Einführung in die Variationsrechnung

Robert Kohlleppel
Robert.Kohlleppel@rub.de

4. Juli 2005

1 Abstract

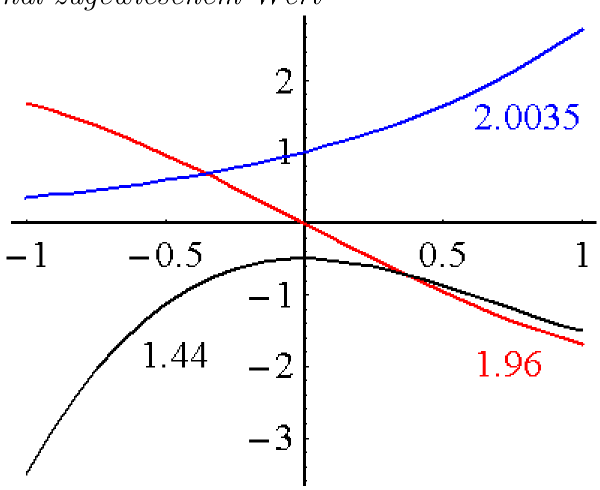
Die Variationsrechnung ist eine für die Physik und Ingenieurwissenschaften wichtige mathematische Methode. Sie ermöglicht die Ausnutzung der Tatsache, dass in der Natur oder in Systemen bestimmte Größen extremale Werte annehmen.

In der Analysis löst man Extremwertaufgaben, um Maximal- oder Minimalstellen von z. B. einparametrigen Funktionen zu finden. Für solche Aufgaben ist als notwendiges Kriterium bekannt, dass die erste Ableitung der Funktion an Extremstellen verschwinden muß.

In der Variationsrechnung werden Funktionale betrachtet. Funktionale sind Abbildungen, welche als Parameter Funktionen anstelle von einzelnen Variablen haben. Sie weisen Funktionen eine relle Zahl zu.(siehe Abbildung 1) Eine bekannte Klasse von Funktionalen sind Integrale, wenn man den Integrand als übergebene Funktion betrachtet. Ebenso wie Funktionen für bestimmte Parameter extremal werden können, können auch Funktionale für bestimmte Funktionen, die gesuchten Lösungsfunktionen, Extremwerte annehmen.

In diesem Vortrag werden Funktionale der Form $J(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ untersucht. Ziel der untersuchten Variationsaufgabe ist es, Funktionen $y*$ zu finden, die das Funktional minimieren und die gegebenen Randbedingungen $y(a) = \alpha$ und $y(b) = \beta$ erfüllen.

Abbildung 1: *Funktionen mit vom Funktional zugewiesenem Wert*



Aus der Variationsaufgabe, die das Funktional minimierende Lösungsfunktion zu finden, gewinnt man eine Differenzialgleichung, die die Lösungsfunktion notwendig erfüllen muß. Dies ist die Eulersche Differenzialgleichung.

Umgekehrt können zu linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung Variationsaufgaben gefunden werden. Es gibt also ein Wechselspiel Variationsaufgabe $\leftrightarrow$ Differenzialgleichung. Da es sogenannte direkte Methoden zur Lösung der Variationsaufgabe gibt, erhält man dadurch ein Verfahren zum Lösen von Differentialgleichungen. Eine der direkten Lösungsmethoden ist die Ritz-Methode. Sie basiert darauf, dass man die Lösungsfunktion durch eine Linearkombination von bekannten Basisfunktionen annähert.

Die bei dieser einfachen Variationsaufgabe gewonnenen Erkenntnisse können auf kompliziertere Fälle übertragen werden. Fallen eine oder beide der Randbedingungen $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ weg, so ergibt sich, dass die Lösungsfunktion weiterhin die Eulersche Differenzialgleichung erfüllen muß. Es tritt nun aber zusätzlich die natürliche Randbedingung, nämlich $F_{y'}(x, y^*(x), y^{*'}(x)) = 0$ auf.

Weiterhin können an die Lösungsfunktion Nebenbedingungen der Form $K(y) = c$ gestellt werden. Das gegebene Funktional K muß der Lösungsfunktion also den Wert c zuweisen. Ist K insbesondere durch ein Integral der Art $\int_a^b G(x, y(x), y'(x))dx$ gegeben, liegt ein isoperimetrisches Problem vor.

Das gegebene Funktional kann von mehreren Funktionen y_i abhängig sein. Also:

$$J(\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}) = \int_a^b F(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x))dx$$

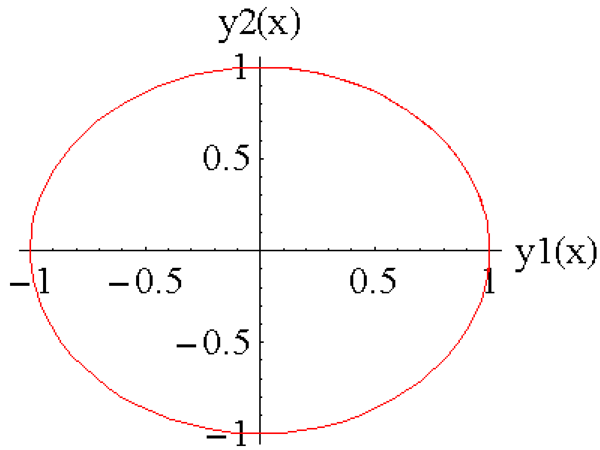
Fasst man die Lösungsfunktionen y_i als Kordianten im Raum auf, kann man von Lösungskurven im R^n sprechen. (siehe Abbildung 2)

Funktionale können analog auch für Parameterfunktionen definiert werden, die im R^2 oder R^3 definiert sind. Im R^2 lautet die Variationsaufgabe dann

$$J(w) = \int_D F(x, y, w, w_x, w_y)dxdy = Min!$$

, das heißt, es soll die Funktion $w(x, y)$ gefunden werden, die das Funktional J minimiert. Die Randwerte auf der die Fläche D begrenzenden Kurve sind vorgegeben.

Abbildung 2: *Lösungsfunktion im R^2, Ortskurve in Abhängigkeit von x*



Ebenso wird die Variationsaufgabe für den R^3 erweitert. Das Funktional ist dann als $J(w) = \int_G F(x, y, z, w, w_x, w_y, w_z)dxdydz$ definiert.

Literatur

[1] Meyberg, Vachenauer: Höhere Mathematik 2, Springer-Verlag, 1991

[2] Betten: Finite Elemente f. Ingenieure 2, Springer-Verlag 1998

[3] Felbecker: Numerik-Skript, Ruhr-Universität Bochum