel zeigt, daß auch die Matsushimabedingung so verhält:

Es sei

$$\mathfrak{v}_{\alpha,\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha t_1 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Für $\alpha, \beta \neq 0$ und für $\alpha = \beta = 0$ ist die Matsushimabedingung erfüllt, für $\alpha = 0$ und $\beta \neq 0$ jedoch nicht.

Der Parameterraum $X(2,n)$ ist nur für $n \geq 4$ nicht leer. Für $n = 4$ besteht er aus nur einer H-Bahn (siehe Abschnitt 8.2). Für $n = 5$ besteht der Raum $X(2,5)$ aus endlich vielen H-Bahnen, ist reduzibel aber zusammenhängend (siehe Abschnitt 8.3). Im allgemeinen ist $X(2,n)$ reduzibel und besteht wie $X(2,6)$ aus unendlich vielen H-Bahnen (siehe Abschnitt 8.4). Es bleibt eine offene Frage, ob der Raum $X(2,n)$ für beliebige $n \geq 6$ zusammenhängend ist.

7.2 Maximale Bahnen

In der Definition des Parameterraumes $X(2,n)$ wurde die Nilpotenz von $\mathfrak{v}$ gefordert, d.h. $\mathfrak{v}^{n+1} = 0$. Also gibt es eine Fahne $W_0 = \langle e_0 \rangle \subset W_1 \subset \ldots \subset W_n = \mathbb{C}^{n+1}$ von $\mathfrak{v}$-invarianten Teilräumen mit der Eigenschaft $\mathfrak{v}(W_k) \subset W_{k-1}$. Durch Ausnutzung der Matsushimabedingung und der Tatsache, daß für Wirkungen in $X(2,n)$ jede Semiinvariante schon Invariante ist, wird diese Beschreibung in diesem Abschnitt zu $\mathfrak{v}^{n-1} = 0$ verbessert. Dann kann man die Bahnen in der offenen Menge $\{\mathfrak{v}^{n-2} \neq 0\}$ bestimmen.

Satz 7.3. *Für alle $\mathfrak{v} \in X(2,n)$ gilt $\mathfrak{v}^n = 0$.*

Beweis. Es gilt $\mathfrak{v}(W_1) = 0$, da jede lineare Semiinvariante auch Invariante ist. □

Satz 7.4. *Für alle $\mathfrak{v} \in X(2,n)$ gilt $v^{n-1} = 0$.*

Beweis. Falls $\mathfrak{v}^{n-1} \neq 0$ ist, so muß jede der Projektionen $\mathfrak{v}(W_k) \to W_{k-1}/W_{k-2}$ für $k \geq 2$ verschieden von 0 sein. Bezüglich einer geeigneten Basis hat $\mathfrak{v}$ dann die Form:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & t_1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & t_1 & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}$$

Damit ist die Matsushimabedingung nicht erfüllt. □

Satz 7.5. *Die Menge $\{\mathfrak{v}^{n-2} \neq 0\} \subset X(2,n)$ enthält für $n > 4$ genau zwei H-Bahnen $H.\mathfrak{v}_{1,n}$ und $H.\mathfrak{v}_{0,n}$. Die Wirkung der Repräsentanten $\mathfrak{v}_{1,n}$ und $\mathfrak{v}_{1,n}$ auf $\mathbb{C}^n$ ist durch*

$$\mathfrak{v}_{1,n}(t_1,t_2)(a) = (0, t_2a_1 + t_1, t_1a_1, t_1a_{j-1}, t_1a_{n-1} + t_2)$$
$$\mathfrak{v}_{0,n}(t_1,t_2)(a) = (0, t_2a_1 + t_1, t_1a_1, t_1a_{j-1}, t_1a_{n-2} + t_2, t_1a_{n-1} + t_2a_2)$$

gegeben.

Beweis. Es gibt ein $X \in \mathfrak{v}$ mit $X^{n-2} \neq 0$ und genau ein $2 \leq m \leq n$ mit $X(W_m) \subset W_{m-2}$. Man kann annehmen, daß jede der Projektionen $X(W_{m+1}) \to W_{m-1}/W_{m-2}$ und $X(W_k) \to W_{k-1}/W_{k-2}$ für $2 \leq k \leq m-1$ und $m+2 \leq k \leq n$ verschieden von 0 ist.

Mit den Bezeichnungen $\mathfrak{v} = \{t_1X + t_2Y \mid t_1, t_2 \in \mathbb{C}\}$, $X = (a_{ij})$, $Y = (b_{ij})$ mit $i,j = 0,\dots,n$ gilt bei Wahl einer mit der Fahne W_k verträglichen Basis $a_{ij} = b_{ij} = 0$ für $i \geq j$ oder $j = 0,1$, $a_{ii+1} = 1$ und $b_{ii+1} = 0$ für $i = 1,\dots,m-2$ und $a_{m-1m} = b_{m-1m} = 0$. Durch einen weiteren mit den W_k verträglichen Basiswechsel kann man $a_{ij} = 0$ für $i = 0,\dots,m-3$ und $i+2 \leq j \leq m$ erreichen.

Die Kommutativität von $\mathfrak{v}$ liefert die Kommutatorgleichungen $[X,Y]_{ij} =: K(i,j) = 0$. Mit $j = m$ und $i = m-3,\dots,1$ erhält man aus diesen $b_{im} = 0$ für $i = m-2,\dots,2$. Dies bedeutet, daß man $m = 2$ annehmen kann.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & * & b_{03}t_2 & b_{04}t_2 & \dots & b_{0n}t_2 \\ & 0 & t_2 & t_1 & b_{14}t_2 & \dots & b_{1n}t_2 \\ & & 0 & * & * & \dots & * \\ & & & 0 & t_1 & \dots & b_{3n}t_2 \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & t_1 \\ & & & & & & 0 \end{matrix}$$

Aus der Matsushimabedingung folgt $a_{02} \neq 0$. Wegen $K(0,3) = K(1,3) = 0$ gilt $a_{23} = b_{23} = 0$. Nun folgt wieder aus der Matsushimabedingung $b_{03} = 0$ und dann $b_{02} = 0$. Ein Basiswechsel liefert $b_{1j} = 0$ für $j = 4,\dots,n$.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & t_1 & 0 & b_{04}t_2 & \dots & b_{0n}t_2 \\ & 0 & t_2 & t_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & 0 & * & \dots & * \\ & & & 0 & t_1 & \dots & b_{3n}t_2 \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & t_1 \\ & & & & & & 0 \end{matrix}$$

Aus $K(2,k) = 0$ folgt $a_{2k} = b_{3k}$ für alle $k = 4,\dots,n$. Außerdem ist $0 = K(i,k) = \sum_{j=0}^{n} b_{ij}a_{jk} - a_{ij}b_{jk} = b_{ik-1} - b_{i+1k}$, also $b_{ik-1} = b_{i+1k}$ für $i = 3,\dots,n-2$ und $i+3 \leq k \leq n$.

Nun wird durch vollständige Induktion gezeigt, daß $b_{0k} = 0$ für $k \leq n-2$ und $a_{2k} = b_{2k} = 0$ für $k \leq n-1$ gilt:

- Induktionsanfang: Es gilt $b_{0k} = 0$ für $k \leq 3$ und $a_{2k} = b_{2k} = 0$ für $k \leq 4$, da aus $K(0,4) = K(1,4)$ auch $a_{24} = b_{24} = 0$.

- Induktionsschritt: Die zu beweisende Behauptung gilt für $k = m$. Durch Auswertung der Kommutatorgleichungen $K(i,j) = 0$ mit $i = 0$, $j = m+2$ und $i = 2$, $j = m+3$ erhält man $b_{2m+2} = b_{0m+1}$ und $b_{2m+2} = b_{m+2m+3} = 0$. Weiterhin gilt $a_{2m+2} = b_{3m+2} = b_{3+km+2+k}$ und $b_{ij} = 0$ für $j-i \leq m-2$. Aus der Matsushimabedingung folgt nun $a_{2m+2} = 0$.

Jetzt kann man folgende Fälle unterscheiden:

1. $b_{0n-1} = 0$: Aus $K(0,n) = 0$ folgt $b_{2n} = 0$. Dann liefert die Matsushimabedingung $b_{3n} = 0$ und damit $a_{2n} = 0$. Durch Konjugation mit einer Diagonalmatrix erhält man die affine Wirkung von $\mathfrak{v}$ auf $\mathbb{C}^n$ gegeben durch

$$\mathfrak{v}_{1,n}(t_1,t_2)(a) = (0, t_2a_1 + t_1, t_1a_1, t_1a_{j-1}, t_1a_{n-1} + t_2)$$

   mit $j = 4, \ldots, n-1$.

2. $b_{0n-1} \neq 0$: Für $n = 4$ ergibt sich ein Widerspruch zur Matsushimabedingung. Für $n \geq 5$ führt ein Basiswechsel zu der affinen Wirkung

$$\mathfrak{v}_{0,n}(t_1,t_2)(a) = (0, t_2a_1 + t_1, t_1a_1, t_1a_{j-1}, t_1a_{n-2} + t_2, t_1a_{n-1} + t_2a_2)$$

   mit $j = 4, \ldots, n-2$.

$\square$

7.3 Projektionen und Entartungen

Im Abschnitt 7.2 wurde hergeleitet, daß die offene Menge $\{\mathfrak{v}^{n-2} \neq 0\} \subset X(2,n)$ aus genau den zwei H-Bahnen $H.\mathfrak{v}_{1,n}$ und $H.\mathfrak{v}_{0,n}$ besteht. In Satz 7.8 wird gezeigt, daß $\mathfrak{v}_{1,n}$ im Abschluß der H-Bahn durch $\mathfrak{v}_{0,n}$ liegt. Offensichtlich ist $\mathfrak{v}_{1,n-1}$ die Projektion von $\mathfrak{v}_{0,n}$ auf $\mathbb{C}^{n-1} = \{a_n = 0\}$. In diesem Abschnitt werden Repräsentanten der H-Bahnen im Abschluß der H-Bahn durch $\mathfrak{v}_{0,n}$ beschrieben, die eine Erweiterung von $\mathfrak{v}_{1,n-1}$ sind. Im folgenden Bahnenraumdiagramm, das nicht vollständig ist, bedeutet $A \to B$, daß B im Abschluß der H-Bahn durch A liegt.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{v}_{0,n} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \mathfrak{v}_{1,n} & \mathfrak{v}_\beta & \mathfrak{v}_{1,n-1} \end{tikzcd}$$

Die Quotienten der durch $\mathfrak{v}_{0,n}$ und $\mathfrak{v}_\beta$ in $X(2,n)$ gegebenen Wirkungen von $\exp(\mathfrak{v}_{0,n})$ und $\exp(\mathfrak{v}_\beta)$ auf $\mathbb{C}^n$ lassen sich auf den Quotienten der $\exp(\mathfrak{v}_{1,n-1})$-Wirkung auf $\mathbb{C}^{n-1}$ zurückführen.

Lemma 7.6. *Jede Erweiterung von $\mathfrak{v}_{1,n-1} \in X(2, n-1)$ zu einem Element in $X(2,n)$ ist äquivalent zu $\mathfrak{v}_{0,n}$, der trivialen Erweiterung oder einem $\mathfrak{v}_\beta$ mit $\mathfrak{v}_\beta(t_1, t_2)(a) = (0, t_2 a_1 + t_1, t_1 a_1, \dots, t_1 a_{n-2} + t_2, \beta t_2 + t_1 a_2 + t_2 a_3)$ mit $\beta \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Mit den im Abschnitt 7.2 eingeführten Bezeichnungen gilt für ein $\mathfrak{v}$, das verschieden von $\mathfrak{v}_{0,n}$ und der trivialen Erweiterung ist, $a_{in} = 0$ für $i = 3, \dots, n-1$ und $b_{n-1,n} = a_{1,n} = b_{1,n} = 0$. Aus $K(i,n) = 0$ für $i = n-3, \dots, 3$ folgt $b_{i,n} = 0$ für $i = n-2, \dots, 4$. Wegen $K(0,n) = 0$ gilt $b_{2n} = 0$ und wegen $K(1,n) = 0$ auch $a_{2,n} = b_{3,n}$. Da es keine nichttrivialen Semiinvarianten gibt, gilt $a_{2,n} \neq 0$. Mit Hilfe eines Basiswechsels erhält man $\mathfrak{v}_\beta(t_1,t_2)(a)_n = t_1 a_2 + t_2 a_3 + \beta t_2$. $\square$

Lemma 7.7. *Wenn $n = 5$ ist, so liegen alle $\mathfrak{v}_\beta$ in einer H-Bahn.*

Beweis. Durch den Basiswechsel $\{e_0, e_1, \dots, e_5\} \to \{e_1, e_2 + ae_3 + be_0, e_3 + ce_0, e_4, e_5 + de_4\}$ verändert sich $\mathfrak{v}_\beta$ in

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 - ct_1 & (\beta+d-c)t_2 + (ca-cd-b)t_1 \\ 0 & 0 & t_2 + at_1 & t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 + (d-a)t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $c = -a$, $d = 2a$, $b = a^2$, $a = -\beta/3$ und $Y' = Y + aX$ erhält man $\mathfrak{v}_0$. $\square$

Die Punkte $\mathfrak{v}_\beta \in X(2,n)$ liegen in der abgeschlossenen Menge $\{\mathfrak{v}^{n-2} = 0\}$. Nicht alle $\mathfrak{v}_\beta \in X(2,6)$ liegen in einer H-Bahn. Die Repräsentanten $\mathfrak{v}_\beta$ liefern eine kontinuierliche Familie von nicht äquivalenten $\mathbb{C}^2$-Wirkungen auf $\mathbb{C}^6$ (siehe Lemma 8.15).

Satz 7.8. *Es gilt $\mathfrak{v}_{1,n} \in \overline{H.\mathfrak{v}_{0,n}}$.*

Beweis. Es wird gezeigt, daß es ein Element $h \in H$ und eine zu $\mathbb{C}^*$ isomorphe Untergruppe $\{\lambda\}$ von H mit $\lim_{\lambda \to 0} \lambda.h.\mathfrak{v}_{0,n} = \mathfrak{v}_{1,n}$ gibt. Die Transformation h präsentiert den Basiswechsel $(e_0, e_1, \dots, e_n) \to (e_0, e_1, e_2 - e_0, e_3, \dots, e_n)$. Die Untergruppe $\{\lambda\}$ ist durch die Diagonalmatrixen $\operatorname{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_0 = \lambda^2$, $\lambda_1 = \lambda^{n-1}$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_k = \lambda_1 \lambda_0^{2-k} = \lambda^{n+3-2k}$ für $k = 3, \dots, n$ gegeben.

Die von 0 verschiedenen Einträge von $h.\mathfrak{v}_{0,n}$ lauten $a_{02} = a_{13} = a_{kk+1} = 1$ für $k = 3, \dots, n-1$ und $b_{12} = b_{0n-1} = b_{0n} = b_{2n} = 1$. Allgemein gilt für Diagonalmatrizen $\lambda.(\alpha_{ij}) = (\lambda_i^{-1} \lambda_j a_{ij})$. Es gilt hier $\lambda_0^{-1} \lambda_2 = \lambda_0^{-1}$, $\lambda_1^{-1} \lambda_3 = \lambda_0^{-1}$, $\lambda_k^{-1} \lambda_{k+1} = \lambda_0^{-1}$ und $\lambda_0^{-1} \lambda_n = \lambda_1 \lambda_0^{1-n} = \lambda^{1-n} = \lambda_1^{-1} \lambda_2$ und $\lambda_0^{-1} \lambda_{n-1} = \lambda^{2-n} = \lambda_2^{-1} \lambda_n$. $\square$

Dies bedeutet, daß die Bahn $H.\mathfrak{v}_{0,n}$ nicht im Abschluß einer anderen H-Bahn liegt. Da die Menge $\{\mathfrak{v}^{n-2} \neq 0\}$ in $X(2,n)$ offen ist und nur zwei H-Bahnen enthält, gilt:

Folgerung 7.9. *Die H-Bahn durch $\mathfrak{v}_{0,n}$ ist eine offene Bahn in $X(2,n)$.*

Lemma 7.10. *Es gilt $\mathfrak{v}_\beta \in \overline{H.\mathfrak{v}_{0,n}}$.*

Beweis. Es sei h_λ die zum Basiswechsel

$$\{e_0, e_1, \dots, e_n\} \mapsto \{e_0, e_1, e_2 - \frac{1}{\lambda}e_3 - \frac{\beta}{\lambda}e_0, e_3, \dots, e_{n-2}, e_{n-1} + \frac{1}{\lambda}e_0, \lambda e_n + \frac{\beta}{\lambda}e_0\}$$

gehörende Transformation. Dann gilt $\lim_{\lambda\to 0} h_\lambda.\mathfrak{v}_{0,n} = \mathfrak{v}_\beta$. $\square$

Da $\exp(\mathfrak{v}_{0,n+1})$ und $\exp(\mathfrak{v}_\beta)$ Erweiterungen von $\exp(\mathfrak{v}_{1,n})$ sind, werden in den Abschnitten 7.4 und 7.5 zuerst die Quotienten der $\exp(\mathfrak{v}_{1,n})$-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ untersucht, um dann die Quotienten einer generischen Wirkung in $X(2,n)$ bestimmen zu können. Dabei ist zu beachten, daß die H-Bahn durch $\mathfrak{v}_{0,n}$ nur offen in der irreduziblen Komponente $\overline{\{\mathfrak{v}^{n-2} \neq 0\}} \subset X(2,n)$ aber nicht unbedingt offen in $X(2,n)$ ist.

7.4 Affine Quotienten

Satz 7.11. *Falls $n \geq 4$ gerade ist, so ist der zu $V = \exp \mathfrak{v}_{1,n}$ gehörende Quotient $\mathbb{C}^n/V$ affin und isomorph zu $\mathbb{C}^{n-2}$.*

Beweis. Es wird zuerst gezeigt, daß es einen globalen Schnitt der V-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ gibt. Durch Vertauschung der zweiten und der n-ten Spalte erhält man $\mathfrak{v}_{1,n}(t_1,t_2)(a) = (0, t_1a_1, \dots, t_1, a_{n-3}, t_1a_{n-2} + t_2, t_2a_1 + t_1)$ und

$$V(t_1,t_2)(a) = (a_1, a_2 + t_1a_1, \dots, \sum_{i=0}^{n-3} \frac{t_1^i}{i!}a_{n-2-i}, \sum_{i=0}^{n-2} \frac{t_1^i}{i!}a_{n-1-i} + t_2, t_1 + t_2a_1).$$

Für ein Polynom g in $n-2$ Veränderlichen ist

$$S := \{(a_1, \dots, a_{n-2}, 0, g(a_1, \dots, a_{n-2})) \,|\, a_1, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{C}\}$$

eine zu $\mathbb{C}^{n-2}$ isomorphe Untervarietät von $\mathbb{C}^n$. Sie soll für ein geeignetes g ein globaler Schnitt der V-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ sein. Das Polynom g wird so gewählt, daß die Abbildung $F : S \times V \to \mathbb{C}^n$, gegeben durch $(a,v) \mapsto a.v$ ein globaler Diffeomorphismus ist.

Man setzt

$$g(a_1, \dots, a_{n-2}) := \sum_{i=2}^{n-2} b_ib_{n-i}f(i).$$

Die Abbildung Φ ist genau dann injektiv, wenn jede V-Bahn durch S die Menge S genau einmal trifft, also aus $b = a.v$ für $a, b \in S$ folgt $a = b$. Es seien also $a, b \in S$ und $b = a.v$ für ein $v \in V$. Mit $v = v(t_1,t_2)$ bedeutet dies:

$$b_j = \sum_{i=0}^{j-1} a_{j-i}\frac{t_1^i}{i!} \; j = 1, \dots, n-2$$

$$t_2 = -\sum_{i=1}^{n-2} a_{n-1-i}\frac{t_1^i}{i!}$$

$$\sum_{i=2}^{n-2} b_ib_{n-i}f(i) = \sum_{i=2}^{n-2} a_ia_{n-i}f(i) + t_1 + t_2a_1$$

Also

$$\sum_{i=2}^{n-2}((\sum_{j=0}^{i-1} a_{i-j}\frac{t_1^j}{j!})(\sum_{l=0}^{n-i-1} a_{n-i-l}\frac{t_1^l}{l!}) - a_i a_{n-i})f(i) + \sum_{i=1}^{n-2} a_1 a_{n-1-i}\frac{t_1^i}{i!} = t_1. \quad (40)$$

Die Koeffizientenfunktionen $f(i)$ müssen so gewählt werden, daß die linke Seite der Gleichung 40 verschwindet.

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=2}^{n-2}(\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{s} a_{i-j}a_{n-s-(i-j)}t_1^s\frac{1}{j!(s-j)!} - a_i a_{n-i})f(i) + \sum_{s=1}^{n-2} a_1 a_{n-1-s}\frac{t_1^s}{s!} \\
&= \sum_{i=2}^{n-2}(\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{j=0}^{s} a_{i-j}a_{n-s-(i-j)}t_1^s\frac{1}{j!(s-j)!})f(i) + \sum_{s=1}^{n-2} a_1 a_{n-1-s}\frac{t_1^s}{s!} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{j=0}^{s} a_{i-j}a_{n-s-(i-j)}t_1^s\frac{1}{j!(s-j)!})f(i)
\end{aligned}$$

mit $f(1) = f(n-1) = \frac{1}{2}$. Die Gleichung

$$0 = \sum_{s=1}^{n-2}\sum_{r=1}^{n-1} a_r a_{n-s-r}t_1^s\frac{1}{s!}\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}f(r+j)$$

ist aber durch $f(k) = \frac{1}{2}(-1)^{k-1}$, also $f(j+r) = f(r)(-1)^j$, erfüllt.

Die Abbildung Φ ist bijektiv. Zu gegebenem $b \in \mathbb{C}^n$ gibt es $a \in S$ und $v \in V$ mit $b = a.v$. Diese erfüllen die Gleichung $a = b.(-v)$. Da V kommutativ ist, erhält man

$$\begin{aligned}
a_j &= \sum_{i=0}^{j-1} b_{j-i}\frac{(-t_1)^i}{i!} \quad j = 1, \ldots, n-2 \\
0 &= -t_2 + \sum_{i=1}^{n-2} b_{n-1-i}\frac{(-t_1)^i}{i!} + b_{n-1} \\
\sum_{i=2}^{n-2} a_i a_{n-i} f(i) &= -t_1 - t_2 b_1 + b_n
\end{aligned}$$

Aus den oben hergeleiteten Äquivalenzen für die Koeffizienten $f(i)$ folgt

$$\begin{aligned}
t_1 &= b_n - b_{n-1}b_1 - \sum_{i=2}^{n-2} b_i b_{n-1} f(i) = b_n - \sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{n-1} f(i) \\
t_2 &= \sum_{i=1}^{n-2} b_{n-1-i}\frac{(-t_1)^i}{i!} + b_{n-1} \\
a_j &= \sum_{i=0}^{j-1} b_{j-i}\frac{(-t_1)^i}{i!} \quad j = 1, \ldots, n-2
\end{aligned}$$

Dies zeigt gleichzeitig, daß Φ ein Isomorphismus ist. $\square$

Da $\mathfrak{v}_{0,n}$ und $\mathfrak{v}_\beta \in X(2,n)$ Erweiterungen von $\mathfrak{v}_{1,n-1}$ sind, erhält man aus Satz 6.20

Folgerung 7.12. *Falls n ungerade ist, so sind die Quotienten der von $\mathfrak{v}_{0,n}, \mathfrak{v}_\beta \in X(2,n)$ induzierten Wirkungen von $\exp(\mathfrak{v}_{0,n})$ und $\exp(\mathfrak{v}_\beta)$ auf $\mathbb{C}^n$ affin und isomorph zu $\mathbb{C}^{n-2}$.*

Zum Beispiel erhält man für $n = 4$ die $V = \exp \mathfrak{v}_{0,4}$-invariante Projektion $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$ gegeben durch $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \mapsto (a_1, a_2)$ mit $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2 - b_1 b_4 + b_1^2 b_3 - \frac{1}{2} b_1 b_2^2$ [23].

7.5 Nicht-hausdorffsche Quotienten

In Satz 7.13 wird gezeigt, daß für $n \geq 5$ und ungerade die Quotiententopologie der $\exp \mathfrak{v}_{1,n}$-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ nicht hausdorffsch ist. Dazu werden jeweils zwei Punkte $a, b \in \mathbb{C}^n$ angegeben, die nicht in einer V-Bahn liegen, so daß zu jeder Wahl von Umgebungen $a \in U_a$ und $b \in U_b$ eine V-Bahn V_{ab} existiert, die beide Umgebungen schneidet, also $U_a \cap V_{ab} \neq \emptyset$ und $U_b \cap V_{ab} \neq \emptyset$.

Als Hilfsätze sind Lemma 7.14, 7.15 und 7.16 notwendig, die beschreiben, wie ein mit Hilfe der Matrix F beschriebenes Gleichungssystem durch das Gaußsche Eliminierungsverfahren schrittweise aufgelöst wird. Die Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten hängt von n ab. Die Beweise erfolgen durch vollständige Induktion.

Leider folgt aus der Tatsache, daß der Quotient einer V-Wirkung nicht existiert, nicht, daß der Quotient jeder Erweiterung der V-Wirkung nicht existiert. Deshalb muß in Satz 7.19 direkt gezeigt werden, daß der Quotient der $\exp(\mathfrak{v}_{0,n+1})$-Wirkung auf $\mathbb{C}^{n+1}$ nicht existiert. Dazu wird die Konstruktion von nicht trennbaren Punkten aus Satz 7.13 erweitert.

Satz 7.13. *Falls $n \geq 5$ ungerade ist, so ist der zu $V = \exp \mathfrak{v}_{1,n}$ gehörende Quotient $\mathbb{C}^n/V$ nicht hausdorffsch.*

Beweis. Man betrachtet V in einer geeigneten Basis, so daß

$$V(t_1,t_2)(a) = (a_1, a_2 + t_1 a_1, \ldots, \sum_{i=0}^{n-3} \frac{t_1^i}{i!} a_{n-2-i}, \sum_{i=0}^{n-2} \frac{t_1^i}{i!} a_{n-1-i} + t_2, t_1 + t_2 a_1).$$

Es wird gezeigt, daß es zwei V-Bahnen gibt, die sich nicht trennen lassen. Auf der V-invarianten Zariski-offenen Menge $U_0 = \{a_1 \neq 0\}$ ist die Quotientenabbildung $U_0 \to U_0/V = \Sigma_0 = \{a_1 \neq 0, a_2 = a_n = 0\}$ gegeben durch Anwendung des Elementes $V(-a_2/a_1, -a_n/a_1 + a_2/a_1^2)$. Das V-Bündel $U_0 \to \Sigma_0$ ist trivial, d.h. zwei V-Bahnen in U_0 lassen sich trennen. Die Menge $\Sigma_1 = \{a_1 = 0, a_{n-1} = a_n = 0\}$ ist ein Schnitt für die V-Wirkung auf $U_1 = \{a_1 = 0\}$. Wenn es zwei Punkte in $\mathbb{C}^n$ gibt, deren Bilder im Quotientenraum $\mathbb{C}^n/V$ sich nicht trennen lassen, so muß man zwei solche Punkte in Σ_1 finden.

Gesucht sind zwei Punkte $a = (0, a_2, \ldots, a_{n-2}, 0, 0), b = (0, b_2, \ldots, b_{n-2}, 0, 0)$ in Σ_1 und beliebig kleine $\varepsilon, \eta \in \mathbb{C}^n$ mit der Eigenschaft, daß $a + \varepsilon$ und $b + \eta$ in einer V-Bahn liegen.

Man setzt $a_i = b_i = 0$ für $i \neq \frac{n-1}{2}, n-2$, $t_1^{\frac{n-1}{2}-i}\varepsilon_i = c_i$ und $t_1^{\frac{n-1}{2}-i}\varepsilon_{\frac{n-3}{2}+i} = d_i$ für $i = 1, \ldots, \frac{n-1}{2} - 1$, $a_{\frac{n-1}{2}} = c_{\frac{n-1}{2}}$, $a_{n-2} = d_{\frac{n-1}{2}}$, wobei c_i, d_i konstante komplexe Zahlen sind, und $\varepsilon_i = \eta_i = 0$ für $i = n-2, n-1, n$. Man kann erreichen, daß $b + \eta$ und $a + \varepsilon$ in einer V-Bahn liegen, wenn gilt

$$\eta_j = \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon_{j-i} \frac{t_1^i}{i!} \qquad j = 1, \ldots, \frac{n-3}{2} \tag{41}$$

$$b_{\frac{n-1}{2}} - c_{\frac{n-1}{2}} = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{t_1^i}{i!}\varepsilon_{\frac{n-1}{2}-i} = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{1}{(\frac{n-1}{2}-i)!} c_i \tag{42}$$

$$0 = t_1^{j-\frac{n-1}{2}} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{(j-i)!} c_i \qquad j = \frac{n-1}{2} + 1, \ldots, n-2 \tag{43}$$

$$\eta_{j+\frac{n-3}{2}} = \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon_{\frac{n-3}{2}+j-i} \frac{t_1^i}{i!} \qquad j = 1, \ldots, \frac{n-3}{2} \tag{44}$$

$$b_{n-2} - d_{n-2} = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{1}{(\frac{n-1}{2}-i)!} d_i \tag{45}$$

$$t_2 = -t_1^{\frac{n-1}{2}} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{(n-1-i)!} c_i \tag{46}$$

$$0 = t_1 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{1}{(\frac{n-1}{2}+1-i)!} d_i \tag{47}$$

$$0 = t_1(1 - c_1 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{(n-1-i)!} c_i) \tag{48}$$

Aus $t_1 \to \infty$ folgt $\varepsilon, \eta \to \infty$, denn $\varepsilon_{j-i} t_1^i = c_{j-i} t_1^{j-\frac{n-1}{2}}$ und $\varepsilon_{\frac{n-3}{2}+j-i} t_1^i = d_{j-i} t_1^{j-\frac{n-1}{2}}$. Kann man die Gleichungen 43, 47 und 48 durch Wahl der Konstanten c_i, d_i erfüllen und gleichzeitig $b_{\frac{n-1}{2}} \neq c_{\frac{n-1}{2}}$ oder $b_{n-2} \neq d_{\frac{n-1}{2}}$, d.h. $a \neq b$, erreichen? Dies ist genau dann der Fall, wenn die Konstanten c_j, d_j die linearen Gleichungen

$$0 = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} F(i,j) c_j \quad i = 1, \ldots, \frac{n-3}{2}$$

$$0 = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}-1} F(1,j) d_j,$$

die zusätzliche Bedingung

$$\frac{1}{c_1} = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} F(\frac{n-1}{2}, j)c_j$$

und eine der Ungleichungen

$$0 \neq \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} F(0,j)c_j, \qquad 0 \neq \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} F(0,j)d_i$$

mit $F(i,j) := \frac{1}{(\frac{n-1}{2}+i-j)!}$ erfüllen.

Aus Lemma 7.14 mit $x = \frac{1}{c_1} \neq 0$ folgt $c_1 \neq 0$. Die Konstanten c_j können so gewählt werden, daß die Gleichungen erfüllt sind. Da $n \geq 5$ ist, gibt es mindestens zwei Konstanten d_j, die man passend wählen kann. Falls $n = 4m+1$ mit $m \in \mathbb{Z}$, z.B. $n = 5$, so kann man wegen Folgerung 7.17 sogar $d_j = 0$ setzen. □

Lemma 7.14. *Die Matrix*

$$F = \left(F(i,j) = \frac{1}{(\frac{n-1}{2} + i - j)!} \right)_{i,j=1,\ldots,\frac{n-1}{2}}$$

ist nichtsingulär und das lineare Gleichungssystem $Fc^T = (0,\ldots,0,x)^T$ *ist äquivalent zu* $\tilde{F}c^T = (0,\ldots,0,x)^T$ *mit*

$$\tilde{F}(i,j) = (-1)^{i-1} \frac{\prod_{l=0}^{i-2}(\frac{n-1}{2} - j - l)}{\prod_{l=0}^{i-2}(i+l)} \frac{1}{(\frac{n-1}{2} + i - j)!}.$$

Dabei ist $\prod_{l=m_1}^{m_2} := 1$ *falls* $m_2 < m_1$.

Beweis. Es wird das Gaußsche Eliminierungsverfahren angewendet. Dabei wird gleichzeitig zu mehreren Zeilen ein Vielfaches der jeweils vorherigen Zeile addiert.

Man betrachtet die durch die Rekursion $F_0(i,j) := F(i,j)$ und

$$F_{k+1}(i,j) := \begin{cases} F_k(i,j) - \frac{i-1}{(i-1+k)(i+k)} F_k(i-1,j) & i > k \\ F_k(i,j) & i \leq k \end{cases}$$

definierten Matrizen $F_k(i,j)$. Für alle $k \geq 0$ sind die linearen Gleichungssysteme $F_k z^T = (0,\ldots,0,x)^T$ zueinander äquivalent. Für $i > k$ gilt

$$F_k(i,j) = (-1)^k \frac{\prod_{l=0}^{k-1}(\frac{n-1}{2} - j - l)}{\prod_{l=1}^{k}(i-1+l)} \frac{1}{(\frac{n-1}{2} + i - j)!},$$

denn

$$\begin{aligned}
F_{k+1}(i,j) &= (-1)^k \frac{\prod_{l=0}^{k-1}(\frac{n-1}{2}-j-l)}{\prod_{l=1}^{k}(i-1+l)} \frac{1}{(\frac{n-1}{2}+i-j)!} \\
&\quad - \frac{i-1}{(i-1+k)(i+k)}(-1)^k \frac{\prod_{l=0}^{k-1}(\frac{n-1}{2}-j-l)}{\prod_{l=1}^{k}(i-2+l)} \frac{1}{(\frac{n-1}{2}+i-1-j)!} \\
&= (-1)^k \frac{\prod_{l=0}^{k-1}(\frac{n-1}{2}-j-l)}{\prod_{l=1}^{k+1}(i-1+l)} \frac{1}{(\frac{n-1}{2}+i-j)!}(i+k-\frac{n-1}{2}-i+j) \\
&= (-1)^{k+1} \frac{\prod_{l=0}^{k}(\frac{n-1}{2}-j-l)}{\prod_{l=1}^{k+1}(i-1+l)} \frac{1}{(\frac{n-1}{2}+i-j)!}.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt $F_k(i,j) = F_{i-1}(i,j)$ für $i \le k$ und $\tilde{F} = F_{\frac{n-1}{2}}(i,j)$. Die Matrix F ist nichtsingulär, da $F_{\frac{n-1}{2}}(i,j) = F_{i-1}(i,j) = 0$ für $j \ge \frac{n-1}{2} - i + 2$. □

Lemma 7.15. *Es sei*

$$F = \left(F(i,j) = \frac{1}{(\frac{n-1}{2}+i-j)!} \right)_{i=1,\dots,\frac{n-3}{2},j=1,\dots,\frac{n-1}{2}}.$$

Das Gleichungssystem $Fc^T = 0$ *ist äquivalent zu* $F^D c^T = 0$ *mit*

$$F^D(i,j) = (-1)^{i-1} \frac{\prod_{l=0}^{i-2}(\frac{n-1}{2}-j-l)}{\prod_{l=0}^{i-2}(i+l)} \frac{\prod_{l=2}^{\frac{n-1}{2}-i}(j-l)}{(n-2-j)!} \prod_{l=0}^{\frac{n-1}{2}-i-2}(2i+l).$$

Beweis. Das lineare Gleichungssystem $Fz^T = 0$ ist äquivalent zu $\tilde{F}z^T = 0$. Es wird das Gaußsche Eliminierungsverfahren benutzt, um $\tilde{F}$ in Trapezform zu bringen. Dabei werden gleichzeitig mehrere Zeilen mit einem von 0 verschiedenen Faktor multipliziert und zu ihnen ein Vielfaches der jeweils folgenden Zeile addiert.

Man betrachtet die zu $\tilde{F}$ äquivalenten, rekursiv definierten Matrizen $\tilde{F}_0 := F$,

$$\tilde{F}_{k+1}(i,j) := \begin{cases} \tilde{F}_k(i,j)(\frac{n-1}{2}-k-i-1) & \\ +\frac{2i(2i-1)2i(2i+1)}{i(2i+1+k)(2i+k)}\tilde{F}_k(i+1,j)(\frac{n-1}{2}+i-1) & i < \frac{n-1}{2}-(k+1) \\ F_k(i,j) & i \ge \frac{n-1}{2}-(k+1) \end{cases}$$

Für $i < \frac{n-1}{2} - k$ gilt

$$\tilde{F}_k(i,j) = (-1)^{i-1} \frac{\prod_{l=0}^{i-2}(\frac{n-1}{2}-j-l)}{\prod_{l=0}^{i-2}(i+l)} \frac{\prod_{l=2}^{k+1}(j-l)}{(\frac{n-1}{2}+i-j+k)!} \prod_{l=0}^{k-1}(2i+l),$$

denn

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{k+1}(i,j) &= (-1)^{i-1}\prod_{l=2}^{k+1}(j-l) \\
&\qquad \left\{ \frac{(\frac{n-1}{2}-k-i-1)}{(\frac{n-1}{2}+i-j+k)!}\frac{\prod_{l=0}^{i-2}(\frac{n-1}{2}-j-l)\prod_{l=0}^{k-1}(2i+l)}{\prod_{l=0}^{i-2}(i+l)} \right. \\
&\qquad - \frac{(\frac{n-1}{2}+i-1)}{(\frac{n-1}{2}+i+1-j+k)!}\frac{\prod_{l=0}^{i-1}(\frac{n-1}{2}-j-l)\prod_{l=0}^{k-1}(2i+2+l)}{\prod_{l=0}^{i-1}(i+1+l)} \\
&\qquad \left. \frac{2i(2i-1)2i(2i+1)}{i(2i+1+k)(2i+k)} \right\} \\
&= (-1)^{i-1}\frac{\prod_{l=0}^{i-2}(\frac{n-1}{2}-j-l)\prod_{l=2}^{k+1}(j-l)\prod_{l=0}^{k-1}(2i+l)}{(\frac{n-1}{2}+i+1-j+k)!\prod_{l=0}^{i-2}(i+l)}f(i,j,k) \\
f(i,j,k) &= (\frac{n-1}{2}-k-i-1)(\frac{n-1}{2}+i+1-j+k) \\
&\quad -(\frac{n-1}{2}+i-1)(\frac{n-1}{2}-j-i+1) \\
&= (j-(k+2))(2i+k).
\end{aligned}$$

Es gilt $\tilde{F}_k(i,j) = \tilde{F}_{\frac{n-1}{2}-i-1}(i,j)$ für $i \geq \frac{n-1}{2}-k$ und $F^D = \tilde{F}_{\frac{n-1}{2}-2}(i,j) = \tilde{F}_{\frac{n-1}{2}-i-1}(i,j)$. Also ist $F^D(i,j) = 0$ für $j \neq 1, \frac{n-1}{2}-i+1$. $\square$

Lemma 7.16. *Es sei*

$$F = \left(F(i,j) = \frac{1}{(\frac{n-1}{2}+i-j)!} \right)_{i=0,\dots,\frac{n-3}{2},j=1,\dots,\frac{n-1}{2}}.$$

Das System $Fc^T = (x,0,\dots,0)^T$ ist äquivalent zu $\hat{F}c^T = (x,0,\dots,0)^T$ mit

$$\hat{F}(i,j) = \frac{\prod_{l=0}^{\frac{n-5}{2}-i}(\frac{n-1}{2}-j-l)}{(n-2-j)!}.$$

Beweis. Man wendet wieder das Gaußsche Eliminierungsverfahren an, indem man zu einer Zeile ein Vielfaches der jeweils folgenden Zeile addiert.

Man betrachtet die rekursiv definierten Matrizen $F_0 = F$ und

$$F_{k+1}(i,j) := \begin{cases} F_k(i,j) - (i+1+2k)F_k(i+1,j) & i \leq \frac{n-5}{2}-k \\ F_k(i,j) & i > \frac{n-5}{2}-k \end{cases}$$

Für $i \leq \frac{n-3}{2}-k$ gilt

$$F_k(i,j) = \frac{\prod_{l=0}^{k-1}(\frac{n-1}{2}-j-l)}{(\frac{n-1}{2}+i-j+k)!},$$

denn

$$\begin{aligned}
F_{k+1}(i,j) &= \frac{\prod_{l=0}^{k-1}(\frac{n-1}{2}-j-l)}{(\frac{n-1}{2}+i-j+k)!} - (i+1+2k)\frac{\prod_{l=0}^{k-1}(\frac{n-1}{2}-j-l)}{(\frac{n-1}{2}+i+1-j+k)!} \\
&= \frac{\prod_{l=0}^{k-1}(\frac{n-1}{2}-j-l)}{(\frac{n-1}{2}+i+1-j+k)!}(\frac{n-1}{2}+i+1-j+k-i-1-2k) \\
&= \frac{\prod_{l=0}^{k}(\frac{n-1}{2}-j-l)}{(\frac{n-1}{2}+i+1-j+k)!}
\end{aligned}$$

Es ist $\hat{F} = F_{\frac{n-3}{2}}$. □

Folgerung 7.17. *Aus dem linearen Gleichungssystem*

$$\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{(\frac{n-1}{2}+i-j)!} c_j = 0$$

für $i = 1, \ldots, \frac{n-3}{2}$ *und*

$$\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{(n-1-j)!} c_j = \frac{1}{c_1}$$

folgt genau dann die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{1}{(\frac{n-1}{2}-j)!} c_j \neq 0,$$

wenn $\frac{n-1}{2}$ *gerade ist.*

Beweis. Aus Lemma 7.14 mit $0 \neq x = \frac{1}{c_1}$ folgt $c_1 \neq 0$. Aus Lemma 7.15 erhält man für $i = 1$ die Gleichung $F^D(1,1)c_1 + F^D(1, \frac{n-1}{2})c_{\frac{n-1}{2}} = 0$, also

$$(-1)^{\frac{n-3}{2}}(\frac{n-3}{2})!c_1 = (n-3)!c_{\frac{n-1}{2}}.$$

Die zu beweisende Ungleichung ist äquivalent zu $\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{(\frac{n-1}{2}-j)!} c_j \neq c_{\frac{n-1}{2}}$. Wegen Lemma 7.16 ist dies äquivalent zur Ungleichung

$$(\frac{n-3}{2})!c_1 \neq (n-3)!c_{\frac{n-1}{2}}.$$

□

Folgerung 7.18. *Falls* $n+1 \geq 6$ *gerade ist, so ist der zu* $V = \exp \mathfrak{v}_\beta$ *gehörende Quotient* $\mathbb{C}^{n+1}/V$ *für* $\beta = 0$ *nicht hausdorffsch.*

Beweis. Man betrachtet $\mathfrak{v}_\beta$ in der Form

$$\mathfrak{v}_\beta(t_1,t_2)(a) = (0, t_1a_1, \ldots, t_1a_{n-1}+t_2, t_2a_1+t_1, t_1a_n+t_2a_2+\beta t_2).$$

Die Liealgebra $\mathfrak{v}_\beta$ ist eine Erweiterung von $\mathfrak{v}_{1,n}$. Mit der in Satz 7.13 angegebenen Wahl von a, b, ε, η und $\varepsilon_{n+1} = \eta_{n+1} = 0$ bleibt noch die Gleichung $\frac{1}{2}t_1^2 + t_1t_2\varepsilon_1 + t_2\varepsilon_2 = 0$ zu prüfen, um nachzuweisen, daß es zwei nichttrennbare V-Bahnen gibt. Wegen Gleichung 48 gilt $\frac{1}{2}(t_1+\varepsilon_1 t_2) = 0$. Weiterhin folgt aus Lemma 7.15 die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= F^D(\frac{n-3}{2},1)c_1 + F^D(\frac{n-3}{2},2)c_2 \\
&= \frac{\prod_{l=0}^{\frac{n-7}{2}}(\frac{n-1}{2}-1-l)}{(n-3)!}c_1 + \frac{\prod_{l=0}^{\frac{n-7}{2}}(\frac{n-1}{2}-2-l)}{(n-4)!}c_2 \\
&= c_1 + 2c_2 = (t_1\varepsilon_1+\varepsilon_2)t_1^{\frac{n-3}{2}}
\end{aligned}$$

□

Satz 7.19. *Falls $n+1 \geq 6$ gerade ist, so ist der zu $V = \exp \mathfrak{v}_{0,n+1}$ gehörende Quotient $\mathbb{C}^{n+1}/V$ nicht hausdorffsch.*

Beweis. Man betrachtet $\mathfrak{v}_{0,n+1}$ in der Form

$$\mathfrak{v}_\beta(t_1,t_2)(a) = (0, t_1a_1, \ldots, t_1a_{n-2}, t_1a_{n-1}+t_2, t_2a_1+t_1, t_1a_{n-1}+t_2a_n).$$

Es werden zwei nichttrennbare Punkte $a, b \in \Sigma_1 = \{a_1, a_{n-1}, a_n = 0\}$ angegeben. Obwohl $\mathfrak{v}_{0,n+1}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{v}_{1,n}$ ist, sind die Projektionen dieser Punkte nicht unbedingt die in Satz 7.13 gefundenen, nicht trennbaren Punkte. Mit den Bezeichnungen aus Satz 7.13 setzt man $d_i = 0$ für $i = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$ aber hier $\varepsilon_{n-1} = \eta_{n-1} \neq 0$ und $t_1\varepsilon_{n-1} = c_{n-1}$. Es bleibt zu zeigen, daß man zwei verschiedene komplexe Konstanten b_{n+1}, a_{n+1} finden kann, die die Gleichung

$$b_{n+1} - a_{n+1} = t_1t_2 + \frac{1}{2}t_2^2\varepsilon_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(a+\varepsilon)_{n-i}t_1^i\frac{1}{i!}$$

erfüllen. Dazu setzt man $c_{n-1} \neq 0$ und $b_{n+1} = a_{n+1} + c_{n-1}$ und zeigt

$$0 = t_1t_2 + \frac{1}{2}t_2^2\varepsilon_1 + \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-1}(a+\varepsilon)_{n-i}t_1^i\frac{1}{i!}.$$

Es gilt $t_1 + t_2\varepsilon_1 = 0$ und $\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-1}(a+\varepsilon)_{n-i}t_1^i\frac{1}{i!} = t_1^{\frac{n+1}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} c_j\frac{1}{(n-j)!}$. Wegen Gleichung 46 genügt es zu zeigen, daß die Gleichung

$$0 = t_1^{\frac{n+1}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} c_j\left(\frac{1}{(n-j)!} - \frac{1}{2}\frac{1}{(n-1-j)!}\right) \tag{49}$$

gilt.

Aus Lemma 7.15 erhält man die Formeln

$$
\begin{aligned}
c_{\frac{n+1}{2}-i} &= -\frac{F^D(i,1)}{F^D(i,\frac{n+1}{2}-i)}c_1 \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}-i}\frac{(\frac{n-5}{2}+i)!(\frac{n-3}{2})!}{(n-3)!(i-1)!(\frac{n-1}{2}-i)!}c_1 \\
c_j &= (-1)^{j-1}\frac{(n-2-j)!}{(n-3)!}\frac{(\frac{n-3}{2})!}{(j-1)!(\frac{n-1}{2}-j)!}c_1 \\
&= (-1)^{j-1}\frac{(n-2-j)!}{(n-3)!}\binom{\frac{n-3}{2}}{j-1}c_1
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} c_j\left(\frac{1}{(n-j)!}-\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1-j)!}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{2}c_1\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)(n-j-2)}{(n-j)!}(-1)^{j-1}\frac{(n-2-j)!}{(n-3)!}\binom{\frac{n-3}{2}}{j-1} \\
&\qquad = \frac{1}{2}c_1\frac{1}{(n-3)!}\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)(n-j-2)}{(n-j)(n-j-1)}(-1)^{j-1}\binom{\frac{n-3}{2}}{j-1} \\
&\qquad = \frac{1}{2}c_1\frac{1}{(n-3)!}\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\frac{(-1)(n-j-3)}{(n-j-1)(n-j-2)}(-1)^{j}\binom{\frac{n-3}{2}}{j}
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Beziehung $\binom{m}{l}=\binom{m-1}{l}+\binom{m-1}{l-1}$ formt man die Summe weiter um. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\frac{(-1)(n-j-3)}{(n-j-1)(n-j-2)}(-1)^{j}\binom{\frac{n-3}{2}}{j} \\
&\qquad = \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}-k}(-1)^{k+1+j}\frac{(n-j-3-2k)k!}{\prod_{l=1}^{k+2}(n-j-l)}\binom{\frac{n-3}{2}-k}{j},
\end{aligned}
$$

denn

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}-k}(-1)^{k+1+j}\frac{(n-j-3-2k)k!}{\prod_{l=1}^{k+2}(n-j-l)}\binom{\frac{n-3}{2}-k}{j}\\
&=\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}-k}(-1)^{k+1+j}\frac{(n-j-3-2k)k!}{\prod_{l=1}^{k+2}(n-j-l)}\left(\binom{\frac{n-3}{2}-k-1}{j}+\binom{\frac{n-3}{2}-k-1}{j-1}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad=\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}-k-1}\frac{(-1)^{k+1+j}k!\binom{\frac{n-3}{2}-k-1}{j}}{\prod_{l=1}^{k+3}(n-j-l)}f(j,k)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
f(j,k) :=&(n-j-3-2k)(n-j-k-3)-(n-j-4-2k)(n-j-1)\\
=&-(n-j-5-2k)(k+1).
\end{aligned}
$$

Durch Auswertung dieser Beziehung für $k=\frac{n-3}{2}$ erhält man Gleichung 49. □

8 Untersuchung von $X(2,n)$ für $n=4,5,6$

Es sollen die Repräsentanten der H-Bahnen auf den Parameterräumen $X(2,4)$, $X(2,5)$ und $X(2,6)$ bestimmt werden. Dazu wird eine systematische Fallunterscheidung durchgeführt, die unter anderem die Zahl der linearen Invarianten beinhaltet. Dann werden die Quotienten der dazugehörigen Wirkung auf $\mathbb{C}^n$ und die Bahnenraumstruktur untersucht.

8.1 Vorbereitungen

Hilfssätze zur Repräsentantenbestimmung

Lemma 8.1. *Wenn V kommutativ und jede Semiinvariante der V-Wirkung auf U sogar eine Invariante ist, so gibt es mindestens eine lineare Invariante $z\notin\langle 1\rangle_{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Da V unipotent ist, existiert eine V-Fahne. Also ist $z=e_n^*$ eine Semiinvariante, die wegen der Annahme, daß es keine nichttrivialen Semiinvarianten gibt, sogar eine Invariante ist. □

Lemma 8.2. *Es sei V eine zweidimensionale, kommutative Unterliegruppe von $Sl_3(\mathbb{C})\ltimes\mathbb{C}^3$ gegeben durch die Liealgebra $\{\mathfrak{v}(t_1,t_2)\,|\,t_1,t_2\in\mathbb{C}\}$ mit*

$$
\begin{pmatrix}0&0&t_2&*\\0&0&t_1&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{sl}_3\ltimes\mathbb{C}^3.
$$

Wenn V nur eine Invariante und keine Semiinvarianten besitzt, so ist V äquivalent zu einer durch $\{\mathfrak{v}(t_1, t_2) \,|\, t_1, t_2 \in \mathbb{C}\}$ mit

$$\mathfrak{v}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegebenen Liegruppe.

Beweis. Durch $(e_1, e_2, e_3) \mapsto (e_1, e_2, e_3 - a_{13}e_2)$ erhält man

$$\begin{matrix} 0 & 0 & t_2 & a_{03}t_1+b_{03}t_2 \\ 0 & 0 & t_1 & b_{13}t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad .$$

Da z_3 keine Semiinvariante ist, gilt $b_{13} \neq 0$. Durch $(e_1, e_2, e_3) \mapsto (e_1, e_2, e_3/b_{13})$ ergibt sich

$$\begin{matrix} 0 & 0 & t_2 & a_{03}t_1+b_{03}t_2 \\ 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad .$$

Falls $a_{03} \neq 0$, so führen die Transformationen $(e_1, e_2, e_3) \mapsto (e_1, e_2, e_3 + \alpha e_2)$, $(X_1, X_2) \mapsto (X_1, X_2 + \alpha X_1)$, wobei α eine Lösung der Gleichung $\alpha^2 + b_{03}\alpha - a_{03} = 0$ ist, und $(e_1, e_2, e_3) \mapsto (e_1 - \alpha, e_2, e_3)$ zu der Form

$$\begin{matrix} 0 & 0 & t_2 & b_{03}t_2 \\ 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad .$$

Man kann also $a_{03} = 0$ annehmen und macht eine Fallunterscheidung:

1. $b_{03} = 0$
   Man erreicht die erste Normalform durch $(e_1, e_2, e_3) \mapsto (e_1, e_3, e_2)$ und $(X_1, X_2) \mapsto (X_2, X_1)$.

2. $b_{03} \neq 0$
   Nun liefern $(e_1, e_2, e_3) \mapsto (e_1/b_{03}, e_2 - e_3/b_{03}, e_3)$ und $(X_1, X_2) \mapsto (b_{03}X_1 - X_2, b_{03}X_2)$ die zweite Normalform.

$\square$

Mit Hilfe der Matsushimabedingung und des Lemmas 8.2 erhält man:

Folgerung 8.3. *Ein Element aus $X(2, n)$ besitzt höchstens $n - 3$ lineare Invarianten.*

Lemma 8.4. *Es sei W ein m-dimensionaler $\mathfrak{v}$-invarianter Unterverktorraum von $\mathbb{C}^n$ und $\mathfrak{v} = \{t_1X_1 + t_2X_2\}$ mit $X_1 = (a_{ij})_{i,j=0,\ldots,m}$ und $X_2 = (b_{ij})_{i,j=0,\ldots,m}$ bezüglich einer Basis, in der X_1, X_2 echt obere Dreiecksform haben.*

Wenn $a_{m-1m} \neq 0$ und $b_{m-1m} = 0$, so kann man durch einen Basiswechsel, der X_1,X_2 sonst nicht verändert, $a_{0m} = 0$ erreichen.

Beweis. Die Normalform wird durch den Basiswechsel

$$(e_1, \ldots, e_m) \mapsto (e_1, \ldots, e_{m-2}, e_{m-1} + \frac{a_{0m}}{a_{m-1m}}, e_m)$$

erreicht. □

Es sei $\mathfrak{v} = \{t_1X_1 + t_2X_2 \,|\, t_1, t_2 \in \mathbb{C}\}$. Die Matrixkoeffizienten des Kommutators $[X_1, X_2]$ seien mit $K_{ij} := [X_1, X_2]_{ij}$ bezeichnet. Ein Verweis auf die Matsushimabedingung wird mit MB abgekürzt.

Kriterium für zu $\mathbb{C}^3$ isomorphe Quotienten

Es gibt glatte, zusammenziehbare, komplexe Varietäten der Dimension $n > 2$, die nicht isomorph zu $\mathbb{C}^n$ sind. Aber es gilt:

Satz 8.5 ([11])**.** *Es sei X eine glatte, kontrahierbare, komplexe, dreidimensionale Varietät. Es gilt $X \cong \mathbb{C}^3$ genau dann, wenn es eine reguläre Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ gibt, so daß die Fasern von f generisch isomorph zu $\mathbb{C}^2$ sind und jede Faser höchstens isolierte Singularitäten hat.*

Methoden zur Bestimmung der Bahnenraumstruktur

In diesem Abschnitt werden Kriterien zusammengestellt, mit deren Hilfe man entscheiden kann, wie der Abschluß einer H-Bahn in $X(2, n)$ aussieht.

Lemma 8.6. *Wenn $\mathfrak{v}_1 \in \overline{H.\mathfrak{v}_0}$, dann gilt* $\dim H_{\mathfrak{v}_1} > \dim H_{\mathfrak{v}_0}$.

Beweis. Da die H-Wirkung algebraisch ist, gilt $\dim H.\mathfrak{v}_1 < \dim H.\mathfrak{v}_0$. □

Es sei $I(\mathfrak{v})$ der Vektorraum der linearen Invarianten und $\dim I(\mathfrak{v}) =: i(\mathfrak{v})$.

Lemma 8.7. *Es seien $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_0 \in X(2, n)$ und $\mathfrak{v}_0 \in \overline{H.\mathfrak{v}_1}$. Es gilt $i_1 := i(\mathfrak{v}_1) \leq i(\mathfrak{v}_0)$.*

Beweis. Der i_1- dimensionale Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$ wird durch die Graßmannsche $Gr(i_1, n)$ parametrisiert, auf der die Gruppe H wirkt. Da die Graßmannsche kompakt ist, besitzt auch $\mathfrak{v}_0$ einen i_1-dimensionalen Vektorraum von linearen Invarianten. □

Weitere Kriterien, um die Struktur des Bahnenraumes zu verstehen, liefert die Exponentialabbildung auf Unterräumen von $\mathfrak{v}$. Da die Konjugation exp-äquivariant ist, erhält man

Lemma 8.8. *Der Totalgrad und der Minimalgrad der Exponentialabbildung können beim Übergang zum Rand nicht zunehmen.*

Dabei ist der Minimalgrad $m(\mathfrak{v})$ der kleinste Grad, den die Exponentialabbildung bei Einschränkung auf einen eindimensionalen Unterraum annimmt. Es gilt also $m(\mathfrak{v}) \geq 1$.

8.2 Der Parameterraum $X(2,4)$

Es sei $V = \exp(t_1X_1 + t_2X_2)$ mit $X_1 = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,4}$ und $X_2 = (b_{ij})_{i,j=0,\dots,4}$. Die bis auf ein Vielfaches eindeutig bestimmte lineare Invariante sei z_1. Sei $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^4$ in der $\mathfrak{v}$ obere Dreiecksform besitzt. Da z_2 keine Semiinvariante ist, gilt $(a_{12}, b_{12}) \neq (0,0)$. Durch $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$-Wirkung auf $\mathfrak{v}$ erhält man $(a_{12}, b_{12}) = (1,0)$. Durch die Transformation $e_1 \mapsto e_1 + a_{02}$ erhält man $a_{02} = 0$ und es bleiben die Fälle $b_{02} = 0$ oder $b_{02} = 1$. Wegen Lemma 8.2 braucht man aber nur den Fall $b_{02} = 0$ zu betrachten.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & a_{03}t_1+b_{03}t_2 & a_{04}t_1+b_{04}t_2 \\
 & 0 & t_1 & * & * \\
 & & 0 & a_{23}t_1+b_{23}t_2 & * \\
 & & & 0 & * \\
 & & & & 0
\end{array}$$

Aus $K_{13} = 0$ folgt $b_{23} = 0$. Damit gilt (a_{03}, b_{03}), $(a_{04}, b_{04}) \neq (0,0)$. Man kann $a_{13} = a_{14} = 0$ annehmen.

1. $b_{03} = 0$: Es muß $a_{03} \neq 0$ gelten. Aus Lemma 8.4 folgt $a_{23} = 0$. Man kann $a_{03} = b_{04} = 1$ und $a_{04} = 0$ annehmen.

   $$\begin{array}{ccccc}
   0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\
    & 0 & t_1 & b_{13}t_2 & b_{14}t_2 \\
    & & 0 & 0 & a_{24}t_1+b_{24}t_2 \\
    & & & 0 & a_{34}t_1+b_{34}t_2 \\
    & & & & 0
   \end{array}$$

   Aus $K_{04} = 0$ folgt $b_{34} = 0$. Wegen der MB gilt $b_{24} = 0$. Da z_3 keine Semiinvariante ist, gilt $b_{13} \neq 0$. Damit folgt aus $K_{14} = 0$ $a_{34} = 0$. Mit Hilfe des Basiswechsels $(e_1, \dots, e_4) \mapsto (e_1, e_2, e_3 - b_{14}e_2, e_4 - \frac{b_{14}}{b_{13}}e_3)$ in $\mathbb{C}^4$ und des Basiswechsels $(X_1, X_2) \mapsto (X_1, X_2 - \frac{b_{14}}{b_{13}}X_1)$ in $\mathfrak{v}$ erhält man $b_{14} = 0$.

   $$\begin{array}{ccccc}
   0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\
    & 0 & t_1 & b_{13}t_2 & 0 \\
    & & 0 & 0 & a_{24}t_1 \\
    & & & 0 & 0 \\
    & & & & 0
   \end{array}$$

   Damit gilt auch $a_{24} \neq 0$ und durch Konjugation mit einer Diagonalmatrix erreicht man

   $$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ & 0 & t_1 & t_2 & 0 \\ & & 0 & 0 & t_1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $b_{03} \neq 0$: Man kann $b_{03} = a_{04} = 1$ und $a_{03} = b_{04} = 0$ annehmen.

   $$\begin{array}{ccccc}
   0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\
    & 0 & t_1 & b_{13}t_2 & b_{14}t_2 \\
    & & 0 & a_{23}t_1 & a_{24}t_1+b_{24}t_2 \\
    & & & 0 & a_{34}t_1+b_{34}t_2 \\
    & & & & 0
   \end{array}$$

   Aus K_{04} folgt $a_{34} = 0$. Um nicht zum ersten Fall zurückkehren zu können, muß $b_{34} \neq 0$ sein. Dann folgt aus $K_{24} = 0$ $a_{23} = 0$ und damit $b_{13} \neq 0$, da z_3 keine Semiinvariante ist. Dies ist ein Widerspruch zur MB mit $t_1 = 0$.

Es gibt also bis auf Äquivalenz nur eine zweidimensionale, unipotente, algebraische Untergruppe von $\mathrm{Sl}_4(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^4$, deren Quotientenbildung nichttrivial ist. Diese Gruppe

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ & 1 & t_1 & t_2 & \frac{1}{2}t_1^2 \\ & & 1 & 0 & t_1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

tritt bereits in [4] als ein Beispiel dafür auf, daß der Quotient G/V affin ist, eine hinreichende gruppentheoretische Bedingung aber nicht erfüllt ist. Der Quotient $\mathbb{C}^4/\mathbb{C}^2$ ist isomorph zu $\mathbb{C}^2$ (siehe Abschnitt 6.2.4).

Folgerung 8.9. *Der Quotient einer freien, affinen $\mathbb{C}^2$-Wirkung auf $\mathbb{C}^4$ ist isomorph zu $\mathbb{C}^2$.*

8.3 Der Parameterraum $X(2,5)$

Die Bestimmung der Äquivalenzklassen in $X(2,5)$ findet man im Anhang A, da sie mit den Methoden zur Bestimmung der Äquivalenzklassen in $X(2,4)$ erfolgt und nur viel umfangreicher ist.

Es zeigt sich, daß der Parameterraum $X(2,5)$ endlich viele H-Bahnen besitzt, zusammenhängend ist und genau zwei offene Bahnen der H-Wirkung enthält. Der Quotient der zu den Elementen aus $X(2,5)$ gehörenden $\mathbb{C}^2$-Wirkung auf $\mathbb{C}^5$ ist generisch hausdorffsch, steinsch und sogar isomorph zu $\mathbb{C}^3$.

Es gibt jedoch eine V-Wirkung in $X(2,5)$, die eine Entartung einer $\mathbb{C}^2$-Wirkung mit steinschem Quotienten ist, für die der Quotient $\mathbb{C}^5/V$ nicht hausdorffsch ist.

8.3.1 Untersuchung der Quotienten

Es sei nun $V_i := \exp(\mathfrak{v}_i) \subset \mathrm{Sl}_5(\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^5 = G$. Jetzt wird untersucht, ob die Quotienten $\mathbb{C}^5/V_i$ affin sind. Ist dies der Fall, so soll noch überprüft werden, ob die Quotienten $\mathbb{C}^5/V_i$ isomorph zu $\mathbb{C}^3$ sind.

Die V_1-Wirkung

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ & 1 & 0 & t_1 & t_2 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & t_1 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung $\Psi : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3$, gegeben durch Projektion auf $\Sigma_0 = \{a_1 \neq 0, a_3 = a_4 = 0\}$ durch Multiplikation mit $V_1(-\frac{a_3}{a_1}, -\frac{a_4}{a_1} + \frac{a_3}{a_1^2})$ und Regularisierung, ist

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mapsto (a_1, a_2, a_3 - a_1(a_4 + a_2 a_3) + a_1^2 a_5).$$

Da Ψ auch auf $U_1 = \{a_1 = 0\}$ die Bahnen trennt und maximalen Rang hat, ist $\mathbb{C}^5/V_1$ isomorph zum Bild $\Psi(\mathbb{C}^5)$. Man sieht sofort, daß $\mathbb{C}^5/V_1$ isomorph zu $\mathbb{C}^3$ ist, denn Ψ ist surjektiv.

Die V_2-Wirkung

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ & 1 & 0 & t_1 & t_2 & \frac{1}{2}t_1^2 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & t_1 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung $\Psi : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3$, gegeben durch die Projektion auf $\Sigma_0 = \{a_1 \neq 0, a_3 = a_4 = 0\}$ durch Multiplikation mit $V_2(-\frac{a_3}{a_1}, -\frac{a_4}{a_1} + \frac{a_3}{a_1^2})$ und Regularisierung, ist

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mapsto (a_1, a_2, a_3 - a_1(a_4 + \frac{1}{2}a_3^2) + a_1^2 a_5).$$

Sie trennt auf ganz $\mathbb{C}^5$ die Bahnen, ist von maximalem Rang und surjektiv. Der Quotient G/V_2 ist affin und $\mathbb{C}^5/V_2$ ist isomorph zu $\mathbb{C}^3$. Dies folgt auch aus Lemma 6.16, wenn man beachtet, daß z_2 eine Invariante und $\{z_2 = 0\}$ V_2-invariant ist. Damit ist $\mathfrak{v}_2$ triviale Erweiterung von $\mathfrak{v} \in X(2,4)$.

Die V_3-Wirkung ist durch Vertauschung von e_4 und e_5 äquivalent zur Wirkung von $\exp(\mathfrak{v}_{1,5})$. Der Quotient $\mathbb{C}^5/V_3$ ist damit wegen Satz 7.13 nicht hausdorffsch, also auch nicht affin.

Die V_4-Wirkung

$$V_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 + \frac{1}{2}t_2^2 \\ & 1 & t_1 & t_2 + \frac{1}{2}t_1^2 & t_2 & \frac{1}{2}t_2^2 \\ & & 1 & t_1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & t_2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Die Quotientenbildung auf $\Sigma_0 = \{a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = 0\}$ ist durch Multiplikation mit $V_4(-\frac{a_2}{a_1}, -\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_2^2}{2a_1^2})$ gegeben. Die durch Regularisierung dieser Projektion gegebene V_4-invariante Abbildung $\Psi : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3$ mit $(a_1, \ldots, a_5) \mapsto (z_1, z_2, z_3)$ trennt die V_4-Bahnen auf $U_1 = \{a_1 = 0, a_2 \neq 0\}$ und $U_2 = \{a_1 = a_2 = 0\}$ noch nicht, denn $z_1 = a_1$, $z_2|_{\{a_1=0\}} = \frac{1}{2}a_2^2$ und $z_3|_{\{a_1=0\}} = \frac{1}{8}a_2^4$. Man betrachtet die rationalen Funktionen

$$x_1 := (\frac{1}{2}z_2^2 - z_3)\frac{1}{z_1} \qquad x_2 := (x_1 - z_3)\frac{1}{z_1^2} \qquad x_3 := (2z_2 - x_2^2)\frac{1}{z_1},$$

die durch Polynome in $a_1, \dots, a_5$ gegeben sind. D.h. $\Psi^*(x_i) \in \mathbb{C}[U]$ für $i = 1, 2, 3$. Es gilt

$$x_1|_{\{a_1=0\}} = \frac{1}{8}a_2^4, \qquad x_2|_{\{a_1=0\}} = a_2, \qquad x_3|_{\{a_1=0\}} = -2a_3 - a_2^2 - a_2a_4^2 + 2a_2a_5.$$

Da $\Sigma_1 = \{a_1 = 0, a_2 \neq 0, a_3 = a_4 = 0\}$ und $\Sigma_2 = \{a_1 = a_2 = 0, a_4 = a_5 = 0\}$, trennt die V_4-invariante Abbildung $\tilde{\Psi} : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^6$ mit $a \mapsto (z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3)$ die V-Bahnen. Das Bild $\tilde{\Psi}(\mathbb{C}^5)$ liegt dicht in

$$H := \{x_1z_1 = \frac{1}{2}z_2^2 - z_3, x_2z_1^2 = x_1 - z_3, x_3z_1 = 2z_2 - x_2^2\}.$$

Man rechnet nach, daß $\tilde{\Psi}(\{a_1 = 0\}) = \{z_1 = 0\} \subset H$. Also ist $\tilde{\Psi} \to H$ surjektiv.

Lemma 8.10. *Die Varietät H ist nichtsingulär und zusammenziehbar.*

Beweis. Die Abbildung $H \to \mathbb{C}$, gegeben durch $(z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3) \mapsto z_1$, ist ein Faserbündel mit Faser $\mathbb{C}^2$. Die lokalen Trivialisierungen sind $\{z_1 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ durch $(z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3) \mapsto (z_1, z_2, z_3)$ und $\{z_1 \neq -1\} \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ durch $(z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3) \mapsto (z_1, x_2, x_3)$, denn mit $x_1 = x_2z_1^2 + z_3$ und $z_2 = \frac{1}{2}(x_3z_1 + x_2^2)$ ist

$$H \cong \{(z_1, z_3, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^4 \mid z_1^3x_2 - \frac{1}{8}z_1^2x_3^2 - \frac{1}{4}z_1x_3x_2^2 - \frac{1}{8}x_2^4 + z_3(z_1 + 1) = 0\}.$$

Da die Faser $\mathbb{C}^2$ und die Basis $\mathbb{C}$ zusammenziehbar sind, ist auch das Faserbündel H zusammenziehbar. $\square$

Folgerung 8.11. *Es gilt $\mathbb{C}^5/V_4 \cong \mathbb{C}^3$.*

Beweis. Aus Satz 3.2 folgt $H \cong \mathbb{C}^5/V_4$, denn H besitzt keine singulären Punkte und ist somit normal. Mit Hilfe der Funktion z_1 folgt aus Satz 8.5, daß H isomorph zu $\mathbb{C}^3$ ist. $\square$

Die V_5-Wirkung ist durch den Basiswechsel

$$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) \mapsto (e_1, e_2, e_5, e_3, e_4)$$

äquivalent zu $\mathfrak{v}_{\beta=0}$ und damit eine Erweiterung von $\mathfrak{v} \in X(2, 4)$. Also ist $\mathbb{C}^5/V_5$ isomorph zu $\mathbb{C}^3$.

Die $\exp(\mathfrak{v}_6)$-Wirkung ist durch Vertauschung von e_3 und e_4 äquivalent zu der Wirkung von $\exp(\mathfrak{v}_{0,5})$. Damit ist $\mathbb{C}^5/V_6$ isomorph zu $\mathbb{C}^3$.

8.3.2 Bahnenraumstruktur

Das stärkste Kriterium für die Bestimmung der Bahnenraumstruktur ist die Dimension der H-Bahnen. Dazu wird die Dimension d_i der Isotropiegruppen $H_{\mathfrak{v}_i}$ bestimmt. Es gilt $d_4 = d_6 = 7$, $d_3 = d_5 = 9$, $d_2 = 13$ und $d_1 = 14$. Daraus folgt, daß die H-Wirkung auf $X(2,5)$ mindestens zwei offene Bahnen besitzt, nämlich $H.\mathfrak{v}_4$ und $H.\mathfrak{v}_6$.

Wegen $\mathfrak{v}_3 = \mathfrak{v}_{1,5}$, $\mathfrak{v}_6 = \mathfrak{v}_{0,5}$ und $\mathfrak{v}_5 = \mathfrak{v}_\beta$ liegen $\mathfrak{v}_3$ und $\mathfrak{v}_5$ im Abschluß der H-Bahn von $H.\mathfrak{v}_6$ (siehe Satz 7.8 und Lemma 7.10). Lemma 8.12, 8.13 und 8.14 vervollständigen dieses Bild zu dem Bahnenraumdiagramm, in dem Pfeile wegen der Isotropiegruppenbedingung nur nach rechts verlaufen können:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{v}_4 \arrow[dr, dotted, "/" marking] \arrow[drr] & & & \\
\mathfrak{v}_6 = \mathfrak{v}_{05} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{v}_3 = \mathfrak{v}_{1,5} \arrow[r] & \mathfrak{v}_2 \arrow[r] & \mathfrak{v}_1 \\
& \mathfrak{v}_5 = \mathfrak{v}_\beta \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Wegen Lemma 8.8 kann $\mathfrak{v}_3$ nicht im Abschluß der H-Bahn durch $\mathfrak{v}_4$ liegen. Es bleibt offen, ob $\mathfrak{v}_5$ im Abschluß der Bahn $H.\mathfrak{v}_4$ liegt.

Lemma 8.12. *Der Repräsentant $\mathfrak{v}_2$ liegt im Abschluß der H-Bahnen durch $\mathfrak{v}_3$ und $\mathfrak{v}_5$.*

Beweis. Durch den Basiswechsel $(e_1, \ldots, e_5) \mapsto (e_1, e_3, e_5, e_4, e_2)$ erhält man $\mathfrak{v}_2$ in der Form $\mathfrak{v}_2'$. Es gilt $\mathfrak{v}_5 = \lim_{\lambda\to\infty} \operatorname{diag}(1,1,1,1,1,\lambda).\mathfrak{v}_2'$.

Durch Vertauschen der dritten und der fünften Spalte erhält man $\mathfrak{v}_2$ in der Form

$$\mathfrak{v}_2'' = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&t_2&t_1 \\ 0&0&0&t_1&0&t_2 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&t_1&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Die Hintereinanderausführung der Basiswechsel

$$\begin{aligned}
(e_1, \ldots, e_5) &\mapsto (e_1, e_2, e_3 + e_2, e_4, e_5), \\
(e_1, \ldots, e_5) &\mapsto (e_1, e_2, e_3, e_4 + e_3, e_5), \\
(e_1, \ldots, e_5) &\mapsto (e_1, e_2, e_3 + e_1, e_4, e_5)
\end{aligned}$$

ergibt $\mathfrak{v}_4$ in der Form

$$\mathfrak{v}_3' = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&t_2&t_1 \\ 0&0&t_1&t_1&0&t_2 \\ 0&0&0&t_1&0&0 \\ 0&0&0&0&t_1&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mathfrak{v}_2'' = \lim_{\lambda\to 0} \operatorname{diag}(1, \lambda, 1, \lambda^{-1}, \lambda^{-3}, \lambda^{-2}).\mathfrak{v}_3'$. $\square$

Lemma 8.13. *Im Abschluß der H-Bahn durch $\mathfrak{v}_2$ liegt $\mathfrak{v}_1$.*

Beweis. Durch den Basiswechsel $(e_1, \dots, e_5) \mapsto (e_1, e_2, e_3 - e_2, e_4, e_5)$ erhält man $\mathfrak{v}_2$ in der Form $\mathfrak{v}_2'$. Es gilt $\mathfrak{v}_1 = \lim_{\lambda \to 0} \operatorname{diag}(1,1,1,\lambda,\lambda,\lambda).\mathfrak{v}_2'$. $\square$

Wegen Lemma 8.8 kann $\mathfrak{v}_3$ nicht im Abschluß der H-Bahn durch $\mathfrak{v}_4$ liegen.

Lemma 8.14. *Im Abschluß der H-Bahn durch $\mathfrak{v}_4$ liegt $\mathfrak{v}_2$.*

Beweis. Durch den Basiswechsel $(e_1, \dots, e_5) \mapsto (e_1, e_3, e_4, e_5, e_2)$ erhält man $\mathfrak{v}_2$ in der Form $\mathfrak{v}_2'$. Mit Hilfe der Basiswechsel

$$\begin{aligned}(e_1, \dots, e_5) \mapsto &(e_1, e_2 - 1, e_3, e_4, e_5),\\ (e_1, \dots, e_5) \mapsto &(e_1, e_2, e_3, e_4 - e_3, e_5),\\ (e_1, \dots, e_5) \mapsto &(e_1, e_2, e_3 - e_2, e_4, e_5)\end{aligned}$$

und $(X_1, X_2) \mapsto (X_1, X_2 - X_1)$ erhält man $\mathfrak{v}_5$ in der Form

$$\mathfrak{v}_5' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 & t_1 \\ 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_1 & -t_1 & t_1+t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1+t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1+t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mathfrak{v}_2' = \lim_{\lambda \to 0} \operatorname{diag}(1, \lambda, -\lambda^{-1}, -\lambda^{-2}, -\lambda^{-3}, \lambda^3).\mathfrak{v}_5'$. $\square$

Damit ist der Parameterraum $X(2,5)$ zusammenhängend und enthält genau zwei offene H-Bahnen. Es ist bemerkenswert, daß die Annäherung an einen Randpunkt durch die Wahl eines geeigneten Startpunktes in der großen Bahn und einer zu $\mathbb{C}^*$ isomorphen Untergruppe von H gelang.

8.4 Der Parameterraum $X(2,6)$

Die Bestimmung von Repräsentanten der H-Wirkung auf $X(2,6)$ erfolgt mit den Mitteln aus Abschnitt 8.3, sie ist jedoch umfangreicher. Deshalb soll hier direkt auf einige Resultate eingegangen werden. Eine ausführliche Fallunterscheidung ergibt, daß nur die zu $\mathfrak{v}_{0,6}$ und $\mathfrak{v}_\beta$ mit $\beta = 0$ gehörenden $\mathbb{C}^2$-Wirkungen auf $\mathbb{C}^6$ einen nicht hausdorffschen Quotienten besitzt. Damit gibt es eine offene Menge von Wirkungen mit nicht hausdorffschem Quotienten.

Bis auf eine Äquivalenzklasse $\mathfrak{v}_W$ mit hausdorffschem, aber nicht steinschem Quotienten, der im Abschnitt 8.4.2 betrachtet wird, haben alle anderen Wirkungen in $X(2,6)$, deren Quotient hausdorffsch ist, affine Quotienten. Alle affinen Quotienten sind sogar isomorph zu $\mathbb{C}^4$. Der Nachweis dieser Behauptung für das einzige Beispiel, das sich nicht auf Wirkungen in $X(2,5)$ zurückführen läßt, erfolgt im Abschnitt 8.4.3.

8.4.1 Kontinuierliche Familien von Äquivalenzklassen

Im Gegensatz zu den Parameterräumen $X(2,4)$ und $X(2,5)$ gibt es in $X(2,6)$ unendlich viele H-Bahnen.

Lemma 8.15. *Die Repräsentanten $\mathfrak{v}_{\beta_1}$ und $\mathfrak{v}_{\beta_2}$ in $X(2,6)$ liegen genau dann in einer H-Bahn, wenn $\beta_1 = \beta_2$ oder $\beta_1 = -\beta_2$ gilt.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich durch die Auswertung der Gleichung $g\mathfrak{v}_{\beta_1} = \mathfrak{v}_{\beta_2} g$. □

Die $\mathfrak{v}_\beta$ eine kontinuierliche Familie von nichtäquivalenten $\mathbb{C}^2$-Wirkungen auf $\mathbb{C}^6$ in $X(2,6)$. Dabei deformieren Wirkungen mit steinschem Quotienten zu einer Wirkung mit nicht hausdorffschem Quotienten durch $\mathfrak{v}_\beta$ mit $\beta \to 0$.

8.4.2 Einordnung des Beispiels von Winkelmann

In $X(2,6)$ gibt es den Punkt

$$\mathfrak{v}_W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die durch $V = \exp(\mathfrak{v}_W)$ induzierte Wirkung auf $\mathbb{C}^6$ ist isomorph zu der in [26] betrachteten Wirkung, deren Quotient in einer Quadrik in $\mathbb{C}^5$ liegt und nicht steinsch ist. Die Quotientenbildung wird im Abschnitt 6.2.4 näher betrachtet.

Dieses Beispiel ist aber nicht generisch, da $\mathfrak{v}_W$ im Abschluß der H-Bahn durch $\mathfrak{v}_{1,6}$ liegt. Dies wird durch die Familie

$$\mathfrak{v}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon t_1 & t_1 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon t_1 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gezeigt, denn für $\varepsilon = 0$ ist $\mathfrak{v}_\varepsilon$ gleich $\mathfrak{v}_W$ und für $\varepsilon \neq 0$ ist $\mathfrak{v}_\varepsilon$ äquivalent zu $\mathfrak{v}_{1,6}$. Das Phänomen eines Quotienten, der holomorph separabel aber nicht steinsch ist, tritt also in $X(2,6)$ nicht generisch auf.

$$\mathfrak{v}_{0,6} \longrightarrow \mathfrak{v}_{1,6} \longrightarrow \mathfrak{v}_W$$

8.4.3 Ein weiterer zu $\mathbb{C}^4$ isomorpher Quotient

In diesem Abschnitt wird die durch $V = \exp(\mathfrak{v})$ mit

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\ 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{C}^6$ induzierte $\mathbb{C}^2$-Wirkung betrachtet.

Sie läßt sich nicht auf ein Element in $X(2,5)$ projizieren und ist gegeben durch

$$(a_1,\dots,a_6) \mapsto (a_1, a_2+t_1a_1, a_3+t_1a_2+\frac{1}{2}t_1^2a_1, a_4+t_1a_3+\frac{1}{2}t_1^2a_2+\frac{1}{6}t_1^3a_1+t_2,$$
$$a_5+t_2(a_1+1), a_6+t_2a_5+\frac{1}{2}t_2^2(a_1+1)+t_1).$$

Auf der V-invarianten Teilmenge $U_0=\{a_1\neq 0\}$ ist die Quotientenabbildung $U_0\to\Sigma_0=\{a_1\neq 0, a_2=a_4=0\}$ durch Multiplikation mit $V(-\frac{a_2}{a_1}, -\frac{a_4}{a_1}+\frac{a_2a_3}{a_1^2}-\frac{a_2^3}{3a_1^3})$. Durch Regularisierung erhält man die V-invariante Abbildung $\Psi : \mathbb{C}^6\to\mathbb{C}^4$ mit $a\mapsto(z_1,z_2,z_3,z_4)$, wobei

$$z_1=a_1 \quad z_2|_{\{a_1=0\}}=-\frac{1}{2}a_2^2 \quad z_3|_{\{a_1=0\}}=-\frac{1}{3}a_2^3 \quad z_4|_{\{a_1=0\}}=\frac{1}{18}a_2^6.$$

Man betrachtet die rationalen Funktionen

$$x_2=\frac{z_3^2-2z_4(z_1+1)}{z_1^5} \quad x_3=\frac{z_2+\frac{1}{8}x_2^2}{z_1} \quad x_1=\frac{z_3+\frac{1}{24}x_2^3-\frac{1}{2}x_2x-3z_1-z_3z_1}{z_1^2}.$$

Es gilt $\Psi^*(x_i)\in\mathbb{C}[U]$ und

$$\begin{aligned}
x_2|_{\{a_1=0\}} =& 2a_2\\
x_3|_{\{a_1=0\}} =& a_3-a_6a_2+\frac{1}{2}a_5^2a_2+a_2^2\\
x_1|_{\{a_1=0\}} =& -a_4-a_2a_3-\frac{1}{2}a_2a_6^2+a_6a_2^2+\frac{1}{2}a_6a_5^2a_2+a_6a_3-\frac{1}{2}a_5^2a_2^2-\frac{1}{2}a_5^2a_3\\
&-\frac{1}{6}a_2^3-\frac{1}{8}a_5^4a_2
\end{aligned}$$

Wegen $\Sigma_1=\{a_1=0, a_2\neq 0, a_3=a_5=0\}$, $\Sigma_2=\{a_1=a_2=0, a_3\neq 0, a_4=a_5=0\}$ und $\Sigma_3=\{a_1=a_2=a_3=0, a_5=a_6=0\}$ trennt die V-invariante Abbildung $\tilde{\Psi}:\mathbb{C}^6\to\mathbb{C}^7$ mit $a\mapsto(z_1,z_2,z_3,z_4,x_1,x_2,x_3)$ die V-Bahnen. Das Bild $\tilde{\Psi}(\mathbb{C}^6)$ liegt dicht in der affinen Varietät

$$X=\{z_1^5x_2=z_3^2-2z_4(z_1+1),$$
$$z_1x_3=z_2+\frac{1}{8}x_2^2, z_1^2x_1=z_3(1-z_1)+\frac{1}{24}x_2^3-\frac{1}{2}x_2x_3z_1\}.$$

Man zeigt, daß $\tilde{\Psi}(\mathbb{C}^6)=X$ gilt. Jede der Hyperflächen $X_c:=\{x_3=c\}\subset X$ ist durch die lokalen Trivialisierungen $\{z_1\neq 0\},\{z_1\neq 1,-1\}\cong\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^2$ ein Faserbündel mit Faser $\mathbb{C}^2$ und Basis $\mathbb{C}$ und damit zusammenziehbar. Aus Satz 8.5 folgt bei Betrachtung der Funktion z_1, daß jede Hyperfläche X_c isomorph zu $\mathbb{C}^3$ ist.

Lemma 8.16. *Es gilt $X\cong X_0\times\mathbb{C}$.*

Beweis. Die Variable z_2 läßt sich eliminieren. Also ist X_0 isomorph zu

$$\{(z_1, z_3, z_4, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^5 \mid z_1^5 x_2 = z_3^2 - 2z_4(z_1 + 1), z_1^2 x_1 = z_3(1 - z_1) + \frac{1}{24} x_2^3\}.$$

Der Isomorphismus $\Phi : X \to X_0 \times \mathbb{C}$ ist auf $\{z_1 \neq 0\}$ durch

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, x_1, x_2, x_3) \mapsto ((z_1, z_3, z_4, x_1 + \frac{1}{2} x_2 x_3 z_1, x_2), x_3)$$

und auf $\{z_1 \neq 1, -1\}$ durch

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, x_1, x_2, x_3) \mapsto ((z_1, w, \frac{w^2 - z_1^5 x_2}{2(z_1 + 1)}, x_1, x_2), x_3)$$

mit $w = z_3 - \frac{x_2 x_3 z_1}{2(1 - z_1)}$ gegeben. □

Folgerung 8.17. *Es gilt* $\mathbb{C}^6/V \cong \mathbb{C}^4$.

8.4.4 Bemerkung zur Bahnenraumstruktur

Die Isotropiegruppen der H-Wirkung auf $X(2, 6)$ in $\mathfrak{v}_{0,6}$ und in $\mathfrak{v}$ aus Abschnitt 8.4.3 sind beide achtdimensional. Da der Grad der Exponentialabbildung beim Übergang zum Rand nicht kleiner werden kann (Lemma 8.8), ist die H-Bahn durch $\mathfrak{v}_{0,6}$ nicht dicht in $X(2, 6)$. Dies bedeutet auch, daß $X(2, 6)$ reduzibel ist. Die Frage, ob $X(2, n)$ für beliebige $n > 5$ zusammenhängend ist, bleibt offen. Außerdem liefern die Repräsentanten $\mathfrak{v}_\beta$ unendlich viele H-Bahnen.

A Bestimmung der Äquivalenzklassen in $X(2, 5)$

Es sei $V = \exp(t_1 X_1 + t_2 X_2)$ mit $X_1 = (a_{ij})_{i,j=0,\ldots,5}$ und $X_2 = (b_{ij})_{i,j=0,\ldots,5}$ bezüglich einer Basis, in der $\mathfrak{v}$ echt obere Dreiecksform besitzt. Es gibt höchstens zwei linear unabhängige, lineare Invariante.

1. Es gibt zwei linear unabhängige, lineare Invariante z_1 und z_2.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & a_{03}t_1 + b_{03}t_2 & * & * \\ & 0 & 0 & a_{13}t_1 + b_{13}t_2 & * & * \\ & & 0 & a_{23}t_1 + b_{23}t_2 & * & * \\ & & & 0 & a_{34}t_1 + b_{34}t_2 & * \\ & & & & 0 & * \\ & & & & & 0 \end{array}$$

   Da z_3 keine Semiinvariante ist, gilt (a_{13}, b_{13}) oder (a_{23}, b_{23}) verschieden von $(0, 0)$. Man kann $a_{13} = 1$, $b_{13} = a_{23} = 0$ und wegen Lemma 8.4 auch $a_{03} = 0$ annehmen. Aus $K_{14} = 0$ folgt $b_{34} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & b_{03}t_2 & * & * \\ & 0 & 0 & t_1 & * & * \\ & & 0 & b_{23}t_2 & * & * \\ & & & 0 & a_{34}t_1 & * \\ & & & & 0 & * \\ & & & & & 0 \end{array}$$

(a) $b_{03} = b_{23} = 0$: Man kann $a_{14} = a_{15} = 0$ annehmen. Außerdem muß $(a_{04}, b_{04}), (a_{05}, b_{05}) \neq (0,0)$ gelten

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{04}t_1{+}b_{04}t_2 & a_{05}t_1{+}b_{05}t_2 \\ & 0 & 0 & t_1 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\ & & 0 & 0 & * & * \\ & & & 0 & a_{34}t_1 & * \\ & & & & 0 & * \\ & & & & & 0 \end{array}$$

i. $b_{04} = 0$: Also gilt $a_{04} \neq 0$ und wegen Lemma 8.4 $a_{34} = 0$. Man kann $a_{04} = b_{05} = 1$ und $a_{05} = 0$ annehmen. Aus der MB mit $t_1 = 0$ folgt $b_{35} = b_{45} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ & 0 & 0 & t_1 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\ & & 0 & 0 & a_{24}t_1{+}b_{24}t_2 & * \\ & & & 0 & 0 & a_{35}t_1 \\ & & & & 0 & a_{45}t_1 \\ & & & & & 0 \end{array}$$

Wegen Lemma 8.4 gibt es nur die Möglichkeiten

A. $b_{24} = a_{24} = 0$: Da z_4 keine Semiinvariante ist, gilt $b_{14} \neq 0$. Aus $K_{15} = 0$ folgt $a_{45} = 0$ und aus der MB mit $t_1 = 0$ $b_{25} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ & 0 & 0 & t_1 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\ & & 0 & 0 & 0 & a_{25}t_1 \\ & & & 0 & 0 & a_{35}t_1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{array}$$

Da z_4 keine Semiinvariante ist, gilt $b_{14} \neq 0$ und ein Basiswechsel in $\mathbb{C}^5$ und $\mathfrak{v}$ führt zu $b_{15} = 0$. Da auch z_5 keine Semiinvariante ist, erhält man im Fall $a_{35} = 0$ durch Konjugation mit einer Diagonalmatrix den Repräsentanten

$$\mathfrak{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ & 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & t_1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

und im Fall $a_{35} \neq 0$ durch den Basiswechsel $(e_1, \ldots, e_5) \mapsto (e_1, e_2, e_3 + \frac{a_{25}}{a_{35}} e_2, e_4, e_5)$ und Konjugation mit einer Diagonalmatrix den Repräsentanten

$$\mathfrak{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ & 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & t_1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

B. $b_{24} \neq 0$: Durch einen Basiswechsel in $\mathbb{C}^5$ und $\mathfrak{v}$ erreicht man $a_{24} = 0$. Man kann $b_{24} = 1$ annehmen und der Basiswechsel

$(e_1, \dots, e_5) \mapsto (e_1, e_2 + b_{14}e_1, e_3, e_4, e_5)$ liefert $b_{14} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\
 & 0 & 0 & t_1 & 0 & b_{15}t_2 \\
 & & 0 & 0 & t_2 & * \\
 & & & 0 & 0 & a_{35}t_1 \\
 & & & & 0 & a_{45}t_1 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Aus der MB folgt $a_{45} = a_{35} = 0$ und dann mit Lemma 8.2 ein Widerspruch zur MB.

ii. $b_{04} \neq 0$: Man kann $b_{04} = a_{05} = 1$ und $a_{04} = b_{05} = 0$ annehmen. Aus Lemma 8.4 folgt $b_{24} = 0$ und aus $K_{05} = 0$ $a_{45} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\
 & 0 & 0 & t_1 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\
 & & 0 & 0 & a_{24}t_1 & * \\
 & & & 0 & a_{34}t_1 & * \\
 & & & & 0 & b_{45}t_2 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Um in diesem Fall zu bleiben, muß $b_{45} \neq 0$ sein. Aus $K_{25} = K_{35} = 0$ folgt $a_{34} = a_{35} = 0$ und damit $b_{14} \neq 0$, da z_4 keine Semiinvariante ist. Das ist ein Widerspruch zur MB mit $t_1 = 0$.

(b) $b_{03} = 0$, $b_{23} \neq 0$: Man kann $b_{23} = 1$ annehmen. Aus $K_{24} = 0$ folgt $a_{34} = 0$. Deshalb kann man $a_{04} = b_{05} = 1$ und $a_{05} = b_{04} = 0$ annehmen.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\
 & 0 & 0 & t_1 & a_{14}t_1+b_{14}t_2 & a_{15}t_1+b_{15}t_2 \\
 & & 0 & t_2 & a_{24}t_1+b_{24}t_2 & a_{25}t_1+b_{25}t_2 \\
 & & & 0 & 0 & a_{35}t_1+b_{35}t_2 \\
 & & & & 0 & a_{45}t_1+b_{45}t_2 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Aus der MB mit $t_1 = 0$ folgt $b_{45} = b_{35} = 0$. Mit $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) \mapsto (e_1, e_2, e_3, e_4 - b_{24}e_3, e_5 - b_{25}e_3)$ vereinfacht sich die Matrix zu

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\
 & 0 & 0 & t_1 & a_{14}t_1+b_{14}t_2 & a_{15}t_1+b_{15}t_2 \\
 & & 0 & t_2 & a_{24}t_1 & a_{25}t_1 \\
 & & & 0 & 0 & a_{35}t_1 \\
 & & & & 0 & a_{45}t_1 \\
 & & & & & 0
\end{array}.$$

Aus $K_{25} = 0$ folgt $a_{35} = 0$.

i. $a_{45} = 0$: Falls $a_{25} = 0$ ist, so folgt aus der MB mit $t_2 = 0$, daß $a_{24} = 0$ ist. Ist aber $a_{25} \neq 0$, so kommt man mit

$$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) \mapsto (e_1, e_2 + \frac{a_{24}}{a_{25}}e_1, e_3, e_4 - \frac{a_{24}}{a_{25}}e_5, e_5)$$

und $(X_1, X_2) \mapsto (X_1 - \frac{a_{24}}{a_{25}}X_2, X_2)$ zu $a_{24} = 0$. Man kann also $a_{24} = 0$ annehmen.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\
 & 0 & 0 & t_1 & a_{14}t_1+b_{14}t_2 & a_{15}t_1+b_{15}t_2 \\
 & & 0 & t_2 & 0 & a_{25}t_1 \\
 & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Mit $t_2 = 0$ oder $z_1 = 0$ gibt es keinen Widerspruch zur MB, also wird sie mit $t_2 = 1$ und $z_1 \neq 0$ getestet. Wann gibt es dann für das Gleichungssystem $z_2 + t_1 z_1 = 0$, $t_1 = a_{14} t_1 z_1 + b_{14} z_1$, $1 = a_{15} t_1 z_1 + b_{15} z_1 + a_{25} t_1 z_2$ keine Lösung? Wegen $z_1 \neq 0$ bleiben die Gleichungen $1/z_1 = b_{15} + a_{15} t_1 - a_{25} t_1^2$ und $b_{14} + (a_{14} - b_{15}) t_1 - a_{15} t_1^2 + a_{25} t_1^3 = 0$. Die MB ist erfüllt, falls eine der Gleichungen keine Lösung besitzt oder alle Linearfaktoren von $p(x) := b_{14} + (a_{14} - b_{15}) x - a_{15} x^2 + a_{25} x^3$ auch Linearfaktoren von $q(x) := b_{15} + a_{15} x - a_{25} x^2$ sind.

Im ersten Fall ergibt sich $a_{15} = a_{25} = b_{15} = 0$ oder $a_{15} = a_{25} = 0$, $a_{14} = b_{15}$ und $b_{14} \neq 0$. Dies bedeutet, daß z_5 eine Semiinvariante ist oder daß man Vertauschung von Spalten zum Fall $b_{23} = 0$ zurückkehren kann.

Im zweiten Fall gilt $p(x) = q(x)x + r(x)$ mit $r(x) = a_{14} x + b_{14}$. Da z_4 keine Semiinvariante ist, muß $a_{14} \neq 0$, $r(x)$ ein Teiler von $q(x)$ und $r(x)^3 = \lambda p(x)$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ sein. Man erhält keine weiteren Repräsentanten ohne Semiinvarianten.

ii. $a_{45} \neq 0$: Aus $K_{15} = 0$ folgt $b_{14} = 0$. Die Auswertung der MB mit $t_2 = 0$ ergibt $a_{24} = 0$ und mit $t_2 \neq 0$ dann $a_{14} = 0$. Damit wäre auch z_4 eine Semiinvariante.

(c) $b_{03} \neq 0$: Hier folgt aus Lemma 8.4 $b_{23} = 0$ und wegen $K_{04} = 0$ gilt $a_{34} = 0$. Man kann $b_{03} = 1$ und $b_{04} = b_{05} = 0$ annehmen. Um in diesem Fall zu bleiben muß $(a_{24}, b_{24}) \neq (0, 0)$ sein.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & t_2 & a_{04} t_1 & a_{05} t_1 \\
 & 0 & 0 & t_1 & * & * \\
 & & 0 & 0 & a_{24} t_1 + b_{24} t_2 & * \\
 & & & 0 & 0 & * \\
 & & & & 0 & * \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

i. $a_{04} = 0$: man kann $a_{05} = 1$ annehmen und aus der MB mit $t_2 = 0$ folgt $a_{45} = a_{35} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & t_2 & 0 & t_1 \\
 & 0 & 0 & t_1 & * & * \\
 & & 0 & 0 & a_{24} t_1 + b_{24} t_2 & * \\
 & & & 0 & 0 & b_{35} t_2 \\
 & & & & 0 & b_{45} t_2 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Aus der MB folgt $b_{35} = b_{45} = 0$. Damit kommt man zurück zum Fall $b_{03} = 0$.

ii. $a_{04} \neq 0$: Wegen Lemma 8.4 muß $b_{24} \neq 0$ sein. Damit kann man durch einen Basiswechsel $a_{24} = a_{05} = 0$ und $b_{24} = a_{04} = 1$ erreichen.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 & 0 \\
 & 0 & 0 & t_1 & * & * \\
 & & 0 & 0 & t_2 & * \\
 & & & 0 & 0 & * \\
 & & & & 0 & * \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Aus der MB folgt $a_{35} = a_{45} = b_{35} = b_{45} = 0$. Damit kommt man zurück zu einem der Fälle mit $b_{03} = 0$.

2. Es gibt eine lineare Invariante z_1. Wegen Lemma 8.2 kann man $a_{02} = b_{02} = b_{12} = 0$ und $a_{12} = 1$ annehmen. Aus $K_{13} = 0$ folgt $b_{23} = 0$. Außerdem

erreicht man durch einen Basiswechsel $a_{13} = a_{14} = a_{15} = 0$.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & a_{03}t_1+b_{03}t_2 & * & * \\ & 0 & t_1 & b_{13}t_2 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\ & & 0 & a_{23}t_1 & * & * \\ & & & 0 & * & * \\ & & & & 0 & * \\ & & & & & 0 \end{matrix}$$

(a) $b_{03} = a_{03} = 0$: Es muß $(a_{04}, b_{04}), (a_{05}, b_{05}) \neq (0, 0)$ sein.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{04}t_1+b_{04}t_2 & a_{05}t_1+b_{05}t_2 \\ & 0 & t_1 & b_{13}t_2 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\ & & 0 & a_{23}t_1 & * & * \\ & & & 0 & * & * \\ & & & & 0 & * \\ & & & & & 0 \end{matrix}$$

i. $b_{04} = 0$: Man kann $a_{04} = b_{05} = 1$ und $a_{05} = 0$ annehmen. Wegen Lemma 8.4 gilt $a_{34} = b_{45} = 0$.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ & 0 & t_1 & b_{13}t_2 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\ & & 0 & a_{23}t_1 & * & * \\ & & & 0 & b_{34}t_2 & * \\ & & & & 0 & a_{45}t_1 \\ & & & & & 0 \end{matrix}$$

A. $b_{13} = 0$: Daraus folgt $a_{23} \neq 0$, da z_3 keine Invariante ist. Man kann $a_{23} = 1$ annehmen. Aus $K_{24} = 0$ folgt $b_{34} = 0$ und mit einem Basiswechsel $a_{24} = a_{25} = 0$.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ & 0 & t_1 & 0 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\ & & 0 & t_1 & b_{24}t_2 & b_{25}t_2 \\ & & & 0 & 0 & a_{35}t_1+b_{35}t_2 \\ & & & & 0 & a_{45}t_1 \\ & & & & & 0 \end{matrix}$$

Aus der MB folgt $b_{35} = 0$. Wegen $K_{14} = 0$ gilt $b_{24} = 0$. Aus der MB folgt $b_{25} = 0$. Da z_4 keine Semiinvariante ist, gilt $b_{14} \neq 0$. Durch Basiswechsel in $\mathbb{C}^5$ und $\mathfrak{v}$ erhält man $b_{14} = 1$ und $b_{15} = 0$.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ & 0 & t_1 & 0 & t_2 & 0 \\ & & 0 & t_1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & a_{35}t_1 \\ & & & & 0 & a_{45}t_1 \\ & & & & & 0 \end{matrix}$$

Wegen $K_{15} = 0$ gilt nun $a_{45} = 0$. Da auch z_5 keine Semiinvariante ist, gilt $a_{35} \neq 0$. Durch Konjugation mit der Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(1, 1, \lambda, \lambda^2, \lambda, \lambda)$ mit $\lambda^2 = a_{35}$ ergibt sich der Repräsentant

$$\mathfrak{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\ & 0 & t_1 & 0 & t_2 & 0 \\ & & 0 & t_1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & t_1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

B. $b_{13} \neq 0$: Man kann $b_{13} = 1$ annehmen und erhält nach Basiswechsel $b_{14} = b_{15} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\
 & 0 & t_1 & t_2 & 0 & 0 \\
 & & 0 & a_{23}t_1 & a_{24}t_1+b_{24}t_2 & a_{25}t_1+b_{25}t_2 \\
 & & & 0 & b_{34}t_2 & b_{25}t_1+b_{35}t_2 \\
 & & & & 0 & a_{45}t_1 \\
 & & & & & 0
\end{array}.$$

Aus $K_{14} = 0$ folgt $b_{24} = 0$.

- $b_{34} = 0$: Nun muß $a_{24} \neq 0$ sein, da z_4 keine Semiinvariante ist. Basiswechsel führt zurück zu $b_{13} = 0$.
- $b_{34} \neq 0$: Aus $K_{24} = K_{35} = 0$ folgt $a_{23} = a_{45} = b_{24} = 0$. Man kann $b_{34} = 1$ annehmen.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 \\
 & 0 & t_1 & t_2 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & a_{24}t_1 & a_{25}t_1+b_{25}t_2 \\
 & & & 0 & t_2 & b_{25}t_1+b_{35}t_2 \\
 & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Aus der MB mit $z_1 = z_2 = 0$ folgt $b_{25} = b_{35} = 0$. Daraus folgt $a_{25} \neq 0$, da z_5 keine Semiinvariante ist. Nun ist die MB verletzt.

ii. $b_{04} \neq 0$: Man kann $b_{04} = a_{05} = 1$ und $a_{04} = b_{05} = 0$ annehmen. Aus $K_{05} = 0$ folgt $a_{45} = 0$. Um in diesem Fall zu bleiben, muß $b_{45} \neq 0$ sein. Man kann $b_{45} = 1$ annehmen.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\
 & 0 & t_1 & b_{13}t_2 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\
 & & 0 & a_{23}t_1 & * & * \\
 & & & 0 & a_{34}t_1+b_{34}t_2 & a_{35}t_1+b_{35}t_2 \\
 & & & & 0 & t_2 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Aus $K_{35} = 0$ folgt $a_{34} = 0$ und aus der MB $b_{34} = 0$ und $a_{35} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\
 & 0 & t_1 & b_{13}t_2 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\
 & & 0 & a_{23}t_1 & a_{24}t_1+b_{24}t_2 & a_{25}t_1+b_{25}t_2 \\
 & & & 0 & 0 & b_{35}t_2 \\
 & & & & 0 & t_2 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Aus der MB mit $t_1 = 0$ folgt $b_{24} = 0$. Wegen $K_{15} = 0$ folgt $b_{25} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\
 & 0 & t_1 & b_{13}t_2 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\
 & & 0 & a_{23}t_1 & a_{24}t_1 & a_{25}t_1 \\
 & & & 0 & 0 & b_{35}t_2 \\
 & & & & 0 & t_2 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

A. $a_{23} = 0$: Da z_3 keine Semiinvariante ist, gilt $b_{13} \neq 0$. Man kann $b_{13} = 1$ annehmen. Ein Basiswechsel führt zu $b_{14} = b_{15} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\
 & 0 & t_1 & t_2 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & a_{24}t_1 & a_{25}t_1 \\
 & & & 0 & 0 & b_{35}t_2 \\
 & & & & 0 & t_2 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Da z_4 keine Semiinvariante ist, gilt $a_{24} \neq 0$. Dies widerspricht der MB.

B. $a_{23} \neq 0$: Ein Basiswechsel liefert $a_{24} = a_{25} = 0$. Man kann $a_{23} = 1$ annehmen.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\
 & 0 & t_1 & b_{13}t_2 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\
 & & 0 & t_1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & b_{35}t_2 \\
 & & & & 0 & t_2 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Da z_4 keine Semiinvariante ist, gilt $b_{14} \neq 0$. Wegen der MB gilt auch $b_{13} \neq 0$. Man kann $b_{13} = 1$ annehmen. Aus $K_{25} = 0$ folgt $b_{35} = 0$. Ein Basiswechsel liefert $b_{15} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\
 & 0 & t_1 & t_2 & b_{14}t_2 & 0 \\
 & & 0 & t_1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & t_2 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Durch Konjugation mit einer Diagonalmatrix erhält man den Repräsentanten

$$\mathfrak{v}_4 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\
 & 0 & t_1 & t_2 & t_2 & 0 \\
 & & 0 & t_1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & t_2 \\
 & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

(b) $b_{03} = 0$, $a_{03} \neq 0$: Man kann $a_{03} = 1$ annehmen. Wegen Lemma 8.4 gilt $a_{23} = 0$. Da z_3 keine Semiinvariante ist, gilt $b_{13} \neq 0$. Man kann $b_{13} = 1$ annehmen. Aus $K_{04} = 0$ folgt $b_{34} = 0$. Ein Basiswechsel liefert $a_{04} = a_{05} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & t_1 & b_{04}t_2 & b_{05}t_2 \\
 & 0 & t_1 & t_2 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\
 & & 0 & 0 & * & * \\
 & & & 0 & a_{34}t_1 & * \\
 & & & & 0 & * \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

i. $b_{04} = 0$: Man kann $b_{05} = a_{34} = 1$ annehmen, da man in diesem Fall bleiben will. Aus $K_{05} = K_{35} = 0$ folgt $b_{35} = b_{45} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 \\
 & 0 & t_1 & t_2 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\
 & & 0 & 0 & a_{24}t_1+b_{24}t_2 & a_{25}t_1+b_{25}t_2 \\
 & & & 0 & t_1 & a_{35}t_1 \\
 & & & & 0 & a_{45}t_1 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Aus $K_{13} = 0$ folgt $b_{24} = 1$ und $b_{25} = a_{35}$. Ein Basiswechsel führt zu $a_{24} = b_{14} = a_{35} = 0$. Wegen $K_{25} = 0$ gilt $a_{45} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 \\
 & 0 & t_1 & t_2 & 0 & b_{15}t_2 \\
 & & 0 & 0 & t_2 & a_{25}t_1 \\
 & & & 0 & t_1 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Es gilt $a_{25} \neq 0$, weil sonst eine Linearkombination von z_3 und z_5 eine Semiinvariante ist. Man kann $a_{25} = 1$ annehmen. Ein Basiswechsel liefert den Repräsentanten

$$\mathfrak{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 \\ & 0 & t_1 & t_2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & t_2 & t_1 \\ & & & 0 & t_1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

ii. $b_{04} \neq 0$: Man kann $b_{04} = 1$ und $b_{04} = 0$ annehmen. Aus Lemma 8.4 folgt $b_{24} = 0$. Ein Basiswechsel liefert $b_{14} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 \\ & 0 & t_1 & t_2 & 0 & b_{15}t_2 \\ & & 0 & 0 & a_{24}t_1 & * \\ & & & 0 & a_{34}t_1 & * \\ & & & & 0 & a_{45}t_1+b_{45}t_2 \\ & & & & & 0 \end{array}$$

Aus $K_{14} = 0$ folgt $a_{34} = 0$. Da z_4 keine Semiinvariante ist, gilt $a_{24} \neq 0$. Man kann $a_{24} = 1$ annehmen. Aus $K_{25} = 0$ folgt $b_{45} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 \\ & 0 & t_1 & t_2 & 0 & b_{15}t_2 \\ & & 0 & 0 & t_1 & a_{25}t_1+b_{25}t_2 \\ & & & 0 & 0 & a_{35}t_1+b_{35}t_2 \\ & & & & 0 & a_{45}t_1 \\ & & & & & 0 \end{array}$$

Um in diesem Fall zu bleiben, muß $a_{45} \neq 0$ sein. Man kann $a_{45} = 1$ annehmen. Aus $K_{05} = 0$ folgt $b_{35} = 1$. Aus $K_{15} = 0$ folgt $b_{25} = a_{35}$.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 \\ & 0 & t_1 & t_2 & 0 & b_{15}t_2 \\ & & 0 & 0 & t_1 & a_{25}t_1+a_{35}t_2 \\ & & & 0 & 0 & a_{35}t_1+t_2 \\ & & & & 0 & t_1 \\ & & & & & 0 \end{array}$$

Ein Basiswechsel liefert $a_{35} = 0$ und dann $a_{25} = 0$ und $b_{15} = 0$. Man erhält den Repräsentanten

$$\mathfrak{v}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 \\ & 0 & t_1 & t_2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & t_1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & t_2 \\ & & & & 0 & t_1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $b_{03} \neq 0$: Man kann $b_{03} = 1$ und $a_{03} = 0$ annehmen. Mit einem Basiswechsel kommt man zu $b_{04} = b_{05} = 0$. Wegen $K_{04} = 0$ gilt $a_{34} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & t_2 & a_{04}t_1 & a_{05}t_1 \\ & 0 & t_1 & b_{13}t_2 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\ & & 0 & a_{23}t_1 & a_{24}t_1+b_{24}t_2 & a_{25}t_1+b_{25}t_2 \\ & & & 0 & b_{34}t_2 & a_{35}t_1+b_{35}t_2 \\ & & & & 0 & a_{45}t_1+b_{45}t_2 \\ & & & & & 0 \end{array}$$

Um in diesem Fall zu bleiben, muß $b_{34} \neq 0$. Aus $K_{24} = 0$ folgt $a_{23} = 0$. Aus $K_{35} = 0$ folgt $a_{45} = 0$. Man kann $b_{34} = 1$ annehmen.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & t_2 & a_{04}t_1 & a_{05}t_1 \\
 & 0 & t_1 & b_{13}t_2 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\
 & & 0 & 0 & a_{23}t_1+b_{24}t_2 & a_{25}t_1+b_{25}t_2 \\
 & & & 0 & t_2 & a_{35}t_1+b_{35}t_2 \\
 & & & & 0 & b_{45}t_2 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Da z_3 keine Semiinvariante ist, gilt $b_{13} \neq 0$. Man kann $b_{13} = 1$ annehmen. Aus der MB folgt $b_{45} = 0$ und dann nach einem Basiswechsel $b_{35} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & t_2 & a_{04}t_1 & a_{05}t_1 \\
 & 0 & t_1 & t_2 & b_{14}t_2 & b_{15}t_2 \\
 & & 0 & 0 & a_{23}t_1+b_{24}t_2 & a_{25}t_1+b_{25}t_2 \\
 & & & 0 & t_2 & a_{35}t_1 \\
 & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Aus $K_{05} = 0$ folgt $a_{35} = 0$. Damit kann man zum Fall $b_{03} = 0$ zurückkehren.

Literatur

[1] Bialynicki-Birula, A., Hochschild, G., Mostow, G.D., Extensions of Representations of algebraic linear groups, Amer. J. Math. 85 (1963), 131-144

[2] Bingener, J., Holomorph-prävollständige Resträume zu analytischen Mengen in steinschen Räumen, J.r.a.M. 285, 149-171, 1976

[3] Brenner, H., On superheight conditions for the affineness of open subsets, J.Algebra 247 (2002), no.1, 37-56

[4] Cline, E., Parshall, B., Scott, L., Induced modules and affine quotients, Math. Ann. 230, 1-14, (1977)

[5] Corwin, L., Greenleaf, F.P., Representations of nilpotent Lie groups and their applications Part 1: Basic theory and examples, Cambridge University Press 1990

[6] Greuel, G.-M., Pfister, G., Geometric quotients of unipotent group actions, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. 67, No.1, 75-105 (1993)

[7] Harris, J., Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer 1995

[8] Hartshorne, R., Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer 1997

[9] Holmann, H., Quotientenräume komplexer Mannigfaltigkeiten nach komplexen Lieschen Automorphismengruppen, Math. Ann. 139, 383-402, (1960)

[10] Huckleberry, A.T., Oeljeklaus, E., Homogeneous spaces from the complex analytic viewpiont. Manifolds and Lie Groups, Progress in Mathematics 14, Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser 1981

[11] Kaliman, S., Zaidenberg, M., Miyanishi's charakterization of the affin 3-space does not hold in higher dimensions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 50, 1649-1669, no.6 (2000)

[12] Kaliman, S., Zaidenberg, M., Families of affin planes, the existence of a cylinder, Michigan Math. J., 49, 353-367, no.2 (2001)

[13] Kraft, H.-P., Algebraic group actions on affin spaces, Geometry today (Rome, 1984), 251-265, Prog. Math. 60

[14] Matsushima, Y., Morimoto, A., Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein, Bull. Soc. math. France, 88, 137-155 (1960)

[15] Matsushima, Y., Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes, Nagoya Math. J., 16, (1960), 205-218

[16] Matsushima, Y., Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes II, Nagoya Math. J., 18 (1961), 153-164

[17] On the 14^{th} problem of Hilbert, Am. J. Math. 81, 766-772

[18] Neeman, A., Steins, affins and Hilbert's fourteenth problem, Ann. of Math. 127 (1988), no.2, 229-244

[19] Parshin, A.N., Shafarevich, I.R., Algebraic Geometry IV, EMS Vol.55, Part II: Invariant Thoery, Springer 1994

[20] Onishchik, A.L., Vinberg, E.B., Lie Groups and Algebraic Groups, Springer, 1990

[21] Raghunathan, M.S., Principal bundles admitting a rational section, Invent. Math. 116, no.1-3, 409-423, (1994)

[22] Snow, D., Reduktive Group Actions on Stein Spaces, Math. Ann. 259, 79-97 (1982)

[23] Snow, D., Stein quotients of connected complex Lie groups, manuscripta math. 50, 185-214, (1985)

[24] Snow, D., Triangular actions on $\mathbb{C}^3$, manuscripta math. 60, 407-414, (1988)

[25] Snow, D., The Role of exotic affine spaces in the classification of homogeneous affine varieties, preprint

[26] Winkelmann, J., On free holomorphic $\mathbb{C}$-actions on $\mathbb{C}^n$ and homogeneous Stein spaces, Math.Ann. 286, 593-612, (1990)