Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 6

Abgabetermin: 26. Mai 2000

1. Berechne die Bogenlänge von der durch $\gamma : t \mapsto (t^2, t^3)$ definierten Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

2. Sei $c \in \mathbb{R}^*$ und $f(t) = (e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t)$. Skizziere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, beweise, dass $f(\mathbb{R})$ jeden Kreis mit Radius $r > 0$ um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet und bestimme den Schnittwinkel (in Abhängigkeit von r).

3. Reparametrisiere die durch $\gamma(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t, 1)$ gegebene Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ auf Bogenlänge.

4. Man finde eine Parameterdarstellung der Kurve
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1/4\}$$

5. Sei p eine Primzahl. Für $x \in \mathbb{Q}^*$ mit $x = p^s \frac{m}{n}$, $m, s \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, wobei weder m noch n durch p teilbar ist, definiere $|x|_p = p^{-s}$ und $|0|_p = 0$. Zeige, dass $d(x,y) = |x - y|_p$ eine Metrik auf $\mathbb{Q}$ definiert.

(∗) 6. Zeige, dass durch $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(t) = t \sin(1/t)$ für $t \neq 0$ eine stetige, nicht rektifizierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert wird.