Einführung in die Variationsrechnung

Robert Kohlleppel

4. Juli 2005

1 Abstract

Die Variationsrechnung ist eine für die Physik und Ingenieurwissenschaften wichtige mathematische Methode. Sie ermöglicht die Ausnutzung der Tatsache, dass in der Natur oder Systemen bestimmte Größen extremale Werte annehmen.

In der Analysis löst man Extremwertaufgaben, um Maximal- oder Minimalstellen von einparametrigen Funktionen zu finden. Für solche Aufgaben ist als notwendiges Kriterium bekannt, dass die erste Ableitung der Funktion an Extremstellen verschwinden muß.

In der Variationsrechnung werden Funktionale betrachtet. Funktional sind Funktionen, welche als Parameter Funktionen anstelle von einzelnen Variablen haben. Sie weisen Funktionen eine relle Zahl zu. Eine bekannte Klasse von Funktionalen sind Integrale , wenn man den Integrand als übergebene Funktion betrachtet. Ebenso wie Funktionen für bestimmte Parameter extremal werden können, können auch Funktionale für bestimmte Funktionen, die gesuchten Lösungsfunktionen, Extremwerte annehmen.

In diesem Vortrag werden Funktionale der Form $J(y(x)) = \int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$ untersucht. Ziel der untersuchten Variationsaufgabe ist es, Funktionen zu finden, die das Funktional minimieren und die gegebenen Randbedingungen $y(a) = \alpha$ und $y(b) = \beta$ erfüllen.

Es wird gezeigt, wie man aus dem Funktional eine Differntialgleichung, die so genannte Eulersche Differenzialgleichung, gewinnt, die Lösungsfunktionen notwendig erfüllen müssen.

Weiterhin wird darauf eingegangen, dass umgekehrt zu linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung Variationsaufgaben gefunden werden können. Es gibt also ein Wechselspiel Variationsaufgabe $\leftrightarrow$ Differenzialgleichung. Da es sogenannte direkte Methode zur Lösung der Variationsaufgabe gibt, erhält man dadurch ein Verfahren zum Lösen von Differentialgleichungen. Eine der direkten Lösungsmethoden wird vorgestellt.

Nach dem Vorstellen der einfachen Variationsaufgabe wird ein Ausblick auf weitere Aspekte gegeben. Die Variationsaufgabe im eindimensionalen kann durch das Weglassen von Randbedingungen variiert werden. Außerdem wird gezeigt, dass man in der Variationsrechnung auch Nebenbedingungen an die gesuchte Lösungsfunktion berücksichtigen kann. Das Funktional kann auch von mehreren Funktionen als Parameter abhängig sein. Solche Funktionale werden analog wie bei der einfachen Variationsaufgabe gelöst. Zuletzt werden Variationsaufgaben vorgestellt, die als Parameter höherdimensionale Funktionen haben. Es wird darauf hingewiesen, dass das numerische Verfahren der finiten Elementen auf dem Lösen von Variationsproblemen beruht.

2 Literatur

[1] Meyberg • Vachenauer: Höhere Mathematik 2

[2] Betten: Finite Elemente f. Ingenieure 2

[3] Felbecker: Numerik-Skript, Ruhr-Universität Bochum