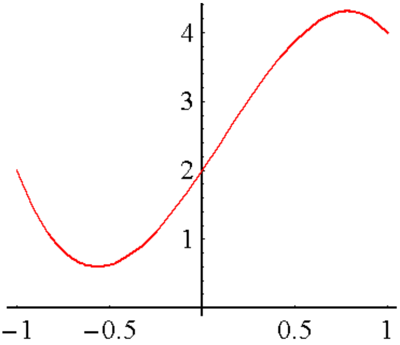
Einführung in die Variationsrechnung

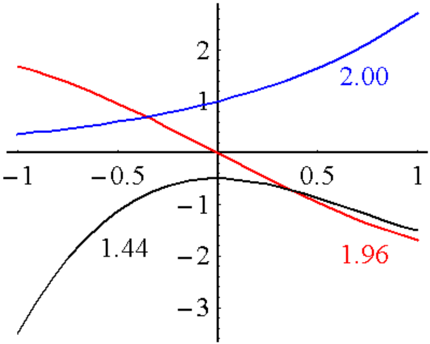
Robert Kohlleppel

Seminar zur theoretischen Elektrotechnik

Gliederung

Funktion ↔ Funktional

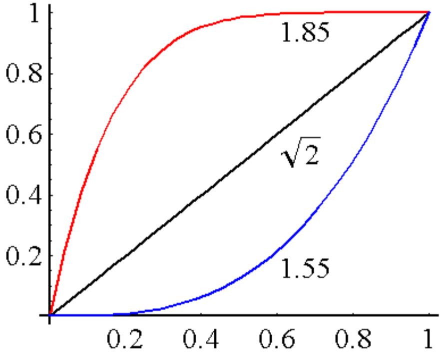




f: $R \mapsto R$

Funktional: $\mathit{Funktionenraum} \mapsto R$

Aufgabenstellung



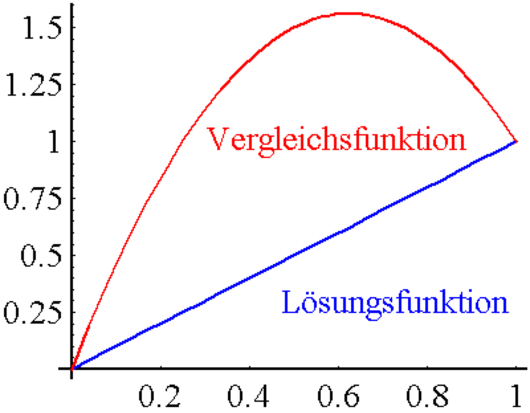
gegeben

- das Funktional $J(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$
- Randwerte $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$

gesucht

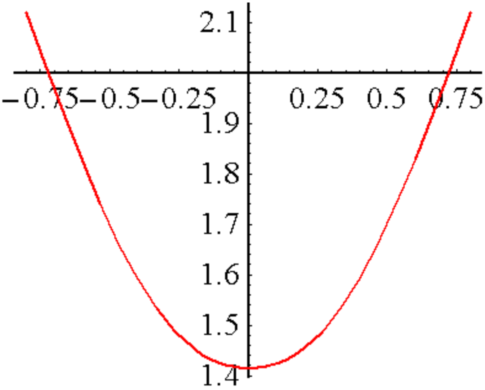
die Funktion y^*, die das Funktional J minimiert

Konstruktion einer Vergleichsfunktion



- Annahme: y^* minimiert das Funktional
- Vergleichsfunktion $\tilde{y} = y^* + \epsilon v$
  ϵ reell, $v(a) = v(b) = 0$

Funktional $\rightarrow$ einparametrige Funktion



- Einsetzen der Vergleichsfunktion $\tilde{y}$ in das Funktional J
- Definition der Funktion $\tilde{J}(\epsilon) = J(\tilde{y}) = J(y^* + \epsilon v)$
- $\tilde{J}(\epsilon)$ minimal bei $\epsilon = 0$
- notwendiges Kriterium: $\left(\frac{d}{d\epsilon}\tilde{J}(\epsilon)\right)_{\epsilon=0} = 0$

Herleitung der Eulerschen Differenzialgleichung

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{d\epsilon}\tilde{J}(\epsilon)\right)_{\epsilon=0} &= \left(\frac{d}{d\epsilon}\int_a^b F(x, y^* + \epsilon v, y^{*'} + \epsilon v')dx\right)_{\epsilon=0} = 0 \\
\Rightarrow \int_a^b F_y v + F_{y'} v' dx &= \int_a^b F_y v dx + \int_a^b F_{y'} v' dx = 0 \\
\Rightarrow \int_a^b F_y v dx + \left[F_{y'} v\right]_a^b &- \int_a^b \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) v dx = 0 \\
\Rightarrow \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right] v dx &= 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Die Eulersche Differenzialgleichung

- Die notwendige Bedingung $\left(\frac{d}{d\epsilon}\tilde{J}(\epsilon)\right)_{\epsilon=0} = \left(\frac{d}{d\epsilon}\int_a^b F(x, y^* + \epsilon v, y^{*\prime} + \epsilon v')dx\right)_{\epsilon=0} = 0$ führt auf die Eulersche Differenzialgleichung.
- Jede Lösungsfunktion y^* muß die Eulersche DGL erfüllen.
- Das Erfüllen der Eulerschen DGL ist kein hinreichendes Kriterium.

Eulersche Differenzialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Aufgabenstellung mit dem Begriff *Variation* (1)

Definition

- *Variation* $\delta y(x) := \tilde{y}(x) - y^*(x) = \epsilon v(x)$
- *erste Variation* des Funktionals J
  $\delta J(y) = \epsilon \left(\frac{d\tilde{J}(\epsilon)}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0}$

gegeben

- das Funktional $J(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$
- Randwerte $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$

gesucht

- die Funktion y^*, für die die erste Variation des Funktionals $\delta J(y)$ verschwindet

Von einer linearen DGL zur Variationsaufgabe

lineare DGL gegeben

$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$

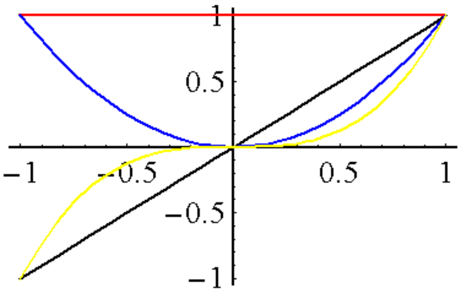
zugehörige Variationsaufgabe

$J(y) = \int_a^b (py'^2 - qy^2 + 2ry)dx$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$
mit $p(x) = e^{\int a(x)dx}$, $q(x) = p(x)b(x)$, $r(x) = p(x)c(x)$

direkter Lösungsweg: Ritz-Methode

Annäherung der Lösungsfunktion durch eine endliche Summe.

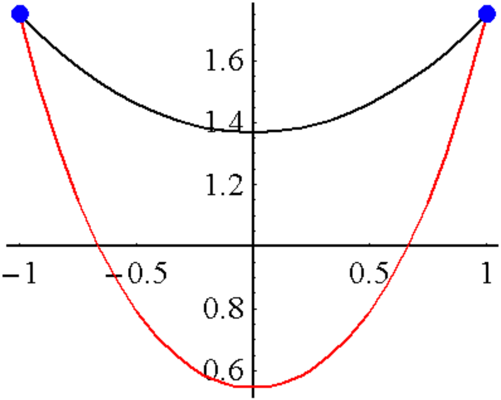
- $y^* \approx y_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i$
- Es werden linear unabhängige Basisfunktionen u_i ausgewählt.
- Die Koeffizienten α_i sind unbekannt und müssen bestimmt werden.



Ritz-Methode (2)

- Annäherung z. B. mit den Polynomen $1, x, x^2, x^3$
- Funktional $\rightarrow$ Funktion der α_i: $\widehat{J}(\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix})$
- Notwendiges Kriterium *grad* $\widehat{J}(\vec{\alpha}) = 0 \rightarrow$ Gleichungssystem für Koeeffizienten α_i
- Das finite Elemente-Verfahren ist ein Sonderfall der Ritz-Methode.

Beispiel: Mantelfläche eines Rotationskörpers minimieren



gesucht

- Rotationskörper mit minimaler Mantelfläche
- Radius $= y(x)$, $y(-1) = y(1) = 1.75$

zur Lösung

- zwei Lösungen der Eulerschen DGL
- eine der Lösungen minimiert die Mantelfläche nicht

natürliche Randbedingugnen, Nebenbedingungen

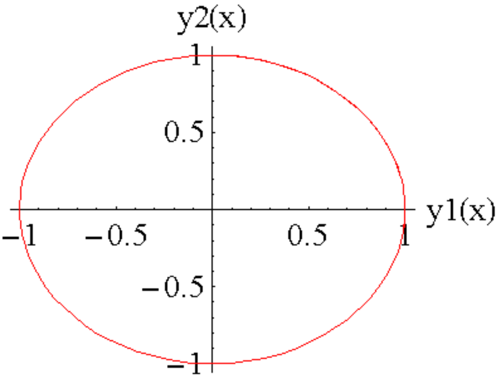
natürliche Randbedingungen

- Funktionswert an einem Endpunkt nicht vorgegeben
- Zusätzlich zur Eulerschen Differenzialgleichung $\rightarrow$ natürliche Randbedingung
- natürliche Randbedingung: $F_{y'}(x, y^*(x), y^{*'}(x)) = 0$

Nebenbedingungen

- Nebenbedingung der Form $K(y) = c$, K ist ein Funktional
- isoperimetrische Probleme: Nebenbedingung $K(f) = \int_a^b G(x, y(x), y'(x))dx = const$

Extremalkurven im R^n



- Funktional von mehreren Funktionen abhängig: $J(\vec{y}) = J(\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}) = \int_a^b F(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x))dx$

Funktionen mehrerer Variablen

2D

- Variationsaufgabe:
  $\int_D F(x, y, w, w_x, w_y) dxdy = Min!$
- zugehörige Eulersche Dgl:
  $F_w - \frac{\partial}{\partial x} F_{w_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{w_y} = 0$

3D

- Variationsaufgabe:
  $\int_G F(x, y, z, w, w_x, w_y, w_z) dxdydz = Min!$
- zugehörige Eulersche DGL:
  $F_w - \frac{\partial}{\partial x} F_{w_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{w_y} - \frac{\partial}{\partial z} F_{w_z} = 0$

Zusammenfassung

- Variationsrechnung ermöglicht die Bestimmung von Funktionen, für die gegebene Funktionale minimal werden.
- Differentialgleichung können als Variationsproblem formuliert werden und dadurch numerisch gelöst werden.
- Die Überlegungen aus dem 1-dimensionalen können auf höherdimensionale Fälle übertragen werden.