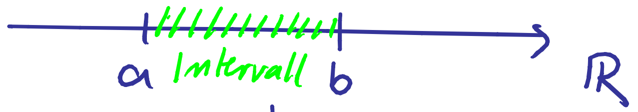
Ungleichungen



$a<b$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ : a \le x \le b\}$ abgeschlossenes Intervall

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ : a < x < b\}$ offenes Intervall

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ : a \le x < b\}$ halboffenes Inervall

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ : a < x \le b\}$ halboffenes Intervall

unendlich

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$

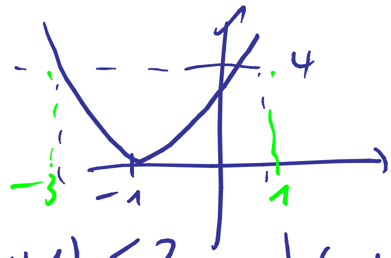
$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.

Beispiel

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - 4 < 0 \qquad | +4$$



$$(x+1)^2 < 4$$

$$(x+1) < 2 \quad \text{und} \quad -(x+1) < 2 \qquad | (-1)$$

$$-2 < x+1 < 2 \qquad | -1$$

$$-3 < x < 1$$

$$x \in (-3, 1)$$

Schranken

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, falls es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit

$x \geq a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

x heißt obere Schranke.

(entsprechend untere Schranke.)

VOLLSTÄNDIGKEITSAXIOM: Jede nach oben beschränkte Menge S reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke s.

sup = Supremum = kleinste obere Schranke

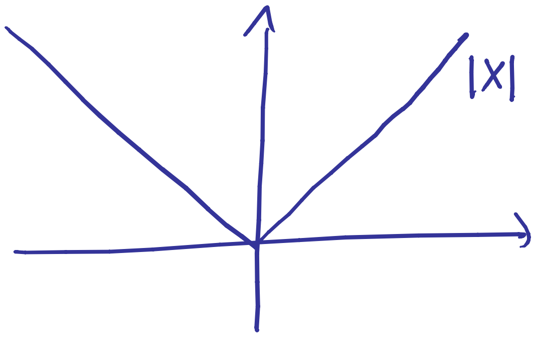
Bemerkung: Diese Aussage gilt nicht für die rationalen Zahlen:

$$\sup\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\} = \frac{\pi^2}{6}$$

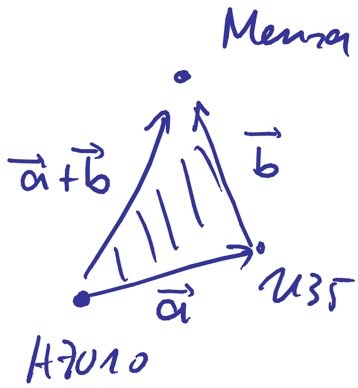
also irrational

Der Betrag

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$



$$-|a| \leq a \leq |a|$$
$$|-a| = |a|$$
$$|a| \geq 0$$
$$|a| = 0 \iff a = 0$$
$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{DREIECKSUNGLEICHUNG}$$
$$|a-b| \geq ||a| - |b||$$
$$|ab| = |a||b|$$
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{falls } b \neq 0.$$



Beispiel: Löse $|x+5| = 2$

$-(x+5) = 2$ oder $x+5=2$

$x = -7$ $\qquad$ $x = -3$

Exkurs: Vollständige Induktion und einige Formeln

Formel für Summe ungerader Zahlen

$n = 1 \qquad 1 = 1 = 1^2$

$n = 2 \qquad 1+3 = 4 = 2^2$

$n = 3 \qquad 1+3+5 = 9 = 3^2$

$n = 4 \qquad 1+3+5+7 = 16 = 4^2$

Vermutung: $1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2$

$A(n)$

> Sei $A(n)$ eine Aussage über die ganze Zahl n. Gelingt es zu zeigen:
>
> - IA INDUKTIONSANFANG: Die Aussage $A(n_0)$ ist richtig für eine ganze Zahl n_0; und
> - IS INDUKTIONSSCHRITT: Aus der Annahme, dass die Aussage $A(n)$ richtig ist für ein beliebiges $n \geq n_0$, folgt die Gültigkeit der Aussage $A(n+1)$.
>
> Dann ist die Aussage $A(n)$ für *jede* ganze Zahl $n \geq n_0$ richtig.

<u>Begründung:</u>

$W = \{ n \mid A(n) \text{ wahr} \}$

$n_0 \in W$ IA

$n_0+1 \in W$, denn $n_0 \in W$ und IS

$n_0+2 \in W$, " $n_0+1 \in W$ "

n_0+3

$\vdots$

$W = \{ n \mid n \geq n_0 \}$

$A(n): \quad 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

<u>IA</u> $\quad A(1)$ wahr ✓

<u>IS</u> $\quad$ angenommen $A(n)$ ist wahr, dann gilt

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2 \qquad \Big| + (2n+1)$$

$A(n+1)$: $1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) = \underbrace{n^2+(2n+1)}_{(n+1)^2}$

d.h $A(n+1)$ ist wahr $\quad \blacksquare$

Notation mit Summenzeichen:

$$n^2 = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2k-1}$$

„k durchläuft $1, 2, \ldots, n$ und wir summieren"

<u>IS mit „Σ"</u>:

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k-1 = \left(\sum_{k=1}^{n} 2k-1\right) + (2n+1) \underset{\text{Annahme}}{=} n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$$

Beispiel $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$

IA: $n_0 = 1$

$1+x \geq 1+1x$ ✓

IS: nach Annahme gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \Big| \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1+(n+1)x\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Beispiel geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad q \neq 1$$

alternativer Beweis ohne Induktion:

$$\begin{aligned}&(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n)(1-q) \\ =\ &1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n \\ &-(q+q^2+q^3+\ldots+q^n+q^{n+1}) \\ \hline =\ &1-q^{n+1}\end{aligned}$$

dividiere durch $1-q$

$\square$

Der binomische Lehrsatz

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n\text{-mal}}$$

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

Pascal's Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
{\scriptstyle 0} & & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 2} & & {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 4}
\end{array}
$$

4. Zeile $\longrightarrow$ $1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$, $\quad 6 = \binom{4}{2}$

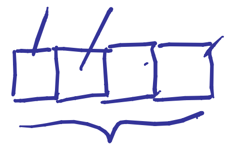
Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}} a^{n-k} b^k$$

Möglichkeiten aus n Faktoren k auszuwählen

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

$n \quad n-1 \quad (n-k+1)$



k Kästchen

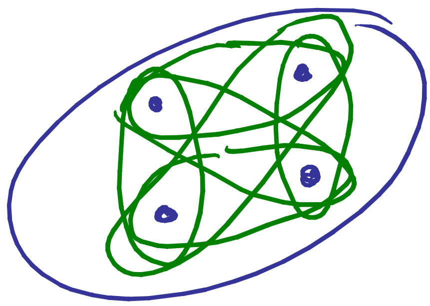
Reihenfolge...

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot \ldots \cdot k}$$

z.B. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!}$

$= \frac{\cancel{1 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{1 \cdot 2}} = 6$

Eine n elementige Menge besitzt genau $\binom{n}{k}$ k elementige Teilmengen. Mit anderen Worten: Es gibt genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus n Elementen k verschiedene Elemente auszuwählen.



6 Möglichkeiten