Vorlesung 7 10.11.10

Lineare Gleichungssysteme

m Gleichungen

n Unbekannte

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

a_{ij} gegebene Zahlen

im Matrixschreibweise

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\vec{b}}
$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Beispiel

$$x_1 + x_2 = 3 \iff x_1 = 3 - x_2$$
$$x_1 - 2x_2 = 4$$
$$\iff 3 - x_2 - 2x_2 = 4$$
$$\iff -3x_2 = 1$$
$$x_2 = -\frac{1}{3}, \quad x_1 = 3\frac{1}{3}$$

Merke Für lineare Gl.systeme gilt immer genau eine der folgenden Möglichkeiten:

- $L = \emptyset$ es gibt keine Lösung
- $L = \{\vec{x}\}$ genau eine "
- $\# L = \infty$ unendlich viele Lösungen

Beispiel

äquivalente Umformung (gleiche Lösungsmenge)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

+ (−2)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 0 \quad |:2 \\ -3x_2 - x_3 &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 - x_3 &= -5 \end{aligned}$$

$\cdot 3$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_3 &= -5 \quad |:5 \end{aligned}$$

eindeutige

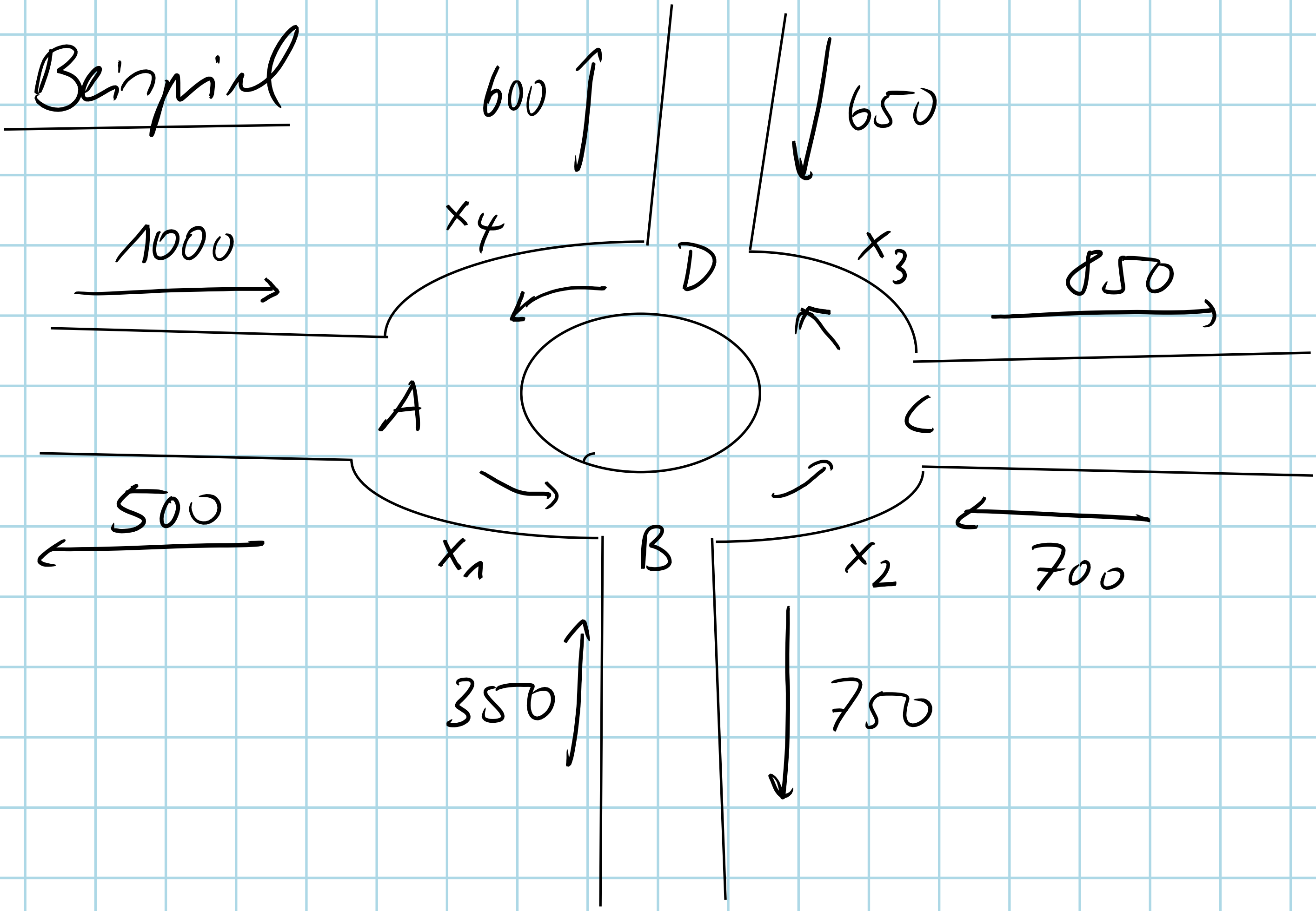
Lösung !

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = -1$

Beispiel



$$A: \quad x_4 + 1000 = x_1 + 500$$
$$B: \quad x_1 + 350 = x_2 + 750$$
$$C: \quad x_2 + 700 = x_3 + 850$$
$$D: \quad x_3 + 650 = x_4 + 600$$

$$\begin{aligned} -x_1 \qquad\qquad\qquad + x_4 &= -500 \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 400 \\ x_2 - x_3 \qquad &= 150 \\ x_3 - x_4 &= -50 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & -500 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -50 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 400 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -500 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -50 \end{array}\right) \quad +1\cdot$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -50 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -50 \end{array}\right) \quad +$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -50 \end{array}\right) \quad +$$

$$(+) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ziel war eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & * & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & * & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$(+)\quad \begin{array}{rl} x_1 - x_2 & = 400 \\ x_2 - x_3 & = 150 \\ x_3 - x_4 & = -50 \\ 0 & = 0 \end{array}$$

$$x_1 = 500 + s$$
$$x_2 = 100 + s$$
$$x_3 = s - 50$$
$$x_4 = s$$

$$L = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

unendlich viele Lösungen

Das Gaußsche Eliminationsverfahren beruht auf folgenden Grundoperationen:

- Vertauschen zweier Zeilen von $(A, \mathbf{b})$ oder zweier Spalten von A. Wurden zwei Spalten vertauscht, müssen die Komponenten des Vektors $\mathbf{x}$ der Unbekannten entsprechend umnummeriert werden.
- Multiplikation einer Zeile von $(A, \mathbf{b})$ mit einer von Null verschiedenen Zahl.
- Addition bzw. Subtraktion des α-fachen einer Zeile von $(A, \mathbf{b})$ von einer anderen Zeile.

$$
\begin{matrix}
r = \mathrm{Rang}(A)\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right. \\
m-r\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right.
\end{matrix}
\underbrace{\begin{pmatrix}
\bullet & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * & * \\
0 & \bullet & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * & * \\
0 & 0 & \bullet & \dots & \dots & \dots & \dots & * & * \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \bullet & * & \dots & * & * \\
0 & & & & & 0 & \dots & 0 & * \\
\vdots & & & & & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & & & & & 0 & \dots & 0 & *
\end{pmatrix}}_{n+1} .
$$

A

Beispiel

$$x_1 + x_2 + x_3 = 18$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = \alpha$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \alpha \end{array}\right) \quad (-1) \quad (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha-18 \end{pmatrix} \quad | : (-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ x_3 = 6 \\ 0 = \alpha - 6 \end{cases}$$

Falls $\alpha = 6$

$\Rightarrow$ $x_2 = s$, $x_3 = 6$

$x_1 = 12 - s$

Falls $\alpha \neq 6$

keine Lösung