Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 8

Abgabetermin: 9. Juni 2000

1. Zeige, dass das uneigentliche Integral

$$E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

   für jedes $k \in [0,1]$ konvergiert.

2. Seien $A, B > 0$ und E die durch

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : Ax^2 + By^2 = 1\}$$

   beschriebene Ellipse. Drücke die Bogenlänge von E mit Hilfe der Funktionen $E(k)$ aus.

3. Man zeige, dass $\det : Mat(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und bestimme $D(\det)$ in $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

4. Sei $V = \mathcal{C}^0([0,1])$ und $I : V \to \mathbb{R}$ die durch $I(f) = \int_0^1 (f(t))^2 \, dt$ gegebene Abbildung.

   Für welche $g \in V$ ist I in g differenzierbar?

5. Seien V, W normierte Vektorräume und $L(V,W)$ der Raum der stetigen linearen Abbildungen von V nach W. Zeige, dass

$$||f|| = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{||f(v)||}{||v||}$$

   eine Norm auf $L(V,W)$ definiert, sodass die durch $\zeta : (v,f) \mapsto f(v)$ gegebene Abbildung $\zeta : V \times L(V,W) \to W$ stetig ist.

(∗) 6. Zeige, dass ζ differenzierbar ist.