



Universität Leipzig, Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Institut für Theoretische Physik
Abteilung Quantenfeldtheorie und Gravitation

Diplomarbeit

Die Geometrie der Ashtekarvariablen

vorgelegt von:
Stefan Funkner

Betreuer:
Prof. Dr. Gerd Rudolph
Dr. Christian Fleischhack

Leipzig, 2. Januar 2006

Gutachter:
Prof. Dr. Gerd Rudolph
Dr. Christian Fleischhack

Meiner Mutter gewidmet
für ihre Liebe, ihre Kraft und
ihre Unterstützung

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
2	Der Vierbeinformalismus	10
2.1	Geometrische Aspekte des Vierbeins	10
2.2	Zusammenhang und Krümmung im Vierbeinkalkül	14
2.2.1	Die Geometrie der Zusammenhänge	14
2.2.2	Die Zusammenhangskoeffizienten	16
2.2.3	Der Krümmungstensor	18
2.3	Der Bezug zur 1. Cartanschen Strukturformel	19
2.4	Gewichtete Größen	20
2.4.1	Hauptfaserbündel, assoziierte Bündel und die kovariante Ableitung	20
2.4.2	Gewichtete Größen und die Cramersche Regel	22
3	Die Hamiltonsche Formulierung der Gravitation	24
3.1	Das Wirkungsprinzip der Gravitation	24
3.1.1	Die geometrische Formulierung des Wirkungsprinzips für klassische Felder	24
3.1.2	Die Lagrangedichte der Gravitation	26
3.2	Die ADM-Zerlegung der Gravitation	28
3.2.1	Zerlegung des Lagrangians nach den Anholonomien	28
3.2.2	Die ADM-Zerlegung des Vierbeins und der Metrik	29
3.2.3	Abspaltung der Zeit	32
3.3	Die Legendre-Transformation des Einstein-Hilbert Lagrangians	35
4	Einführung der Ashtekarvariablen	39
4.1	Erste Transformation: Die extrinsische Krümmung und das gewichtete Dreibein	39
4.2	Nachweis der Kanonizität der 1. Transformation	41
4.3	Zweite Transformation: Die Zusammenhangsvariablen	43
4.4	Nachweis der Kanonizität der 2. Transformation	47
4.5	Der Gauß-Constraint und die Interpretation der Ashtekarvariablen im Rahmen von Yang-Mills-Theorien	48
5	Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen in Ashtekarvariablen	52
5.1	Vorbetrachtungen	52
5.2	Die Schwarzschildmetrik	53
5.2.1	Berechnung der extrinsischen Krümmung	54
5.2.2	Berechnung des gewichteten Dreibeins	54
5.2.3	Berechnung der Zusammenhangsvariablen und der Krümmung	54
5.3	Die Kerr-Metrik	56
5.3.1	Berechnung der extrinsischen Krümmung	56
5.3.2	Berechnung des gewichteten Dreibeins	59
5.3.3	Berechnung der Zusammenhangsvariablen	59
5.4	Die Robertson-Walker-Metrik	62

5.4.1	Berechnung der extrinsischen Krümmung	62
5.4.2	Berechnung des gewichteten Dreibeins	63
5.4.3	Berechnung der Zusammenhangsvariablen und der Krümmung	63
5.5	Die Ashtekarvariablen für die linearisierte Theorie	64
5.5.1	Berechnung der extrinsischen Krümmung	64
5.5.2	Berechnung des inversen Dreibeins	65
5.5.3	Berechnung der Zusammenhangsvariablen und der Krümmung	66
5.5.4	Berechnung der Zwangsbedingungen für die linearisierte Theorie	67
5.5.5	Die Ashtekarvariablen für Gravitationswellen	69
Literaturverzeichnis		72
Index		73
Danksagung		74

Kapitel 1

Einleitung

„Gleichwohl müßten die Atome zufolge der inneratomischen Elektronenbewegung nicht nur elektromagnetische, sondern auch Gravitationsenergie ausstrahlen, wenn auch in winzigem Betrage. Da dies in Wahrheit in der Natur nicht zutreffen dürfte, so scheint es, daß die Quantentheorie nicht nur die Maxwellsche Elektrodynamik, sondern auch die neue Gravitationstheorie wird modifizieren müssen.“

Albert Einstein 1916, [Ein16]

Die vorliegende Arbeit mit dem Titel „Die Geometrie der Ashtekarvariablen“ beschäftigt sich mit den klassischen Aspekten einer Theorie, deren Entwicklung durch Überlegungen initiiert wurde, die dem obigen Zitat entsprechen. Die Theorie, deren Grundlage die Ashtekarvariablen sind, wird als Schleifenquantengravitation (engl. *loop quantum gravity*) bezeichnet. Allgemein haben Theorien der Quantengravitation (QG) die Vereinigung der beiden wichtigsten Theorien des 20. Jahrhunderts zum Ziel, nämlich der Quantentheorie und der allgemeinen Relativitätstheorie.

Die Quantentheorie ist dabei in der Lage, alle Grundkräfte der Natur, außer der Gravitationskraft, im sogenannten Standardmodell $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ zu beschreiben. Die Quantentheorie nutzt dazu einen fixen, d.h. nicht-dynamischen, Hintergrund der Raumzeit. Sie sagt voraus, daß die betrachteten physikalischen Größen quantisierte Werte annehmen. Die dynamische Entwicklung dieser Größen ist nicht-deterministisch.

Die allgemeine Relativitätstheorie (ART) beschreibt hingegen die vierte Grundkraft – die Gravitationskraft – als Eigenschaft der Raumzeit. Das zentrale Objekt hierbei ist die Metrik, welche als glatt angenommen wird. Des weiteren beschreibt die ART ein streng deterministisches Verhalten der von ihr betrachteten Objekte.

Man kann sich nun die Frage nach der Motivation zur Vereinigung dieser beiden Theorien stellen. Dazu läßt sich zunächst bemerken, daß der Erfolg der Physik als Wissenschaft sich unter anderem darauf gründet, daß es gelungen ist, die Vielzahl der physikalischen Gesetze mit immer einfacheren, immer grundlegenden Regeln zu beschreiben. Hierfür benötigt man eine immer abstraktere Mathematik. Dadurch ist es möglich, mit immer weniger Aussagen die entsprechenden physikalischen Systeme immer umfassender zu charakterisieren. Des weiteren hat sich gezeigt, daß Verallgemeinerungen der Naturgesetze in der Regel zu neuen tieferliegenden Erkenntnissen führen.

Eine Theorie der QG liefert möglicherweise Antworten auf das physikalische Verhalten der Raumzeit in der Nähe von Singularitäten (z. B. Schwarze Löcher oder der Kosmos für Zeiten nahe $t = 0$), welche von der ART vorausgesagt werden. Wie wichtig diese Fragestellung ist, erkennt man schon daran, daß die Existenz dieser Objekte, gerade wegen deren ungewöhnlichen Verhaltens, noch lange nach deren theoretischer Beschreibung bezweifelt wurde. Mittlerweile gilt es jedoch als gesichert, daß mit Sagittarius A* im Zentrum unserer Milchstraße ein supermassives Schwarzes Loch existiert.

Eine weitere wichtige Frage ist, bei welchen physikalischen Skalen die QG eine Rolle spielen könnte. Max Planck zeigte bereits 1899, daß die fundamentalen Naturkonstanten Lichtgeschwindigkeit

c , Gravitationskonstante G und Plancksches Wirkungsquantum $\hbar$ sich eindeutig zu einer Größe L_p (heutzutage als Planck-Länge bezeichnet) mit der Dimension einer Länge kombinieren lassen. Er erhielt

$$L_p := \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 1,62 \times 10^{-33} \text{ cm} . \quad (1.1)$$

Dies entspricht einer Energie von etwa $1,2 \times 10^{19}$ GeV . Von einer Theorie der Quantengravitation wird erwartet, daß diese erst ab einer Energie dieser Größenordnung für physikalische Prozesse eine Rolle spielen wird. Ein moderner Beschleuniger wie der LHC (Large Hadron Collider) am CERN, welcher 2007 in Betrieb genommen wird, um unter anderem Teilchen nachzuweisen, die von der Theorie der Supersymmetrie vorausgesagt werden, arbeitet hingegen lediglich bei einer Energie von 100 GeV bis 1 TeV. Das ist der Bereich des heute Machbaren und verdeutlicht somit das Dilemma der QG, nämlich den Mangel an experimentellen Daten. Man ist somit gezwungen, die Untersuchung der QG auf semiklassische Phänomene zu stützen. Ein wichtiges Resultat ist dabei die 1974 von Hawking beschriebene Strahlung Schwarzer Löcher [Haw75]. Hawking zeigte, daß ein Schwarzes Loch der Masse M das Spektrum der Strahlung eines Schwarzen Körpers mit der Temperatur

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k G M} \quad (1.2)$$

emittiert. Diese Betrachtungen fallen in den Bereich der Quantentheorie gekrümmter Raumzeiten. Mit dem Ergebnis von Hawking war es möglich, die Entropie Schwarzer Löcher (Bekenstein-Hawking-Entropie) statistisch zu deuten. Für die Schwarzschild-Lösung beträgt diese Entropie:

$$S = \frac{1}{4} \frac{c^2}{\hbar G} A, \quad (1.3)$$

wobei A die Fläche des Schwarzschild-Horizontes ist. Für gängige Theorien der QG versucht man nun, dieses Ergebnis zu reproduzieren. Als mögliche Ansätze einer Quantengravitationstheorie seien hier die Stringtheorie und die, für diese Diplomarbeit maßgebende, Schleifenquantengravitation genannt. In beiden Theorien konnte (unter jeweils speziellen Annahmen) die Bekenstein-Hawking-Entropie hergeleitet werden.

Die Stringtheorie ist eine, von der Hochenergie- und Elementarteilchenphysik geprägte, Herangehensweise an das Problem der QG. Grundlage dieses Ansatzes ist die Störungstheorie über einer fixen Hintergrundmetrik. Bis heute ist jedoch unklar, ob diese Betrachtungsweise ausreicht, um die Quantenstruktur der Raumzeit korrekt zu beschreiben. Die Stringtheorie hat weiterhin den Anspruch, sowohl die Gravitation, die anderen Grundkräfte, als auch die Materie in einer Theorie zu vereinen. Es hat sich allerdings gezeigt, daß diese Theorie für verschiedene Modelle nur konsistent ist, wenn entweder 10 oder 26 Dimensionen zur Beschreibung herangezogen werden. Für die Stringtheorie konnte, wie oben angesprochen, die Bekenstein-Hawking-Entropie für extremale Schwarze Löcher erfolgreich hergeleitet werden [Mal96, SV96].

Eine weitere, eher von den Relativisten bevorzugte, Herangehensweise ist die der Schleifenquantengravitation (SQG). Als Voraussetzung nimmt man an, daß es möglich ist, die ART für das Vakuum (ohne Betrachtung der anderen Wechselwirkungen mit Materie) zu quantisieren. Im Gegensatz zur Stringtheorie ist die SQG eine hintergrundfreie, nicht-perturbative Feldtheorie. Die Dimension der Raumzeit ist dabei auf 4 begrenzt. Die Gravitation wird in ihrer Hamiltonschen Form¹ quantisiert, statt der Einsteinschen Feldgleichungen sind eine Reihe von Zwangsbedingungen gegeben, welche man versucht, nach der Diracschen Quantisierungsregel zu quantisieren.

Die Anfänge dieser kanonischen Quantisierung liegen in den frühen 50er Jahren und gehen auf Arbeiten von Bergmann und Dirac zurück. Dort wurde die allgemeine Hamiltonsche Theorie für Systeme mit Zwangsbedingungen herausgearbeitet, auf welche die heutige Einteilung von Zwangsbedingungen beliebiger Ordnung in erste und zweite Art zurück geht. Dirac gelang es dann, die

¹Aus diesem Grund wird dieser Ansatz auch als kanonischer Ansatz bezeichnet.

Hamiltonsche Struktur der ART zu entschlüsseln [Dir58]. Durch die Ergebnisse von Dirac konnten 1961 Arnowitt, Deser und Misner in zweckmäßigen Variablen eine einfache Hamiltonsche Formulierung der ART angeben [ADM62]. Diese Version wird heute auch als ADM-Formulierung der Gravitation bezeichnet. Diese Grundlage ermöglichte es DeWitt 1967, die später nach ihm und Wheeler benannte Wheeler-DeWitt Gleichung

$$\hat{H}\psi(q) = 0 \quad (1.4)$$

anzugeben [Dew67]. $\hat{H}$ ist dabei der zur Hamiltonfunktion der Gravitation zugehörige Hamiltonoperator und $\psi \in L^2(\text{Met}(\Sigma))$ eine L^2 -Funktion auf dem Raum aller Riemannschen Metriken auf der Hyperfläche Σ (dieser Raum wird im Englischen auch als *superspace* bezeichnet). Lösungen dieser Gleichung waren lange Zeit unbekannt.

Ein weiterer Schritt auf dem Weg zu einer kanonischen Formulierung der QG war ein Beweis des Positive-Energie-Theorems [Wit81]. Inspiriert durch diese Arbeit, veröffentlichte Sen eine Reihe von Publikationen [Sen81, Sen82a, Sen82b], die es Ashtekar schließlich ermöglichten, eine neue kanonische Formulierung der Gravitation aufzustellen [Ash86, Ash87]. Die kanonischen Variablen waren ein gewichtetes Dreibein und ein Zusammenhang auf den durch die ADM-Zerlegung erhaltenen Hyperflächen der Raumzeit. Statt der Einsteinschen Feldgleichungen erhielt Ashtekar dabei drei Zwangsbedingungen: die Hamilton-, Diffeomorphismen- und Gaußsche Zwangsbedingung, welche wir in Anlehnung an die englische Literatur im späteren auch als Constraints bezeichnen werden.

Vorteil dieser neuen Darstellung war zunächst die formelle Ähnlichkeit zur Yang-Mills-Theorie, welche bekanntermaßen zur Beschreibung des Standardmodells herangezogen wird. Eine Zielstellung dieser Diplomarbeit war, ausgehend von den Einsteinschen Feldgleichungen, die Ashtekarvariablen herzuleiten. Dabei wurde eine etwas modernere Form gewählt, welche im Gegensatz zur Originalarbeit [Ash86] noch einen zusätzlichen Parameter β enthält, den sogenannten Barbero-Immirzi-Parameter [Imm97]. In der Arbeit von Ashtekar ist $\beta = i$. Diese Wahl führt zu einer erheblichen Vereinfachung der Zwangsbedingungen und wurde anfangs als zweiter entscheidender Vorteil der durch Ashtekar eingeführten Variablen angesehen. Damit $\beta = i$ gesetzt werden konnte, mußte man auf eine Formulierung der ART mit komplexen Größen zurückgreifen, was die Einführung von Realitätsbedingungen nach sich zog. Im weiteren Verlauf war man tatsächlich in der Lage, einzelne Lösungen für die (1.4) entsprechenden Zwangsbedingungen zu konstruieren.

Der Nachteil dieser Betrachtungen war jedoch, daß man durch die Komplexifizierung der ART als Eichgruppe die $SL(2, \mathbb{C})$ erhielt, d.h. eine nichtkompakte Gruppe. Dies führte zu erheblichen Schwierigkeiten bei der Implementierung der Realitätsbedingungen. Aus diesem Grund betrachtete Barbero die Ashtekarvariablen für reelle Werte von β [Bar95a, Bar95b]. Es zeigte sich, daß die Zwangsbedingungen dabei eine kompliziertere, nicht-polynomiale Form annehmen. Ungeachtet dieser Schwierigkeiten wird heutzutage die reelle Form der Ashtekarvariablen favorisiert. Zur Zeit ist noch unklar, ob dieser Ansatz zum Erfolg führt.

Wie in der Stringtheorie wurde auch in der Theorie der Schleifenquantengravitation versucht, die Bekenstein-Hawking Entropie Schwarzer Löcher herzuleiten [Kra98, ABCK98, Rov96, ABK00]. Es zeigte sich, daß dieses Unterfangen nur für einen bestimmten Wert von β , nämlich für $\beta \approx 0,2375$ [Mei04, DL04], zum Erfolg führt. Man sieht hierin eine Möglichkeit, den Wert von β für die Schleifenquantengravitation einfach festzulegen. Die exponierte Rolle des Barbero-Immirzi-Parameters, der auf klassischem Niveau keine physikalische Relevanz besitzt, ist ein Kritikpunkt an der Schleifenquantengravitation, der von Anhängern konkurrierender Theorien der QG vorgebracht wird.

Man kann nun hoffen, daß eine bessere mathematische Durchdringung einer Theorie zu neuen Erkenntnissen führt; deshalb beschäftigt sich die vorliegende Arbeit, wie schon angedeutet, zu einem Teil mit der Herleitung der Hamiltonschen Formulierung der Gravitation mit Ashtekarvariablen. Die Herleitung soll dabei auf der Basis von Vierbeinen (später geht man zu Dreibeinen über) vollzogen werden. Dazu wird in Kapitel 2 der Vierbeinkalkül eingeführt. Kapitel 2.4 behandelt gewichtete Größen und induzierte Zusammenhänge sowie eine Formel, die aus der Cramerschen Regel folgt. Nach diesen Vorbetrachtungen wird in Kapitel 3 die Hamiltonsche Form der Gravitation im Dreibeinkalkül formuliert. Dabei wird den Betrachtungen von Peldán [Pel94] gefolgt, welche durch

detaillierte Rechnungen ergänzt werden. Als Ergebnis erhält ein System von Zwangsbedingungen für die Dreibeine e_{ai} und dazugehörigen Impulse π^{ai} , welche die kanonischen Variablen bilden. Kapitel 4 führt schließlich die Ashtekarvariablen mit Hilfe zweier kanonischer Transformationen ein. Nach der ersten Transformation in Kapitel 4.1 erhält man dabei die extrinsische Krümmung K_a^i und das gewichtete Dreibein E_b^j als kanonische Variablen. Diese Transformation stellt eine Verbindung zur Arbeit [Thi01] von Thiemann her. Die zweite Transformation in Kapitel 4.3 führt wieder auf das gewichtete Dreibein; statt der extrinsischen Krümmung erhält man jedoch den Ashtekarzusammenhang (also insgesamt die Ashtekarvariablen). Für jeden Transformationsschritt wird in den Kapitel 4.2 und 4.4 die Invarianz der Poissonklammern nachgewiesen. In [Thi01] offengelassene Rechnungen werden abermals ergänzt. Kapitel 5 beginnt mit einem einfachen Schema, welches die Berechnung der Ashtekarvariablen bei vorgegebener Metrik erlaubt. Das Schema wird auf die Schwarzschild-Metrik, die Kerr-Metrik sowie die Robertson-Walker-Metrik angewendet. Für die Schwarzschild-Metrik konnten die Ergebnisse von Soo und Chang [CS92] verifiziert werden. Die Ashtekarvariablen für die Kerr-Metrik scheinen hingegen noch nicht publiziert worden zu sein. Zuletzt werden noch in Kapitel 5.5 die Ashtekarvariablen für die linearisierte Gravitation betrachtet. Es zeigt sich, daß in dieser Näherung der nicht-polynomiale Anteil der Hamiltonschen Zwangsbedingung verschwindet [ARS91].

Die dargestellten Herleitungen erlauben, weitere, noch offene Fragestellungen zu behandeln. So ist es möglich, mit dem eingeführten Schema störungstheoretische Betrachtungen durchzuführen, wie dies im Kapitel 5.5 für die linearisierte Gravitation schon geschehen ist. Es wäre zum Beispiel interessant, die Form der Zwangsbedingungen für den Fall der Störung einer beliebigen Hintergrundmetrik zu betrachten. Die Darstellungen erlauben ebenfalls, das Transformationsverhalten der Ashtekarvariablen unter beliebigen Koordinatentransformationen zu untersuchen. Mit dem Ergebnis könnte man die in Kapitel 5.2 hergeleiteten Ashtekarvariablen der Schwarzschild-Metrik in Kruskalkoordinaten darstellen und so die Koordinatensingularität umgehen (natürlich kann man ebenso das Schema anwenden). Die Herleitung, die im Vierbeinformalismus vorgenommen wurde, läßt sich möglicherweise durch eine intrinsischere Darstellung mit Repèrebündeln ersetzen. Von der Krümmung ausgehend könnte man tiefere geometrische Strukturen der Gravitation in Ashtekarformulierung mit charakteristischen Klassen untersuchen.

Kapitel 2

Der Vierbeinformatismus

2.1 Geometrische Aspekte des Vierbeins

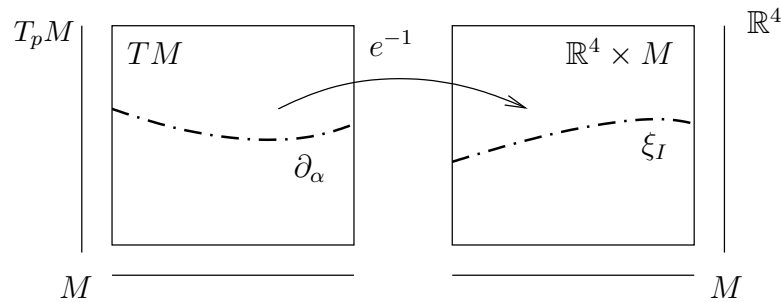


Abbildung 2.1: Geometrie des Vierbeins

Der Vierbeinformatismus ist ein wichtiges Hilfsmittel zur mathematischen Behandlung der Einsteinschen Feldgleichungen. Die folgenden Textzeilen sollen hierzu eine kurze Einführung geben (siehe hierzu auch [BM]). Betrachtet werde eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit¹ M mit global trivialem Tangentialbündel und vorgegebener Metrik g . Die Metrik habe überall auf M die konstante Signatur $(-+++)$. Diese Voraussetzungen sollen später auch für die jeweils betrachtete Raumzeit als *axiomatisch* angenommen werden. Das Tangentialbündel von M ist ein Vektorbündel. Ein Vektorbündel ist wiederum ein Spezialfall eines Faserbündels. Wir nutzen die Gelegenheit um an die Definitionen dieser beiden geometrischen Strukturen zu erinnern. Es wird dabei der Begriff der iterierten offenen Überdeckung verwendet, wie er in [Fle01] definiert ist.

Definition 2.1.1. Eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ heißt iteriert genau dann, wenn für jedes $U \in \mathcal{U}$ auch jede offene Menge $U' \subseteq U$ wieder in $\mathcal{U}$ liegt.

Wir schließen die Definition des Faserbündels an.

Definition 2.1.2. Ein lokal triviales, differenzierbares Faserbündel ist ein 5-Tupel (E, π, M, F, G) mit den folgenden Eigenschaften:

1. E (Totalraum) M (Basis) und F (Faser oder typische Faser) sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten.
2. Die kanonische Projektion $\pi : E \rightarrow M$ ist eine glatte Surjektion. Das Urbild $\pi^{-1}(p) \equiv F_p \cong F$ mit $p \in M$ heißt Faser über p .

¹Die meisten der hier angestellten Betrachtungen sind auf D Dimensionen erweiterbar.

3. G ist eine Lie-Gruppe mit linker Wirkung auf F . G wird als Strukturgruppe des Faserbündels bezeichnet.
4. Lokale Trivialität: Für eine iterierte offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M existiert ein System lokaler Trivialisierungen $\{\chi_i\}$, so daß $\chi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ ein Diffeomorphismus ist, für den gilt:

(a) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\chi_i} & U_i \times F \\ & \searrow \pi \quad \swarrow pr_1 & \\ & U_i & \end{array}$$

ist kommutativ.

- (b) Die Abbildung $(pr_2 \circ \chi_i)|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \rightarrow F$ ist ein Isomorphismus.
- (c) Seien $(U_i, \chi_i), (U_j, \chi_j)$ zwei lokale Trivialisierungen mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, dann ist die Abbildung

$$\chi_i \circ \chi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F$$

gegeben durch

$$(\chi_i \circ \chi_j^{-1})(x, f) = (x, t_{ij}(x)(f)) \quad \forall x \in U_i \cap U_j, f \in F$$

mit $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$. Die Funktionen $\{t_{ij}\}$ werden als Übergangsabbildungen bezeichnet. Sie erfüllen die bekannten Kozykelbedingungen.

Daran kann man nun direkt die Definition des Vektorbündels anschließen.

Definition 2.1.3. Eine reelles oder komplexes Vektorbündel vom Rank n ist ein Faserbündel, dessen typische Faser ein n -dimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum ist.

Verkürzend schreibt man auch $E \xrightarrow{\pi} M$ oder einfach nur E für das entsprechende Vektorbündel, wenn klar ist, was man damit meint.

Das Tangentialbündel TM einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist damit ein Vektorbündel mit typischer Faser $\mathbb{R}^n$ und Strukturgruppe $GL(n)$ ². Die Trivialisierung von TM sei mit $e^{-1} : TM \rightarrow \mathbb{R}^4 \times M$ und ihre Umkehrung mit e bezeichnet. Weiterhin möge $\{\xi_I\}$ eine Basis von Schnitten in $\mathbb{R}^4 \times M$ über M und $\{\xi^I\}$ die dazu duale Basis bezeichnen. Für einen beliebigen Schnitt ϱ sei $\varrho = \varrho^I \xi_I$ die Basiszerlegung. Schließlich soll auf $\mathbb{R}^4 \times M$, bezüglich der Basis $\{\xi_I\}$, ein inneres Produkt durch die Minkowskimetrik η bestimmt sein. Das innere Produkt zweier Schnitte ϱ und σ ergibt sich darum zu: $\langle \varrho, \sigma \rangle_\eta = \varrho^I \sigma^J \eta_{IJ}$. $\mathbb{R}^4 \times M$ ist selbst wieder ein Vektorbündel. Im Rahmen des Vierbeinbeinformalismus spricht man von $\mathbb{R}^4 \times M$ auch als *internen Raum* mit *interner Metrik* η .

e liefert eine Abbildung der Basis von Schnitten in $\mathbb{R}^4 \times M$ auf Schnitte in TM , die hier mit $\{e_I\}$ bezeichnet werden soll :

$$e_I := e(\xi_I) =: e_I^\alpha \partial_\alpha, \quad (2.1)$$

wobei $\{\partial_\alpha\}$ die von Koordinatenvektorfeldern generierte Basis von Schnitten ist. Damit ist der Isomorphismus e , nach der Wahl der Basissysteme $\{\xi_I\}$ und $\{\partial_\alpha\}$, bereits eindeutig durch die Angabe der e_I^α bestimmt. Aus diesem Grund werden auch die Komponentenfunktionen e_I^α , ebenso wie der Isomorphismus e und die Vektoren $\{e_I\}$ als Vierbein bezeichnet.

Eine wichtige Einschränkung der Menge aller Vierbeine liefert die folgende Definition:

²Durch diese Aussage sind nicht alle Eigenschaften von TM festgelegt.

Definition 2.1.4. Das Vierbein ist *orthonormal*. $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ Die Vektorfelder $\{e_I\}$ sind orthonormal bezüglich g , d.h. :

$$g(e_I, e_J) = \eta_{IJ} . \quad (2.2)$$

Es sei im folgenden das Vierbein immer orthonormal. Durch Einsetzen von (2.1) in (2.2), mit der Definition $g_{\alpha\beta} := g(\partial_\alpha, \partial_\beta)$ und aus der Linearität der Metrik folgt die für den Vierbeinkalkül wichtige Formel:

$$g_{\alpha\beta} e_I^\alpha e_J^\beta = \eta_{IJ} . \quad (2.3)$$

Insgesamt kann man den folgenden Satz formulieren.

Satz 2.1.1. Seien $v, v' \in \Gamma(TM)$ sowie $\rho, \rho' \in \mathbb{R}^4 \times M$ dann gilt:

$$\eta(\rho, \rho') = g(e(\rho), e(\rho')) \quad \iff \quad \eta = g \circ (e \times e) \quad (2.4)$$

bzw.

$$g(v, v') = \eta(e^{-1}(v), e^{-1}(v')) \quad \iff \quad g = \eta \circ (e^{-1} \times e^{-1}) . \quad (2.5)$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung ist es möglich durch den Isomorphismus e^{-1} die Metrik g über die Metrik η des internen Raums zu kontrollieren. Allgemein ist man bestrebt die Geometrie von TM durch die Geometrie von $\mathbb{R}^4 \times M$ über e bzw. e^{-1} festzulegen.

Über die Metrik³ g wird auf $T_p M$ ein Skalarprodukt $\langle u, v \rangle_g := g(u, v)$ für alle $u, v \in T_p M$ erzeugt. Den dadurch definierten Isomorphismus $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle_g$ von $T_p M$ nach $T_p^* M$ und seinen Inversen bezeichnet man durch:

$$T_p M \xrightleftharpoons[\sharp]{\flat} T_p^* M . \quad (2.6)$$

Die „musikalischen“ Operatoren $\flat$ und $\sharp$ werden im Englischen mit flat und sharp bezeichnet, was im Deutschen soviel wie flach und spitz bedeutet. Nach [Jä92] ist die Symbolik deshalb so zu verstehen, daß der Operator $\sharp$ die Linearform α zum Vektor $\alpha^\sharp$ „anspitzt“. Durch die punktweise Anwendung dieser Operationen erhält man schließlich ein Zuordnung zwischen 1-Formen und Vektorfeldern. Man spricht auch von *metrischer Äquivalenz* zwischen diesen Objekten (siehe [FK03]). Sei $v \in TM$ ein Vektorfeld und $v = v^\alpha \partial_\alpha$ seine Zerlegung nach der Basis auf TM , dann sind die Funktionen $v_\alpha \in C^\infty(M)$ definiert als $v_\flat := v_\alpha dx^\alpha$ mit $v_\flat := \flat(v)$. Die Operatoren $\flat$ und $\sharp$ bewirken also ein Heben und Senken der Indizes. Mit

$$v_\alpha = v_\flat(\partial_\alpha) = \langle v, \partial_\alpha \rangle_g = v^\beta \langle \partial_\beta, \partial_\alpha \rangle_g = g_{\alpha\beta} v^\beta$$

erhält man

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta , \quad (2.7)$$

was eine entscheidende Eigenschaft der Metrik ist. Mit der üblichen Relation $g_{\alpha\rho} g^{\alpha\beta} = \delta_\rho^\beta$ läßt sich noch

$$g^{\alpha\beta} v_\beta \stackrel{(2.7)}{=} g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} v^\gamma = v^\alpha \quad (2.8)$$

berechnen.

Die obigen Betrachtungen sollen auch für Größen mit „gemischtem“ Indexbild gelten. Dementsprechend ist dann e_I^J in bezug auf e_I^α durch entsprechendes Heben und Senken der beiden Indizes mit der räumlichen Metrik g und der internen Metrik η definiert. Daraus folgt speziell

$$e_I^\alpha e_\alpha^J = \delta_I^J . \quad (2.9)$$

³Die im folgenden angestellten Betrachtungen sollen für die beiden Metriken g und η gleichermaßen gelten.

Mit e_α^I und $v = v^\alpha \partial_\alpha \in TM$ läßt sich $e^{-1}(v)$ durch

$$e^{-1}(v) = e_\alpha^I v^\alpha \xi_I \quad (2.10)$$

darstellen, denn da e ein Isomorphismus ist, gibt es einen Schnitt s in $\mathbb{R}^4 \times M$ mit $e(s) = v$ und es gilt:

$$e^{-1}(v) = e_\alpha^I v^\alpha \xi_I = e_\alpha^I e_J^\alpha s^J \xi_I = s^J \xi_J = s \quad (2.11)$$

Die Betrachtungen mit musikalischen Operatoren seien jetzt auf ein beliebiges lokal triviales, differenzierbares Vektorbündel E mit Metrik g und entsprechenden dualem Vektorbündel E^* (siehe [Nak]) verallgemeinert. Definiert man als nächstes statt der Bezeichnung $\omega(v)$ für die Wirkung einer Form auf ein Vektorfeld die ebenfalls sehr gebräuchliche Darstellung $\langle \omega, v \rangle_E$ durch

Definition 2.1.5. Sei E ein Vektorbündel und E^* das zugehörige duale Vektorbündel, dann ist mit $v \in \Gamma(E)$ und $\omega \in \Gamma(E^*)$ die Operation $\langle \omega, v \rangle_E$ definiert durch

$$\langle \omega, v \rangle_E := \omega(v) . \quad (2.12)$$

Auf dem internen Raum und auf TM (extern) soll diese Operation jeweils mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Ex}$ bezeichnet werden. Mit den Operatoren $\flat$ und $\sharp$ kann man nun das folgende einfache Lemma formulieren.

Lemma 2.1.1. *Es gilt*

$$\langle \omega, v \rangle_E = \langle v_\flat, \omega_\sharp \rangle_E \quad (2.13)$$

$$\langle \omega, v \rangle_E = \langle \omega_\sharp, v \rangle_g . \quad (2.14)$$

Beweis. Gleichung (2.14) folgt direkt aus der Definition des Operators $\sharp$ und (2.13) ergibt sich aus der Symmetrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ sowie der zweimaligen Verwendung von (2.14) durch

$$\langle \omega, v \rangle_E \stackrel{(2.14)}{=} \langle \omega_\sharp, v \rangle_g = \langle v, \omega_\sharp \rangle_g \stackrel{(2.14)}{=} \langle v_\flat, \omega_\sharp \rangle_E .$$

□

Um die Geometrie des Isomorphismus e noch etwas näher zu beleuchten definiert man das Tensorprodukt zwischen Vektorbündeln.

Definition 2.1.6. Seien $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M$ und $E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ zwei lokal triviale Vektorbündel vom Rank n_1 und Rank n_2 über der Mannigfaltigkeit M . Dann ist das Tensorprodukt $E = E_1 \otimes E_2$ ein lokal triviales Vektorbündel vom Rang $n_1 \cdot n_2$ über M , das wie folgt definiert ist.

1. Der Totalraum E ist die disjunkte Vereinigung des faserweisen Tensorproduktes $\pi_1^{-1}(m) \otimes \pi_2^{-1}(m)$ der beiden Vektorbündel über dem Punkt $m \in M$, d.h.

$$E = \coprod_{m \in M} \pi_1^{-1}(m) \otimes \pi_2^{-1}(m) . \quad (2.15)$$

2. Die Projektion π von E auf M ist gegeben durch

$$\pi : E \supset \pi_1^{-1}(m) \otimes \pi_2^{-1}(m) \ni x \mapsto m \in M . \quad (2.16)$$

3. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine iterierte, offene Überdeckung, so daß für jedes $i \in I$ und für $k = 1, 2$ eine lokale Trivialisierung $\chi_{ki} : \pi_k^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n_k}$ des jeweiligen Vektorbündels E_k existiert. Für E sei die Abbildung $\chi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2}) \cong U_i \times \mathbb{R}^{n_1 n_2}$ mit $q_1 \otimes q_2 \in \pi_1^{-1}(m) \otimes \pi_2^{-1}(m) \subset \pi^{-1}(U_i)$ durch

$$\chi_i(q_1 \otimes q_2) = (m, pr_2(\chi_{1i}(q_1)) \otimes pr_2(\chi_{2i}(q_2))) \quad (2.17)$$

definiert. Auf E wird durch χ_i^{-1} die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit induziert und χ_i ist die zu $\{U_i\}_{i \in I}$ gehörige lokale Trivialisierung von E .

Die Aussage, E sei ein Vektorbündel, bedarf streng genommen eines Beweises, der hier nicht erbracht werden soll. Gleichung (2.1) legt nun die Interpretation des Isomorphismus e als Schnitt im Bündel $TM \otimes (\mathbb{R}^4 \times M)^*$ nahe, d.h.

$$e \in \Gamma(TM \otimes (\mathbb{R}^4 \times M)^*) . \quad (2.18)$$

In der lokalen Basisdarstellung erhält man deshalb

$$e = e_I^\alpha \partial_\alpha \otimes \xi^I . \quad (2.19)$$

Das Tensorprodukt zwischen den Schnitten $\{\partial_\alpha\}$ und $\{\xi^I\}$ ist dabei faserweise zu verstehen. Entsprechend ist

$$e^{-1} \in \Gamma(T^*M \otimes (\mathbb{R}^4 \times M)) \Rightarrow e^{-1} = e_\alpha^I dx^\alpha \otimes \xi_I . \quad (2.20)$$

In Verbindung mit dem Operator $\flat$ möge nun $e_\flat$ den Isomorphismus e , abgebildet nach $\Gamma(TM \otimes (\mathbb{R}^4 \times M))$, bezeichnen ($e_\flat$ wird im Kapitel 2.2 benötigt), d.h.

$$e_\flat = e^{\alpha I} \partial_\alpha \otimes \xi_I . \quad (2.21)$$

Genauer stellt die Betrachtungsweise der Isomorphismen e und e^{-1} in (2.19) und (2.21) eine Erweiterung dar, denn während zum Beispiel für e im ursprünglichen Sinne nur $e(\xi_I)$ erklärt ist, ist jetzt auch $e(\partial_\alpha)$ definiert. Diese Interpretationen soll in den kommenden Ausführungen beibehalten werden. Für die spätere Analyse des Krümmungstensors sei abschließend hier noch ein weiteres einfaches Lemma angegeben.

Lemma 2.1.2. *Sei $\omega_\alpha dx^\alpha \in \Gamma(T^*M)$ und $v^\alpha \partial_\alpha \in \Gamma(TM)$ dann ist*

$$\langle \omega, v \rangle_{\text{Ex}} = \langle e(\omega), e^{-1}(v) \rangle_{\text{I}} . \quad (2.22)$$

Beweis.

$$\langle \omega, v \rangle_{\text{Ex}} = \omega_\alpha v^\alpha = \omega_\alpha v^\beta \delta_\beta^\alpha = \omega_\alpha v^\beta e_i^\alpha e_\beta^J \delta_J^I = \omega_\alpha v^\beta \langle e(dx^\alpha), e^{-1}(\partial_\beta) \rangle = \langle e(\omega), e^{-1}(v) \rangle_{\text{I}}$$

□

Von den Implikationen der hier eingeführten Strukturen für Zusammenhänge handelt nun das nächste Kapitel.

2.2 Zusammenhang und Krümmung im Vierbeinkalkül

2.2.1 Die Geometrie der Zusammenhänge

Um Zusammenhänge auf Vektorbündeln und auf Hauptfaserbündeln einzuführen sind mehrere äquivalente Definitionen möglich. Im Rahmen dieser Arbeit wird die in [BM] angegebene verwendet.

Definition 2.2.1. Sei E ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M . Dann ist ein Zusammenhang D auf E eine Abbildung $D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} D(s+t) &= Ds + Dt, \\ D(fs) &= df \otimes s + fDs \quad \forall f \in C^\infty(M), s, t \in \Gamma(E) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Entsprechend definiert man den Zusammenhang auf E^* über die Leibnitzregel für $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d.h

Definition 2.2.2. Sei $\omega \in \Gamma(E^*)$ dann ist $D\omega \in \Gamma(E^*)$ definiert als:

$$\langle D\omega, v \rangle_E := d\langle \omega, v \rangle_E - \langle \omega, Dv \rangle_E \quad \forall v \in \Gamma(E) . \quad (2.24)$$

Es sollen nun für den Zusammenhang D die üblichen Definitionen und Schlußfolgerungen gelten. In Verbindung mit dem Operator $\flat$ erhält man somit den nachfolgenden Satz.

Satz 2.2.1. *Gegeben sei ein Vektorbündel E , ein darauf definierter Zusammenhang D und eine Metrik h . Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

i) $\flat D = D \flat$

ii) D ist metrisch.

Beweis. Mit $\{\xi_I\}$ als Basis von Schnitten auf E und der dazu dualen Basis von Schnitten $\{\xi^I\}$ auf E^* gilt mit $u = u^I \xi_I$:

$$\begin{aligned}
& \flat(Du) = D(\flat(u)) \\
\Leftrightarrow & \quad \flat(D(u^I \xi_I)) = D(\flat(u^I \xi_I)) \\
\Leftrightarrow & \quad (du^I) \flat(\xi_I) + u^I \flat(\xi_K) \langle \xi^K, D\xi_I \rangle_E = (du^I) \flat(\xi_I) + \langle D\flat(\xi_I), \xi_K \rangle_E u^I \xi^K \\
\Leftrightarrow & \quad u^I g_{KJ} \xi^J \langle \xi^K, D\xi_I \rangle_E = d(\langle \flat(\xi_I), \xi_K \rangle_E) u^I \xi^K - \langle \flat(\xi_I), D\xi_K \rangle_E u^I \xi^K \\
\Leftrightarrow & \quad u^I \xi^J \langle \xi_J, D\xi_I \rangle_h = d(\langle \xi_I, \xi_K \rangle_h) u^I \xi^K - \langle \xi_I, D\xi_K \rangle_h u^I \xi^K \\
\Leftrightarrow & \quad \langle D\xi_J, \xi_I \rangle_h + \langle \xi_J, D\xi_I \rangle_h = D\langle \xi_I, \xi_K \rangle_h \\
\Leftrightarrow & \quad D \text{ ist metrisch.}
\end{aligned}$$

□

Ein metrischer Zusammenhang auf dem trivialen Bündel $\mathbb{R}^4 \times M$ wird auch als *Lorentz-Zusammenhang* bezeichnet. Im vorigen Abschnitt wurde das Tensorprodukt zwischen zwei Vektorbündeln betrachtet. Ist auf diesen Vektorbündeln jeweils ein Zusammenhang gegeben, so kann man auf dem Tensorprodukt ebenfalls einen Zusammenhang definieren. Es gilt:

Definition 2.2.3. Gegeben sei ein Vektorbündel E_1 mit einem Zusammenhang D_1 , sowie ein Vektorbündel E_2 mit einem Zusammenhang D_2 . Beide Vektorbündel mögen dieselbe Basis besitzen. Dann ist auf dem Tensorprodukt $E_1 \otimes E_2$ der Zusammenhang $D_1 \otimes D_2$ durch

$$(D_1 \otimes D_2)(s' \otimes s) = D_1(s') \otimes s + s' \otimes D_2(s) \quad (2.25)$$

definiert, mit $s' \otimes s \in \Gamma(E_1 \otimes E_2)$, $s' \in \Gamma(E_1)$ und $s \in \Gamma(E_2)$.

Der nachfolgende Text soll sich nun wieder mehr auf die in Kapitel 2.1 betrachteten Vektorbündel beziehen. Auf TM und $\mathbb{R}^4 \times M$ seien deshalb Zusammenhänge gegeben, welche mit ∇ und D bezeichnet werden. Will man weiter der Philosophie folgen, daß die Strukturen von $\mathbb{R}^4 \times M$ und der Isomorphismus e die Strukturen auf TM modellieren, so stellt sich hier die Frage unter welchen Bedingungen der Zusammenhang D den Zusammenhang ∇ festlegt. Der anschließende Satz bietet eine mögliche Betrachtungsweise.

Satz 2.2.2. *Falls D ein Lorentz-Zusammenhang und e , parallel bezüglich $\mathcal{D} = D \otimes \nabla$ ist, dann kommutiert das folgende Diagramm.*

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\mathbb{R}^4 \times M) & \xrightarrow{D} & \Gamma(T^*M \otimes (\mathbb{R}^4 \times M)) \\
\downarrow e & & \downarrow e \otimes id \\
\Gamma(TM) & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(T^*M \otimes TM)
\end{array} \quad (2.26)$$

Beweis. Man zeigt (2.26) am besten über $e^{-1}(\nabla e(u)) = Du \quad \forall u \in \Gamma(\mathbb{R}^4 \times M)$, wobei für u die Basisdarstellung $u = u^I \xi_I$ angesetzt wird. Als ersten Schritt schreibt man die Voraussetzung

$\mathcal{D}e_b = 0$ in eine Form, die im späteren Verlauf der Beweisführung Eingang finden wird.

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{D}e_b = \mathcal{D}(e^{\alpha I} \partial_\alpha \otimes \xi_I) = (de^{\alpha I}) \partial_\alpha \otimes \xi_I + e^{\alpha I} (\nabla \partial_\alpha) \otimes \xi_I + e^{\alpha I} \partial_\alpha \otimes D\xi_I \\
&= (de^{\alpha I}) \partial_\alpha \otimes \xi_I + e^{\alpha I} \langle dx^\beta, \nabla \partial_\alpha \rangle_{\text{Ex}} \partial_\beta \otimes \xi_I + e^{\alpha I} \langle \xi^J, D\xi_I \rangle_I \partial_\alpha \otimes \xi_J \\
&= (de^{\alpha I}) \partial_\alpha \otimes \xi_I + e^{\beta I} \langle dx^\beta, \nabla \partial_\beta \rangle_{\text{Ex}} \partial_\alpha \otimes \xi_I + e^{\alpha K} \langle \xi^I, D\xi_K \rangle_I \partial_\alpha \otimes \xi_I \\
\Leftrightarrow 0 &= de^{\alpha I} + e^{\beta I} \langle dx^\alpha, \nabla \partial_\beta \rangle_{\text{Ex}} + e^{\alpha K} \langle \xi^I, D\xi_K \rangle_I .
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Im zweiten Schritt berechnet man $\nabla e(u)$. Man erhält:

$$\begin{aligned}
e(u) &= u^I e_I^\alpha \partial_\alpha = u_I e^{\alpha I} \partial_\alpha \\
\Leftrightarrow \nabla e(u) &= \nabla(u_I e^{\alpha I} \partial_\alpha) = d(u_I) e^{\alpha I} \partial_\alpha + u_I (de^{\alpha I}) \partial_\alpha + u_I e^{\alpha I} \langle dx^\beta, \nabla \partial_\alpha \rangle_{\text{Ex}} \partial_\beta .
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Im dritten Schritt läßt sich schließlich direkt die zu beweisende Formel zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
e^{-1}(\nabla e(u)) &= d(u_I) e^{\alpha I} e^{-1}(\partial_\alpha) + u_I (de^{\alpha I}) e^{-1}(\partial_\alpha) + u_I e^{\alpha I} \langle dx^\beta, \nabla \partial_\alpha \rangle_{\text{Ex}} e^{-1}(\partial_\beta) \\
&= d(u_I) e^{\alpha I} e_\alpha^K \xi_K + u_I (de^{\alpha I}) e_\alpha^K \xi_K + u_I e^{\alpha I} \langle dx^\beta, \nabla \partial_\alpha \rangle_{\text{Ex}} e_\beta^K \xi_K \\
&= (du^K) \xi_K + u_I e_\alpha^K (de^{\alpha I} + e^{\beta I} \langle dx^\alpha, \nabla \partial_\beta \rangle_{\text{Ex}}) \xi_K \\
&= (du^K) \xi_K - u_I e_\alpha^K e^{\alpha S} \langle \xi^I, D\xi_S \rangle_I \xi_K = (du^K) \xi_K - u_I \langle \xi^I, D(\eta^{KS} \xi_S) \rangle_I \xi_K \\
&= (du^K) \xi_K - u_I \langle (D(\eta^{KS} \xi_S))^\flat, (\xi^I)^\sharp \rangle_I \xi_K \\
&= (du^K) \xi_K - u^I \langle D((\eta^{KS} \xi_S)^\flat), \xi_I \rangle_I \xi_K \\
&= (du^K) \xi_K - u^I \langle D\xi^K, \xi_I \rangle_I \xi_K = (du^K) \xi_K + u^I \langle \xi^K, D\xi_I \rangle_I \xi_K \\
&= Du .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

□

Die Voraussetzungen von Satz (2.2.2) sollen von jetzt an immer gelten. Damit ∇ festgelegt ist, ist es an dieser Stelle sinnvoll D zu determinieren – die Metrizität allein reicht dazu nicht aus. Für D definiert man deshalb zusätzlich eine Art Torsionfreiheit, die sich auf ∇ überträgt.

Definition 2.2.4. Mit $D_\alpha := D(\partial_\alpha)$ gelte für D die folgende Eigenschaft:

$$D_\alpha(e^{-1}(\partial_\beta)) = D_\beta(e^{-1}(\partial_\alpha)) . \tag{2.30}$$

Die Metrizität von ∇ folgt mit Satz (2.2.2) aus der von D und mit (2.30) wird ∇ zu einem *Levi-Civita-Zusammenhang* auf TM .

2.2.2 Die Zusammenhangskoeffizienten

Als Beispiel für die Wirkung des Vierbeinkalküls in der Basisdarstellung werden hier die Zusammenhangskoeffizienten der beiden Zusammenhänge berechnet. Diese sind über die Ableitung von e_b wie folgt definiert.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha(e_b) &= \mathcal{D}_\alpha(e_{\beta I} dx^\beta \otimes \xi^I) = \partial_\alpha(e_{\beta I}) dx^\beta \otimes \xi^I + e_{\beta I} (\nabla_\alpha dx^\beta) \otimes \xi^I + e_{\beta I} dx^\beta \otimes D_\alpha(\xi^I) \\
&=: \partial_\alpha e_{\beta I} dx^\beta \otimes \xi^I - e_{\beta I} \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta dx^\gamma \otimes \xi^I - e_{\beta I} dx^\beta \otimes \omega_\alpha^I{}_J \xi^J .
\end{aligned} \tag{2.31}$$

In der *Basisdarstellung des Zusammenhangs* $\mathcal{D}_\alpha e_{\beta I} := \mathcal{D}_\alpha(e_b)(\partial_\beta, \xi_I)$ ist der Operator $\flat$ redundant, so daß er weggelassen werden kann. Man erhält:

$$\mathcal{D}_\alpha e_{\beta I} = \partial_\alpha e_{\beta I} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_{\gamma I} - \omega_\alpha^J{}_I e_{\beta J} . \tag{2.32}$$

Mit den Eigenschaften der kovarianten Ableitung D und des Isomorphismus $\flat$ ist das folgende Lemma leicht zu zeigen.

Lemma 2.2.1. *Es gilt:*

$$\mathcal{D}e_b = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}e = 0 \tag{2.33}$$

Beweis. Wir erinnern noch einmal daran, daß der Operator $\flat$ mit D vertauscht. Da $\flat$ hier nur in der zweiten Komponente wirkt, überträgt sich diese Eigenschaft auf den Zusammenhang $\mathcal{D}$. Es gilt:

$$\mathcal{D}e_{\flat} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \flat(\mathcal{D}e) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{D}e = 0 .$$

□

In der Basisdarstellung – der Operator $\flat$ wurde wieder weggelassen – erhält man deshalb:

$$\mathcal{D}_{\alpha}e_{\beta I} = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{D}_{\alpha}e_I^{\beta} = 0 . \quad (2.34)$$

Analog läßt sich $\mathcal{D}_{\alpha}e_{\beta}^I = 0$ und letztendlich $\mathcal{D}_{\alpha}e^{\beta I} = 0$ beweisen. Aus (2.34) folgt die Antisymmetrie der ω :

$$\mathcal{D}_{\alpha}(e_{\beta I}e_J^{\beta}) = D_{\alpha}\eta_{IJ} = \underbrace{\partial_{\alpha}\eta_{IJ}}_{=0} - \omega_{\alpha}^{\quad K}{}_J\eta_{IK} - \omega_{\alpha}^{\quad K}{}_I\eta_{KJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{\alpha(IJ)} = 0 . \quad (2.35)$$

∇ ist wie schon erwähnt ein Levi-Civita-Zusammenhang auf TM. Dies folgt aus der Torsionsfreiheit und der Metrizität von ∇ . Es wird hier jedoch die Gelegenheit genutzt um die Zusammenhangskoeffizienten (in diesem Fall also Christoffelsymbole) nach der Metrik aufzulösen (siehe auch [Pel94]). Die Formel wird genau die eines Levi-Civita-Zusammenhangs sein, was ebenfalls als Beweis für diese Eigenschaft von ∇ gelten mag. Die Torsionsfreiheit impliziert zunächst

$$\Gamma_{[\alpha\beta]}^{\gamma} = 0 . \quad (2.36)$$

Des weiteren gilt:

$$0 \stackrel{(2.34)}{=} \mathcal{D}_{\alpha}(e_{\beta I}e_{\gamma}^I) = \nabla_{\alpha}g_{\beta\gamma} = \partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon}g_{\epsilon\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\epsilon}g_{\beta\epsilon} . \quad (2.37)$$

Über eine zyklische Vertauschung der Koeffizienten α , β und γ in Gleichung (2.37) erhält man:

$$\begin{aligned} & \partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon}g_{\epsilon\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\epsilon}g_{\beta\epsilon} = 0 \\ (+) \quad & + \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\epsilon}g_{\epsilon\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\epsilon}g_{\alpha\epsilon} = 0 \\ (+) \quad & - \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon}g_{\epsilon\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\epsilon}g_{\gamma\epsilon} = 0 \\ \Rightarrow \quad & \partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta} - \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - 2\Gamma_{\alpha\gamma}^{\epsilon}g_{\beta\epsilon} = 0 . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Aus (2.38) folgt die Abhängigkeit der Christoffelsymbole von der Metrik:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\epsilon}g_{\beta\epsilon} &= \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta} - \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha}) \\ \Leftrightarrow \Gamma_{\alpha\gamma}^{\epsilon} &= \frac{1}{2}g^{\beta\epsilon}(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta} - \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha}) . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Durch (2.39) läßt sich ∇ eindeutig als Levi-Civita-Zusammenhang identifizieren.

Im vorangegangenen Abschnitt wurde deutlich, daß die Metrik durch die Wahl der Funktionen e_I^{α} bereits durch Gleichung (2.3) festgelegt ist. Diese Betrachtungsweise läßt sich ebenso auf den Zusammenhang ∇ anwenden, denn durch (2.39) sind die räumlichen Konnexionskoeffizienten Γ als Funktion der Metrik gegeben und diese ist – wie gesagt – wieder durch e_I^{α} darstellbar. D.h. die bisher vorgenommenen Einschränkungen für die geometrischen Strukturen sind stark genug, um über die Wahl des Isomorphismus e die Zusammenhänge festzulegen. Um dieses Bild noch zu vervollständigen, soll die Abhängigkeit der ω vom Vierbein berechnet werden. Hierzu bemerkt man zunächst, daß wegen (2.32) und (2.36)

$$\mathcal{D}_{[\alpha}e_{\beta]I} = \partial_{[\alpha}e_{\beta]I} + \omega_{[\alpha I}^{\quad J}e_{\beta]J} = 0 \quad (2.40)$$

gilt. Die freien räumlichen (holonomen) Indizes lassen sich durch

$$e_J^\alpha e_K^\beta (\partial_{[\alpha} e_{\beta]I} + \omega_{[\alpha I}^L e_{\beta]L}) = 0 \quad (2.41)$$

in interne (anholonome) Indizes umwandeln. Mit der Definition

$$\Omega_{JKI} := e_J^\alpha e_K^\beta \partial_{[\alpha} e_{\beta]I} \quad (2.42)$$

und zyklischem Vertauschen der Indizes, sowie anschließender Addition bzw. Subtraktion der entstehenden Gleichungen wird (2.41) zu :

$$\begin{aligned} \Omega_{JKI} + e_J^\alpha \omega_{\alpha IK} - e_K^\beta \omega_{\alpha IJ} &= 0 \\ (+) \quad \Omega_{IJK} + e_I^\alpha \omega_{\alpha KJ} - e_J^\beta \omega_{\alpha KI} &= 0 \\ (-) \quad \Omega_{KIJ} + e_K^\alpha \omega_{\alpha JI} - e_I^\beta \omega_{\alpha JK} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \Omega_{JKI} + \Omega_{IJK} - \Omega_{KIJ} + 2e_J^\alpha \omega_{\alpha IK} &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

(2.43) nach den ω umgestellt ergibt:

$$\omega_{\alpha KI} = \frac{1}{2} e_\alpha^J (\Omega_{JKI} + \Omega_{IJK} - \Omega_{KIJ}) \quad . \quad (2.44)$$

Setzt man die Definition (2.42) in (2.44) ein, so kann man die entstehende Formel noch etwas kompakter schreiben. Man erhält:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^{KI} &= \frac{1}{2} e_\alpha^J (e_J^\beta e^{\gamma K} \partial_{[\beta} e_{\gamma]}^I + e^{\beta I} e_J^\gamma \partial_{[\beta} e_{\gamma]}^K - e^{\beta K} e^{\gamma I} \partial_{[\beta} e_{\gamma]}^J) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\beta e^{\gamma K} \partial_{[\beta} e_{\gamma]}^I + e^{\beta I} \delta_\alpha^\gamma \partial_{[\beta} e_{\gamma]}^K - e_\alpha^J e^{\beta K} e^{\gamma I} \partial_{[\beta} e_{\gamma]}^J) \\ &= \frac{1}{2} (e^{\gamma K} \partial_{[\alpha} e_{\gamma]}^I + e^{\beta I} \partial_{[\beta} e_{\alpha]}^K - e_\alpha^J e^{\beta K} e^{\gamma I} \partial_{[\beta} e_{\gamma]}^J) \\ &= \frac{1}{2} (e^{\gamma K} \partial_{[\alpha} e_{\gamma]}^I - e^{\beta I} \partial_{[\alpha} e_{\beta]}^K + e_\alpha^J e^{\beta K} e^{\gamma I} \partial_{[\gamma} e_{\beta]}^J) \\ &= \frac{1}{2} (e^{\gamma[K} \partial_{[\alpha} e_{\gamma]}^{I]} + e_\alpha^J e^{\beta[K} e^{\gamma I]} \partial_{\gamma} e_{\beta]J}) = \frac{1}{2} (e^{\gamma[K} \partial_{[\alpha} e_{\gamma]}^{I]} + e_\alpha^J e^{\gamma[K} e^{\beta I]} \partial_{\beta} e_{\gamma]J}) \\ &= \frac{1}{2} e^{\gamma[K} (\partial_{[\alpha} e_{\gamma]}^{I]} + e_\alpha^J e^{\beta I]} \partial_{\beta} e_{\gamma]J}) \quad . \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.2.3 Der Krümmungstensor

Da die kovarianten Ableitungen gegeben sind, ist es möglich die entsprechenden Krümmungstensoren zu definieren. Dies soll hier über die Festlegung der Komponenten geschehen.

Definition 2.2.5.

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta := \langle dx^\delta, \nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} \partial_\gamma \rangle_{\text{Ex}} \quad (2.46)$$

$$R_{\alpha\beta I}{}^J := \langle \xi^J, D_{[\alpha} D_{\beta]} \xi_I \rangle_I \quad (2.47)$$

Man zeigt nun das folgende Lemma.

Lemma 2.2.2. *Es gilt:*

$$\langle \xi^J, D_{[\alpha} D_{\beta]} \xi_I \rangle_I = \langle e^{-1}(\xi^J), \nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} e(\xi_I) \rangle_{\text{Ex}} \quad . \quad (2.48)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\langle \xi^J, D_{[\alpha} D_{\beta]} \xi_I \rangle_I &= \langle \xi^J, D_{[\alpha} (e^{-1} \nabla_{\beta]} e(\xi_I)) \rangle_I = \langle \xi^J, e^{-1} \nabla_{[\alpha} (e^{-1} \nabla_{\beta]} e(\xi_I)) \rangle_I \\
&= \langle \xi^J, e^{-1} \nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} e(\xi_I) \rangle_I = \langle e(e^{-1}(\xi^J)), e^{-1} \nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} e(\xi_I) \rangle_I \\
&= \langle e^{-1}(\xi^J), \nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} e(\xi_I) \rangle_{\text{Ex}}
\end{aligned}$$

□

Für den Vierbeinkalkül notiert man wegen der Linearität der Krümmungstensoren:

Lemma 2.2.3. *Mit Definition 2.2.5 und Lemma 2.2.2 erhält man in der Basisdarstellung:*

$$e_I^\gamma e_\delta^J R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = R_{\alpha\beta I}{}^J. \quad (2.49)$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch einfaches Einsetzen und unter Ausnutzung der Linearitätseigenschaften der einzelnen Objekte.

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta I}{}^J &= \langle \xi^J, D_{[\alpha} D_{\beta]} \xi_I \rangle_I = \langle e^{-1}(\xi^J), \nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} e(\xi_I) \rangle_{\text{Ex}} = \langle e_\delta^J dx^\delta, \nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} (e_I^\gamma \partial_\gamma) \rangle_{\text{Ex}} \\
&= e_I^\gamma e_\delta^J R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta
\end{aligned}$$

□

Für die Einsteinschen Feldgleichungen des Vakuums

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.50)$$

erhält man mit der obigen Definition und den Lemmata

$$e_\nu^K e_J^\beta R_{\mu\beta K}{}^J - \frac{1}{2} e_{\mu K} e_\nu^K R_{\alpha\beta I}{}^J e_J^\beta e^{\alpha I} = 0. \quad (2.51)$$

Das Ergebnis findet sich in dieser Form auch in [Pel94].

2.3 Der Bezug zur 1. Cartanschen Strukturformel

Die 1. Cartansche Strukturformel ist ein wichtiges Hilfsmittel zur expliziten Berechnung der Ashtekarvariablen (siehe Kapitel 5). Die Referenz für die nachfolgenden Ausführungen ist [Nak]. Dort wird in einer Vollständigkeit auf dieses Thema eingegangen, wie sie hier nicht weiter benötigt wird. So soll an dieser Stelle lediglich der Bezug zu den vorangegangenen Kapiteln hergestellt und die Voraussetzungen für spätere Berechnungen geschaffen werden. Ausgangspunkt ist die folgende Definition:

Definition 2.3.1. Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 2.1 sei zu der Basis von Schnitten $\{e_I\}$ das duale Komplement $\{\Theta^I\}$ wie folgt definiert:

$$\Theta^I := e_\alpha^I dx^\alpha. \quad (2.52)$$

Des weiteren sei eine matrix-wertige 1-Form $\{\omega_K^I\}$ gegeben durch:

$$\omega_K^I := \omega_a^I{}_K dx^a, \quad (2.53)$$

wobei es sich bei $\omega_a^I{}_K$ um den in Kapitel 2.2 eingeführten Zusammenhang handelt.

Wählt man zwei Basissysteme $\{e_I\}$ und $\{\Theta^I\}$, so lautet die 1. Cartansche Strukturgleichung :

$$d\Theta^I + \omega_K^I \wedge \Theta^K = T^I. \quad (2.54)$$

Dabei ist mit T^I die Torsions-2-form bezeichnet worden, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll. Speziell für den im vorangegangenen Kapitel gewählten Zusammenhang ist die Torsion 0, so daß es reicht den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 2.3.1. Für den in Kapitel 2.2 definierten Zusammenhang gilt:

$$d\Theta^I + \omega^I_K \wedge \Theta^K = 0 \quad (2.55)$$

Beweis. Wegen $\Gamma^\gamma_{[\alpha\beta]} = 0$ gilt nach Gleichung (2.32) und (2.34):

$$\partial_{[\alpha} e_{\beta]I} - \omega_{[\alpha}^J{}_I e_{\beta]J} = 0. \quad (2.56)$$

Gleichung (2.55) läßt sich nun auf dieses Ergebnis zurückführen. Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_{[\alpha} e_{\beta]I} - \omega_{[\alpha}^J{}_I e_{\beta]J}) dx^\alpha \otimes dx^\beta = (\partial_\alpha e_{\beta I} - \omega_\alpha^J{}_I e_{\beta J}) dx^\alpha \wedge dx^\beta \\ &= (\partial_\alpha e_{\beta I}) dx^\alpha \wedge dx^\beta - (\omega_\alpha^J{}_I e_{\beta J}) dx^\alpha \wedge dx^\beta \\ &= d\Theta_I - (\omega_\alpha^J{}_I dx^\alpha) \wedge (e_{\beta J} dx^\beta) = d\Theta_I + \omega_I^J \wedge \Theta_J, \end{aligned}$$

was nach dem Ziehen der Indizes der gesuchten Formel entspricht. $\square$

2.4 Gewichtete Größen

2.4.1 Hauptfaserbündel, assoziierte Bündel und die kovariante Ableitung

Ein Teil der im späteren Verlauf abgeleiteten Ashtekarvariablen ist durch sogenannte gewichtete Größen gegeben. Das vorliegende Kapitel soll Einblick in die Geometrie dieser Objekte geben. Benötigt wird dazu die Theorie der Hauptfaserbündels. Leider ist hier nicht der Raum für eine akkurate Herleitung dieses Themas. Andererseits sollte auch nicht vollständig auf eine Darstellung verzichtet werden. Wir machen deshalb einen Kompromiß und legen die wichtigsten Definitionen und Schlußfolgerungen dar. Einen schnellen und empfehlenswerten Einstieg bietet [Sve99]. Auch ist es möglich, die nachfolgenden Ausführungen zu überspringen, wenn man die Schlußfolgerungen dieses Kapitels akzeptiert.

Wir beginnen mit der Definition des Hauptfaserbündels.

Definition 2.4.1. Ein Hauptfaserbündel ist ein Faserbündel, dessen typische Faser identisch mit der Strukturgruppe G ist. Dabei wirkt G auf $F = G$ durch übliche Linksmultiplikation.

Ein solches Hauptfaserbündel bezeichnet man auch mit PG , wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind. Im nachfolgenden Text soll angedeutet werden, was man unter einem assoziierten Faserbündel versteht. Für eine genaue Beschreibung sei die einschlägige Literatur empfohlen ([Sve99],[Nak]). Betrachtet werde eine differenzierbare Mannigfaltigkeit F und eine linke Wirkung ρ von G auf F , sowie ein Hauptfaserbündel PG . Mit $PG \times F$ bezeichnet man das Bündel mit Faser $G \times F$ und der Projektion $\hat{\pi} : PG \times F \rightarrow X$, welche durch $\hat{\pi}(p, f) = \pi(p)$ gegeben ist. Das Kozykel von $PG \times F$ sei durch die linke Wirkung $(g, (h, f)) \mapsto (gh, f)$ von G auf $G \times F$ durch das Kozykel von PG induziert. Es sei nun γ eine weitere Wirkung auf $PG \times F$ definiert mit $\gamma(g, (p, f)) =: g \cdot (p, f) = (p \cdot g^{-1}, g \cdot f)$. Mit $PG \times_\rho F$ bezeichnet man den Raum der Orbits dieser Wirkung und mit $\pi_\rho : PG \times F \rightarrow PG \times_\rho F$ die kanonische Abbildung auf den Quotienten. Durch $\tilde{\pi} = \hat{\pi} \circ \pi_\rho^{-1}$ erhält man eine Projektion von $PG \times_\rho F$ nach X . Man zeigt:

Satz und Definition 2.4.1. $PG \times_\rho F$ ist in natürlicher Weise ein Faserbündel, welches isomorph zum Bündel mit der Faser F , der Projektion $\tilde{\pi}$ (abzüglich des Isomorphismus), der Wirkung ρ , der Strukturgruppe G und dem Kozykel von PG ist. $PG \times_\rho F$ versehen mit den angedeuteten Strukturen bezeichnet man als assoziiertes Bündel (zu PG).

Beweis. siehe [Sve99] $\square$

Innerhalb dieses Kapitels möge nun das Isomorphismuszeichen ausschließlich für den oben beschriebenen kanonischen Isomorphismus stehen (wir wollen nicht extra ein neues Zeichen einführen). Hat man nun ein Faserbündel E mit Faser F und der Wirkung $\rho : G \times F \rightarrow F$, so findet sich umgekehrt immer genau ein Hauptfaserbündel PG , so daß $E \cong PG \times_\rho F$ gilt (siehe ebenfalls [Sve99]). In diesem Sinne bezeichnet man auch PG als das zu E (re)assoziierte Hauptfaserbündel.

Beispiel 2.4.1 (Das Repèrebündel und assoziierte Strukturen).

1. Wie schon erwähnt, ist das Tangentialbündel ein Vektorbündel mit der Strukturgruppe $Gl(n)$. Sei $\rho_1 : (A, z) \rightarrow Az$ mit $z \in \mathbb{R}^n$ die natürliche Darstellung von $Gl(n)$ auf $\mathbb{R}^n$, dann ist $L(M)$ das zu TM assoziierte Hauptfaserbündel, für das gilt

$$TM \cong L(M) \times_{\rho_1} \mathbb{R}^n. \quad (2.57)$$

$L(M)$ wird als Repèrebündel bezeichnet. Eine Diskussion zu Repèrebündeln findet man in [Rud04].

2. Durch $\rho_2 : (A, z) \rightarrow (A^T)^{-1}z$ mit $z \in \mathbb{R}^{n*}$ ist T^*M über

$$T^*M \cong L(M) \times_{\rho_2} \mathbb{R}^{n*} \quad (2.58)$$

gegeben.

3. Es sei weiter das Repèrebündel das zugrundeliegende Hauptfaserbündel. Wir wählen $\rho_3 : A \rightarrow \det A^{-W}$ als Darstellung der $Gl(n)$ auf $\mathbb{R}$, dann wird das Linienbündel Δ^W der Skalare vom Gewicht W durch

$$\Delta^W \cong L(M) \times_{\rho_3} \mathbb{R} \quad (2.59)$$

definiert.

Im obigen Beispiel wurden, ausgehend vom Repèrebündel der Mannigfaltigkeit M , mit Hilfe der Konstruktion der assoziierten Bündel verschiedene Vektorbündel abgeleitet. Wir betrachten nun Zusammenhänge auf diesen Strukturen. Ist allgemein ein Zusammenhang auf einem Hauptfaserbündel gegeben, so läßt sich auf natürliche Weise ein Zusammenhang auf den unterliegenden assoziierten Vektorbündeln induzieren. Wie dies geschieht wird im nachfolgenden Text behandelt. Sei V ein Vektorraum und G eine Liegruppe, welche über die Darstellung $\rho : G \rightarrow Gl(V)$ auf V wirke. Entlang der üblichen Konventionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{g}$ die zur Liegruppe zugehörige Liealgebra. Eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ in V ist per Definition ein Lie-Algebra-Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ nach $\text{End}(V)$. Die Darstellung ρ von G induziert eine Darstellung $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{g}$ durch

$$\mathfrak{r}(L) := \left. \frac{d}{dt} \rho(\exp(Lt)) \right|_{t=0}. \quad (2.60)$$

Es sei nun auf PG ein Zusammenhang gegeben. Auf einem zu PG assoziierten Bündel ist der entsprechende induzierte Zusammenhang in der lokalen Trivialisierung wie folgt definiert.

Definition 2.4.2. Gegeben sei ein Hauptfaserbündel PG mit einem Zusammenhang. Der lokale Repräsentant der Zusammenhangsform werde mit ω bezeichnet. Sei $E \cong PG \times_{\rho} F$ ein zu PG assoziiertes Vektorbündel. Der auf E induzierte Zusammenhang ist in der entsprechenden korrespondierenden Trivialisierung über seinen lokalen Repräsentanten Γ durch

$$\Gamma(X) := \mathfrak{r}(\omega(X)) \text{ für } X \in TM \quad (2.61)$$

definiert, d.h. insgesamt ist der Zusammenhang durch

$$\nabla_{\mathcal{X}} s = \mathcal{X}(s) + \mathfrak{r}(\omega(X))s \quad (2.62)$$

gegeben (siehe [Sve99]).

Beispiel 2.4.2. Es sei ω der lokale Repräsentant eines Zusammenhangs auf dem Repèrebündel. Für die in 2.4.1 definierten Vektorbündel erhält man:

1. TM :

$$\Gamma(X) = \Gamma_1(X) = \left. \frac{d}{dt} (\exp(\omega(X)t)) \right|_{t=0} = \omega(X) \quad (2.63)$$

2. T^*M :

$$\Gamma_2(X) = \frac{d}{dt}(((\exp(\omega(X)t))^T)^{-1}) \Big|_{t=0} = -\omega(X)^T = -\Gamma(X)^T \quad (2.64)$$

3. Δ^W :

$$\Gamma_3(X) = \frac{d}{dt}(\det(\exp(\omega(X)t))^{-W}) \Big|_{t=0} = -W \operatorname{tr}(\omega(X)) = -W \operatorname{tr}(\Gamma(X)) \quad (2.65)$$

Ist jetzt $S \in \Gamma(\Delta^1 \otimes TM \otimes (M \times \mathbb{R}^4))$, wobei auf TM und $M \times \mathbb{R}^4$ die in den vorangegangenen Kapitel eingeführten Zusammenhänge gegeben seien, dann läßt sich über dem zu TM gehörigen Repèrebündel auf Δ^1 ein entsprechender Zusammenhang induzieren. Man erhält auf $\Gamma(\Delta^1 \otimes TM \otimes (M \times \mathbb{R}^4))$ einen Zusammenhang $\mathcal{D}'$. Da es sich bei $\mathcal{D}'$ um einen induzierten Zusammenhang handelt, lassen wir den Strich gleich wieder wegfallen. Die Basisdarstellung der kovarianten Ableitung ist somit durch

$$\mathcal{D}_a(S_{bi}) = \partial_a(S_{bi}) + \Gamma_{ab}^c S_{ci} - \Gamma_{ac}^c S_{bi} + \omega_{ai}^k S_{bk} \quad (2.66)$$

gegeben.

2.4.2 Gewichtete Größen und die Cramersche Regel

Im folgenden wird mit D die Dimension des betrachteten Raumes bezeichnet. Ziel des Kapitels ist der Beweis des folgenden (in späteren Kapiteln benötigten) Lemmas.

Lemma 2.4.1. *Sei T_{ai} eine invertierbare $D \times D$ Matrix und T^{ai} ihr Inverses mit $T_{ai}T^{bi} = \delta_a^b$, dann gilt*

$$T^{ai}T = \frac{1}{(D-1)!} \epsilon^{aa_1 \dots a_{D-1}} \epsilon^{ii_1 \dots i_{D-1}} T_{a_1 i_1} \dots T_{a_{D-1} i_{D-1}}, \quad (2.67)$$

wobei $T = \det(T_{ai})$ ist.

Beweis. Dazu bemerkt man, daß nach Definition der Determinante

$$\det(S_{ai}) := \frac{1}{D!} \epsilon^{a_1 \dots a_D} \epsilon^{i_1 \dots i_D} S_{a_1 i_1} \dots S_{a_D i_D} \quad (2.68)$$

für eine beliebige Matrix S gilt. Berücksichtigt man des weiteren den Laplaceschen Entwicklungssatz, so erhält man mit (2.68) für die rechte Seite von (2.67):

$$\frac{1}{(D-1)!} \epsilon^{aa_1 \dots a_{D-1}} \epsilon^{ii_1 \dots i_{D-1}} T_{a_1 i_1} \dots T_{a_{D-1} i_{D-1}} =$$

$$\begin{vmatrix} T_{11} & \dots & T_{1i-1} & 0 & T_{1i+1} & \dots & T_{1D} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{a-11} & \dots & T_{a-1i-1} & 0 & T_{a-1i+1} & \dots & T_{a-1D} \\ T_{a1} & \dots & T_{ai-1} & 1 & T_{ai+1} & \dots & T_{aD} \\ T_{a+11} & \dots & T_{a+1i-1} & 0 & T_{a+1i+1} & \dots & T_{a+1D} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{D1} & \dots & T_{Di-1} & 0 & T_{Di+1} & \dots & T_{DD} \end{vmatrix} =: T_i. \quad (2.69)$$

Für das weitere Vorgehen erweist sich die Anwendung der Cramerschen Regel (siehe [Heu00]) als sinnvoll. Sie lautet

Satz 2.4.1 (Cramersche Regel). *Das Gleichungssystem $Ax = y$ besitzt im Falle $\det(A) \neq 0$ stets eine, aber auch nur eine Lösung x . Die Komponenten x_k berechnen sich nach der Formel*

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \quad (2.70)$$

Dabei wird als A_k diejenige Matrix bezeichnet, die man erhält, wenn die i -te Spalte von A durch den Spaltenvektor y ersetzt.

Um das Lemma zu zeigen, muss nun

$$\frac{T_i}{T} =: t_i \quad (2.71)$$

berechnet werden. Mit (2.4.1) gilt für t_i (Komponente von t):

$$\begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1D} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{a1} & \cdots & T_{aD} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{D1} & \cdots & T_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ t_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ t_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{a1} \\ \vdots \\ T^{ai} \\ \vdots \\ T^{aD} \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

d. h. insbesondere $t_i = T^{ai}$. Die Lösung ist (nach (2.4.1)) eindeutig und das Lemma somit bewiesen. $\square$

Kapitel 3

Die Hamiltonsche Formulierung der Gravitation

3.1 Das Wirkungsprinzip der Gravitation

Wir werden in diesem und den nachfolgenden Kapiteln in großen Teilen den Darstellungen von [Pel94] bzw. [NM93] folgen. Das Wirkungsprinzip ist eines der zentralen Prinzipien der klassischen Mechanik. Es besagt für Einteilchensysteme, daß von verschiedenen möglichen Bahnkurven $q(t)$ eines physikalischen Systems diejenige verwirklicht wird, bei welcher die Wirkung stationär wird, d.h.

$$\delta S[q(t)] = 0 \quad \text{mit} \quad S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (3.1)$$

Die Funktion $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ wird als Lagrangefunktion bezeichnet. Das Wirkungsprinzip, auch Hamiltonsches Prinzip genannt, läßt sich auf Feldtheorien erweitern.

3.1.1 Die geometrische Formulierung des Wirkungsprinzips für klassische Felder

Es soll hier ein kurzer Einblick in die geometrische Formulierung des Wirkungsprinzips klassischer Feldtheorien gegeben werden. Die Ausführungen sind keinesfalls als strenge Herleitungen zu verstehen. Weitergehende Analysen findet man unter anderem in [GMS], [Woo] oder [CLM03]. Ist M weiterhin die zugrunde liegende Raumzeitmannigfaltigkeit, dann definiert man ein Feld als einen Schnitt ϕ in einem lokal trivialen Vektorbündel $E \rightarrow M$. Es erweist sich als günstig, gewisse Äquivalenzklassen $j_m[s]$ von Feldern bzw. Schnitten über einen Punkt $m \in M$ zu betrachten.

Definition 3.1.1. Für $s, s' \in \Gamma(E)$ ist die Äquivalenzrelation $\sim_{j_m}$ mit $m \in M$ definiert durch:

$$s \sim_{j_m} s' \Leftrightarrow s(m) = s'(m), \quad Ts = Ts' . \quad (3.2)$$

Die Äquivalenzklasse $j_m[s]$ wird als Jet erster Ordnung von Schnitten im Punkt $m \in M$ bezeichnet.

Wir betrachten eine lokale Karte $\{U, \kappa\}$ auf M und eine zugehörige lokale Trivialisierung $\{U, \chi\}$. Es existiert eine Basis von lokalen Schnitten $\{\sigma_i\}$, so daß jeder lokale Schnitt s über U als $s = s^i \sigma_i$ dargestellt werden kann. Damit gilt:

$$s' \in j_m[s] \Leftrightarrow s(m) = s'(m), \quad \partial_a s'^i(m) = \partial_a s^i(m) . \quad (3.3)$$

Wir betrachten die Menge

$$J^1 E = \bigcup_{m \in M} j_m[s] . \quad (3.4)$$

Auf $J^1 E$ sind die folgenden kanonischen Projektionen gegeben:

$$\pi^1 : J^1 E \ni j_m s \mapsto m \in M \quad (3.5)$$

$$\pi_0^1 : J^1 E \ni j_m s \mapsto s(m) \in E, \quad (3.6)$$

so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} J^1 E & \xrightarrow{\pi_0^1} & E \\ & \searrow \pi^1 \quad \swarrow \pi & \\ & M & \end{array} \quad (3.7)$$

Weil E ein lokal triviales Faserbündel ist, kann man auf E ein lokales Koordinatensystem (x^i, a^j) mit $1 \leq i \leq n = \dim M$, $1 \leq j \leq l = \dim F$ betrachten und so auf $J^1 E$ ein lokales Koordinatensystem (x^i, a^j, a_i^j) über

$$a_i^j(j_m[s]) = \frac{\partial a^j(s)}{\partial x^i}(m) \quad (3.8)$$

definieren. Diese lokalen Karten induzieren auf $J^1 E$ die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Die Dimension von $J^1 E$ ist durch $\dim J^1 E = n + m + nm$ gegeben.

Definition 3.1.2. $J^1 E$, versehen mit der durch die Karten induzierten Topologie, heißt Mannigfaltigkeit der Jets erster Ordnung von E . $J^1 E$ mit der Faserung (3.5) wird als Bündel der Jets erster Ordnung (von E), mit Faserung (3.6) hingegen als *affines* Bündel der Jets erster Ordnung (von E) bezeichnet.

Bemerkung 3.1.1. i) Es sei erwähnt, daß ein Zusammenhang auf E , im Sinne von Ehresmann, gerade über einen Schnitt im Bündel $J^1 E \rightarrow E$ definiert werden kann. Für G -Bündel ist meist noch die Bedingung $(R_g)_* H_x = H_{xg}$ für alle $x \in E$ und $g \in G$ gegeben, d.h. die den Schnitt definierenden horizontalen Unterräume sind in der Faser parallel verschoben. Ein solcher (invarianter) Zusammenhang kann dann gerade mit einem Schnitt in $J^1 E \rightarrow M$ identifiziert werden.

ii) $J^1 E$ ist, grob gesprochen, die multidimensionale Verallgemeinerung des Tangentialraum-Begriffes. Statt den Wegen in einer Mannigfaltigkeit M , welche man als Schnitte in M über einem eindimensionalen Intervall auffassen kann, betrachtet man Schnitte in E über einer mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit M .

Wir definieren den Begriff der ersten Jet-Prolongation eines Schnittes.

Definition 3.1.3. Sei $\phi \in \Gamma(E)$ ein Schnitt des Bündel $E \rightarrow M$. Die Abbildung

$$j^1 \phi : M \ni m \mapsto j_m^1[\phi] \in J^1 E \quad (3.9)$$

definiert einen Schnitt in $J^1 E \rightarrow M$ der erste Jet-Prolongation des Schnittes ϕ genannt wird

Das dynamische Verhalten der zu betrachtenden Felder ist durch die Lagrangedichte $\mathcal{L} : J^1 E \rightarrow \bigwedge^n T^* M$ bestimmt. Wir definieren den Begriff der kritischen Lösung ([CLM03]).

Definition 3.1.4. Sei s ein lokaler Schnitt im Bündel $E \rightarrow M$, dann heißt s kritische Lösung des durch $\mathcal{L}$ definierten Variationsproblems, falls für jede glatte Familie $\{s_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}}$ gilt:

$$\frac{d}{d\epsilon} \int \mathcal{L} \circ j^1 s_\epsilon = 0. \quad (3.10)$$

Wir bringen dies mit den Feldgleichungen in Verbindung, durch die das Verhalten des physikalischen Systems bestimmt wird.

Definition 3.1.5. Eine Lagrangedichte $\mathcal{L}$ heißt einer bestimmten Feldtheorie zugehörig, falls jede kritische Lösung des durch $\mathcal{L}$ definierten Variationsproblems, auch Lösung der Feldgleichungen ist und umgekehrt.

Das Wirkungsprinzip für klassische Felder besagt somit, daß die Lösungen der Feldgleichungen kritische Lösungen des, durch die zur Feldtheorie zugehörigen Lagrangedichte definierten, Variationsprinzips sind.

3.1.2 Die Lagrangedichte der Gravitation

Im Mittelpunkt dieses Kapitels wird die Lagrangedichte der Gravitation stehen. Wir wollen hier eine, an die Yang-Mills-Theorien stark angelehnte, geometrische Version dieser Lagrangedichte im Vierbeinformalismus angeben, zu deren Formulierung wir noch die Definition des Keilproduktes zwischen E und E^* -wertigen 1-Formen eines Faserbündels $E \rightarrow M$ benötigen.

Definition 3.1.6. Sei $b \otimes \beta$ mit $b \in \Gamma(E), \beta \in \Lambda^1(M)$ eine E -wertige 1-Form des Faserbündels $E \rightarrow M$ und $a \otimes \alpha$ mit $a \in \Gamma(E^*), \alpha \in \Lambda^1(M)$ eine E^* -wertige 1-Form des zu E dualen Bündels, dann ist $(a \otimes \alpha) \wedge (b \otimes \beta)$ die durch

$$(a \otimes \alpha) \wedge (b \otimes \beta) := (a \otimes b) \otimes (\alpha \wedge \beta) \quad (3.11)$$

definierte $\text{End}(E)$ -wertige 2-Form.

Es soll nun die Lagrangedichte der Gravitation im Vierbeinformalismus angegeben werden. Dazu betrachten wir das Bündel $S = T^*M \otimes (M \times \mathbb{R}^4)$ aus Kapitel 2.1. Mit den Definitionen

$$e^{-1} := e_\alpha^I dx^\alpha \otimes \xi_\beta, \quad (3.12)$$

$$e_b^{-1} := e_{\beta J} dx^\beta \otimes \xi^J \quad (3.13)$$

ist die Lagrangedichte der Gravitation auf dem Bündel $J^2 S := J^1(J^1 S)^1$ durch

$$\mathcal{L}_{EH}(j^2 e^{-1}) = \text{Tr}(F \wedge *(e^{-1} \wedge e_b^{-1})), \quad (3.14)$$

wobei wir mit F die Krümmung des Lorentz-Zusammenhangs D bezeichnet haben. Bevor wir nachweisen, daß das zu $\mathcal{L}_{EH}$ zugehörige Variationsproblem auch wirklich zu den Einsteinschen Feldgleichungen äquivalent ist, wollen wir $\mathcal{L}_{EH}$ in eine etwas andere Form schreiben. Es sei vol der Volumenoperator und R der Ricci-Skalar bezüglich der Metrik g , dann gilt:

Lemma 3.1.1.

$$\mathcal{L}_{EH} = R vol. \quad (3.15)$$

Beweis. Wir definieren $e_{\alpha\beta} := e_\alpha^I e_{\beta J} \xi_I \otimes \xi^J$ und berechnen somit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EH} &= \text{Tr}(F \wedge *(e^{-1} \wedge e_b^{-1})) = \text{Tr}(\langle F, e^{-1} \wedge e_b^{-1} \rangle vol) \\ &= \text{Tr}(\langle F, (e_\alpha^I dx^\alpha \otimes \xi_I) \wedge (e_{\beta J} dx^\beta \otimes \xi^J) \rangle vol) \\ &= \text{Tr}(\langle F, (e_\alpha^I e_{\beta J} \xi_I \otimes \xi^J) \otimes (dx^\alpha \wedge dx^\beta) \rangle vol) = \text{Tr}(\langle F, e_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \rangle vol) \\ &= \text{Tr}(F_{\gamma\delta} e^{\gamma\delta}) vol = \text{Tr}((\xi_I \otimes \xi^K) \cdot (\xi_J \otimes \xi^L) F_{\gamma\delta K}^I e^{J\gamma} e_L^\delta) vol \\ &= \text{Tr}((\xi_I \otimes \xi^L) F_{\gamma\delta J}^I e^{J\gamma} e_L^\delta) vol = F_{\gamma\delta J}^L e^{J\gamma} e_L^\delta vol \doteq R_{\gamma\delta J}^L e^{J\gamma} e_L^\delta vol \\ &= R vol. \end{aligned}$$

□

In einer lokalen Karte erhält man:

$$S_{EH} := \int_M \mathcal{L} \circ j^1 e^{-1} = \int_M R vol = \int_M R \sqrt{\det g} dx^n. \quad (3.16)$$

Die Lagrangedichte in der Form $L_{EH} = R \sqrt{\det g}$ wurde zuerst von Hilbert propagiert, weshalb L_{EH} auch als Einstein-Hilbert Lagrangedichte bezeichnet wird. Wir kommen nun zum Variationsproblem der Lagrangedichte.

Satz 3.1.1. Die zur Gravitation zugehörige Lagrangedichte ist $\mathcal{L}_{EH}$.

¹Achtung, es ist nicht von Belang, daß $e_b^{-1} \notin \Gamma(S)$ gilt, da die Lagrangedichte letztendlich nur Aussagen über die Komponenten e_α^I und deren partiellen Ableitungen macht.

Beweis. Wir setzen im folgenden $e := \det(e_{\alpha I})$. Aus dem Kontext soll dabei hervorgehen, ob von der Determinante $e = \det(e_{\alpha I})$ oder von Schnitten $e \in \Gamma(TM \otimes (\mathbb{R} \times M)^*)$ die Rede ist. Da immer noch der Vierbeinkalkül benutzt wird, betrachten wir L_{EH} in der Form

$$L_{EH} = e(e_I^\alpha e_J^\beta R_{\alpha\beta}{}^{IJ}). \quad (3.17)$$

Es ist nun zu zeigen, daß $\delta S_{EH} = 0$ die Einsteinschen Feldgleichungen (für das Vakuum) impliziert und daß aus den Einsteinschen Feldgleichungen das Verschwinden von δS_{EH} abzuleiten ist. Dazu kann man einfach nachweisen, daß die diesem Variationsproblem zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung (die Bündelkoordinaten auf $J^2 E$ sind lokal gerade $(x^\nu, y^A, y_\nu^A, y_{\nu\mu}^A)$)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} (j^2 e^{-1}) + \frac{d}{dx^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_\nu^A} (j^2 e^{-1}) + \frac{d^2}{dx^\nu dx^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{\nu\mu}^A} (j^2 e^{-1}) = 0 \quad (3.18)$$

den Einsteinschen Feldgleichungen entspricht. Wir werden hier allerdings den in der Physik oftmals verwendeten Variationskalkül benutzen. Die Gesamtvariation von (3.17) ergibt sich nach der Produktregel aus der Variation der einzelnen Faktoren, wobei der Faktor $R_{\alpha\beta}{}^{IJ}$ einen Oberflächenterm liefert (wird nicht gezeigt), welcher nach der Integration verschwindet. Es gilt:

$$S_{EH} = \int_M dx^4 e e_I^\alpha e_J^\beta R_{\alpha\beta}{}^{IJ} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta S_{EH} &= \int_M dx^4 (\delta e) e_I^\alpha e_J^\beta R_{\alpha\beta}{}^{IJ} + \int_M dx^4 e (\delta e_I^\alpha) e_J^\beta R_{\alpha\beta}{}^{IJ} + \int_M dx^4 e e_I^\alpha (\delta e_J^\beta) R_{\alpha\beta}{}^{IJ} \\ &\quad + \int_M \text{Oberflächenterm} . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Variation der Determinante ist mit

$$e = \frac{1}{D!} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_D} \epsilon^{I_1 \dots I_D} e_{\alpha_1 I_1} \dots e_{\alpha_D I_D} \quad (3.21)$$

gegeben durch

$$\delta e = \frac{1}{D!} D \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_D} \epsilon^{I_1 \dots I_D} (\delta e_{\alpha I}) e_{\alpha_2 I_2} \dots e_{\alpha_D I_D} \stackrel{(2.67)}{=} e e^{\alpha I} \delta e_{\alpha I} = e e_I^\alpha \delta e_\alpha^I = -e e_\alpha^I \delta e_I^\alpha \quad (3.22)$$

wobei in der letzten Umformung

$$0 = \delta(e_I^\alpha e_\alpha^I) = e_I^\alpha \delta e_\alpha^I + e_\alpha^I \delta e_I^\alpha \Rightarrow e_I^\alpha \delta e_\alpha^I = -e_\alpha^I \delta e_I^\alpha \quad (3.23)$$

genutzt wurde. Der erste Integrand in (3.20) berechnet sich nach Umbenennung der Indizes deshalb zu

$$(\delta e) e_I^\alpha e_J^\beta R_{\alpha\beta}{}^{IJ} = -e e_\alpha^I e_K^\gamma e_J^\beta R_{\gamma\beta}{}^{KJ} \delta e_I^\alpha . \quad (3.24)$$

Der zweite Integrand von (3.20) ist bereits über die Variation δe_I^α ausgedrückt. Der dritte Integrand soll ebenfalls nach δe_I^α umgeformt werden. Dies läßt sich leicht durch eine Umindizierung erreichen. Wenn noch die Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors berücksichtigt werden, so erhält man:

$$e e_I^\alpha (\delta e_J^\beta) R_{\alpha\beta}{}^{IJ} = e e_J^\beta (\delta e_I^\alpha) R_{\beta\alpha}{}^{JI} = e e_J^\beta (\delta e_I^\alpha) R_{\alpha\beta}{}^{IJ} . \quad (3.25)$$

(3.24) und (3.25) eingesetzt in (3.20) ergibt

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int dx^4 e (-e_\alpha^I e_K^\gamma e_J^\beta R_{\gamma\beta}{}^{KJ} + 2 e_J^\beta R_{\alpha\beta}{}^{IJ}) \delta e_I^\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow -e_\alpha^I e_K^\gamma e_J^\beta R_{\gamma\beta}{}^{KJ} + 2 e_J^\beta R_{\alpha\beta}{}^{IJ} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Das letzte Gleichungssystem, multipliziert mit $e_{I\delta}$ als linear unabhängigen Vektor, ist zu den Einsteinschen Feldgleichungen äquivalent (Die umgekehrte Schlußfolgerung ergibt sich, weil die unten stehende Gleichung für Multiplikation eines beliebigen Vektor $(e_\delta)_I$ aus dem Basissystem $\{e_\delta\}$ verschwindet.):

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e_{I\delta} e_J^\beta R_{\alpha\beta}{}^{IJ} - \frac{1}{2} e_{I\delta} e_\alpha^I e_K^\gamma e_J^\beta R_{\gamma\beta}{}^{KJ} &= 0 \\ \Leftrightarrow R_{\alpha\delta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\delta} R &= 0 . \end{aligned}$$

□

3.2 Die ADM-Zerlegung der Gravitation

3.2.1 Zerlegung des Lagrangians nach den Anholonomien

Die ADM-Zerlegung, die im nächsten Abschnitt behandelt wird, soll hier auf der Basis des Vierbeins vollzogen werden. Es wird die Darstellung des Krümmungskalars nach den Anholonomien Ω^{IJK} benötigt. Dazu formulieren wir den folgenden Satz.

Satz 3.2.1. *Es sei $\mathcal{O} := eD_{[\alpha}\langle\xi^J e_J^\alpha e^{K\beta}, D_{\beta]}\xi_K\rangle$. Dann gilt für den Krümmungsskalar bzw. für die Lagrangedichte der Einstein-Hilbert-Wirkung*

$$L_{EH} = e \left(\Omega_K{}^{LK} \Omega_{IL}{}^I - \frac{1}{2} \Omega^{IKL} \Omega_{ILK} - \frac{1}{4} \Omega^{LIK} \Omega_{LIK} \right) + \mathcal{O} \quad (3.27)$$

Beweis. Mit der Definition (2.2.5) gilt für die Skalarkrümmung:

$$\begin{aligned} L_{EH} &= eR = ee^{\alpha M} e_K^\beta R_{\alpha\beta M}{}^K = ee_I^\alpha e^{\beta J} \langle \xi^K, D_{[\alpha} D_{\beta]} \xi_M \rangle \\ &= ee_K^\beta D_{[\alpha} \langle \xi^K, D_{\beta]} \xi_M \rangle e^{\alpha M} - ee_K^\beta \langle D_{[\alpha} \xi^K, D_{\beta]} \xi_M \rangle e^{\alpha M} \\ &= \mathcal{O} - ee_K^\beta \omega_{[\alpha}{}^{JK} \omega_{\beta]JM} e^{\alpha M} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Der Term $\mathcal{O}$ ist nach [Pel94] ein Oberflächenterm. Dieser soll später weggelassen werden, da wir eine Mannigfaltigkeit ohne Rand angenommen haben und $\mathcal{O}$ somit für die Einstein-Hilbert-Wirkung nicht von Bedeutung ist. Es ist nun möglich, über die Gleichung

$$\omega_\alpha{}^{IJ} = \frac{1}{2} e_{\alpha K} (\Omega^{KIJ} + \Omega^{JKI} - \Omega^{IJK}) \quad (3.29)$$

R (bis auf $\mathcal{O}$) nach den Anholonomien zu zerlegen. Als Rechnung ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} e_K^\beta \omega_\alpha{}^{JK} \omega_{\beta JM} e^{\alpha M} &= \frac{1}{4} e_K^\beta e_{\alpha L} (\Omega^{LJK} + \Omega^{K LJ} - \Omega^{JKL}) e_\beta^I (\Omega_{IJM} + \Omega_{MIJ} - \Omega_{JMI}) e^{\alpha M} \\ &= \frac{1}{4} \delta_K^I \delta_L^M \cdot () () = \frac{1}{4} (\Omega^{MJI} + \Omega^{IMJ} - \Omega^{JIM}) (\Omega_{IJM} + \Omega_{MIJ} - \Omega_{JMI}) \\ &= \Omega^{MJI} \Omega_{IJM} + \Omega^{MJI} \Omega_{MIJ} - \Omega^{MJI} \Omega_{JMI} + \Omega^{IMJ} \Omega_{IJM} + \Omega^{IMJ} \Omega_{MIJ} \\ &\quad - \Omega^{IMJ} \Omega_{IJM} - \Omega^{JIM} \Omega_{IMJ} - \Omega^{JIM} \Omega_{MIJ} + \Omega^{JIM} \Omega_{MJI} \\ &= \frac{1}{4} (2\Omega^{JIM} \Omega_{JMI} + \Omega^{MIJ} \Omega_{MJI}) , \end{aligned} \quad (3.30)$$

wobei in der letzten Zeile $\Omega^{MIJ} = -\Omega^{IMJ}$ berücksichtigt wurde. Der zweite Term in (3.28) wird

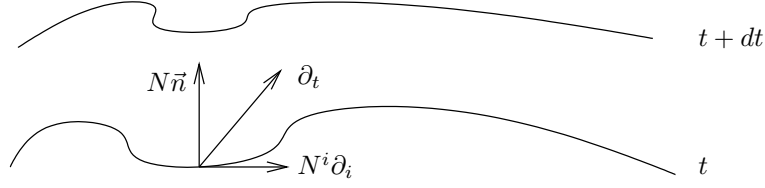


Abbildung 3.1: Zerlegung des zeitartigen Vektorfeldes

in den Anholonomien analog durch

$$\begin{aligned}
& e_K^\beta \omega_\beta^{JK} \omega_{\alpha JM} e^{\alpha M} \\
&= \frac{1}{4} e_K^\beta e_{\beta L} (\Omega^{KIL} + \Omega^{JKL} - \Omega^{IJL}) e_{\alpha N} (\Omega^N_{JM} + \Omega_M^N{}_J - \Omega_{JM}^N) e^{\alpha M} \\
&= \frac{1}{4} \eta_{KL} \delta_N^M \cdot () () = \frac{1}{4} (\Omega_K^{JK} + \underbrace{\Omega_K^K{}_J}_0 - \Omega^{JK}_K) (\Omega^N_{JN} + \underbrace{\Omega_N^N{}_J}_0 - \Omega_{JN}^N) \\
&= \frac{1}{4} (2\Omega_K^{JK}) (2\Omega^N_{JN}) = \Omega_K^{JK} \Omega_{NJ}^N
\end{aligned} \tag{3.31}$$

realisiert. Das Wirkungsfunktional ist somit gegeben durch:

$$L_{EH} = e \left(\Omega_K^{LK} \Omega_{IL}^I - \frac{1}{2} \Omega^{IKL} \Omega_{ILK} - \frac{1}{4} \Omega^{LIK} \Omega_{LIK} \right) + \mathcal{O} . \tag{3.32}$$

□

Der Oberflächenterm wird in den nachfolgenden Betrachtungen weggelassen.

3.2.2 Die ADM-Zerlegung des Vierbeins und der Metrik

Die Formulierung der Gravitation nach Arnowitt, Deser und Misner [ADM62] ist durch den Wunsch nach einer dynamischen Theorie motiviert. Voraussetzung dafür ist die globale Hyperbolizität der Raumzeit. Es wird angenommen, M sei topologisch äquivalent zu $\mathbb{R} \times \Sigma$, wobei die Koordinate $\mathbb{R}$ die Rolle eines Zeitparameters übernimmt. Mathematisch wird die Raumzeit deshalb durch eine Blätterung von raumartigen Untermannigfaltigkeiten nach einem zeitartigen Vektorfeld ∂_t beschrieben.

Das zentrale Objekt der ADM-Formulierung ist weiterhin die Metrik, deren dynamische Entwicklung in den 10 Einsteinschen Feldgleichungen kodiert wird. Wird die Metrik nun auf eine der raumartigen Hyperflächen eingeschränkt, so stellt man fest, daß nicht jede beliebige Wahl mit den Feldgleichungen vereinbar ist. So sind 4 der Feldgleichungen *Zwangsbedingungen*, welche von den Anfangsdaten (d.h. von der auf $\{t\} \times \Sigma$ eingeschränkten Metrik q) erfüllt werden müssen. Die zeitliche Veränderung der Metrik ist dann durch die 6 übrigen Feldgleichungen (*Evolutionsgleichungen*) determiniert, wenn die Einbettung der Hyperfläche und die Blätterung der Raum-Zeit einbezogen werden. Dies geschieht über eine Zerlegung des zeitartigen Vektorfeldes, nach den – die Hyperfläche aufspannenden – raumartigen Vektorfeldern, sowie dem zugehörigen senkrechten Vektorfeld $\vec{n}$ mit Norm -1 (siehe Abb. 3.1). Es gilt:

$$\partial_t = N\vec{n} + N^i \partial_i \quad \text{mit} \quad N, N^i \in C^\infty(M), \quad i = 1, 2, 3 . \tag{3.33}$$

Die hierbei auftretenden Funktionen N und N^i werden als Lapse- und Shift-Funktion bezeichnet. Sie sind durch

$$N = -g(\vec{n}, \partial_t) \tag{3.34}$$

$$N_i = g(\partial_i, \partial_t) = g_{0i} \tag{3.35}$$

gegeben. Im folgenden mögen kleine lateinische Indizes nur räumliche Koordinaten bezeichnen. Die Hyperfläche Σ ermöglicht nun die Definition weiterer mathematischer Objekte. So ist zunächst zu bemerken, daß die räumlichen Vektorfelder auf M per Konstruktion ebenfalls in natürlicher Weise den Tangentialraum von Σ aufspannen. Weiterhin läßt sich auf Σ eine eingeschränkte Metrik derart definieren, daß die Darstellung dieser 3-dimensionalen Metrik q bezüglich der ∂_i gleich der Darstellung der 4-dimensionalen Metrik g bezüglich derselben ∂_i ist, d.h. es gilt:

$$q = q_{ab} dx^a \otimes dx^b = g_{ab} dx^a \otimes dx^b \Rightarrow q_{ab} = g_{ab} . \quad (3.36)$$

Faßt man die N_i als tensorielle Objekte auf, so mögen deren Indizes des weiteren mit der eingeschränkten Metrik q und ihrem dualen Komplement gehoben und gesenkt werden. Dies bedeutet gleichwohl, daß die N_i als 3er (3-dimensionale) Tensoren auf der Hyperfläche zu interpretieren sind. Mit

$$\begin{aligned} g_{00} &= g(N\vec{n} + N^i \partial_i, N\vec{n} + N^k \partial_k) = N^2 g(\vec{n}, \vec{n}) + N^i N^k g(\partial_i, \partial_k) \\ &= -N^2 + N^i N^k g_{ik} = -N^2 + N^i N_i \end{aligned} \quad (3.37)$$

und (3.35) erhält man für die Metrik

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_a \\ N_a & g_{ab} \end{pmatrix} . \quad (3.38)$$

Die eingeschränkte Metrik bildet in dieser Betrachtungsweise das Analogon zu den Ortsvariablen in der klassischen Mechanik.² Ihre zeitliche Ableitung entspricht den klassischen Geschwindigkeiten. Entsprechend der Philosophie, das Vierbein als grundlegendes Konfigurationssystem anzusehen, soll die Standard-ADM-Zerlegung (3.38) der Metrik an dieser Stelle – ad hoc – über eine Substitution der Vierbeinvariablen vorgenommen werden (man interpretiere die neu eingeführten Variablen zunächst als glatte Funktionen über M):

$$\begin{array}{llll} e_{0I} = N N_I + N^a V_{aI}, & e_{aI} = V_{aI}, & N^I V_{aI} = 0, & N^I N_I = -1 \end{array} \quad (3.39)$$

$$\begin{array}{llll} \text{Unbekannte :} & 1 + 4 + 3 + 12 & & = 20 \\ \text{Gleichungen :} & 4 & +12 & +3 & +1 & = 20 \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen, daß diese Zerlegung wieder auf (3.38) führt, d.h. es ist die Metrik mit (3.40) zu berechnen (interne Indizes können mit η bel. gezogen werden) :

$$\begin{aligned} g_{00} &= e_0^I e_{0I} = (N \cdot N^I + N^a V_a^I)(N \cdot N_I + N^a V_{aI}) \\ &= N^2 \underbrace{N_I N^I}_{-1} + \underbrace{N \cdot N^I N^a V_{aI}}_0 + \underbrace{N \cdot N^a V_{aI} N \cdot N_I}_0 + N^a \underbrace{V_a^I N^b V_{bI}}_{\text{Def: } N_a := V_{aI} V_b^I N^b} \\ &= -N^2 + N^a N_a \\ g_{0a} &= e_0^I e_{aI} = (N \cdot N^I + N^b V_b^I) \cdot V_{aI} = N \cdot N^I V_{aI} + N^b V_b^I \cdot V_{aI} \\ &= N_a \\ \Rightarrow g_{a0} &= N_a \\ g_{ab} &= e_{aI} e_b^I = V_{aI} V_b^I \\ \Rightarrow g_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_a \\ N_a & V_{aI} V_b^I \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Für die nachfolgenden Ausführungen wird die zu $g_{\alpha\beta}$ inverse Matrix $g^{\alpha\beta}$ sowie die Determinante des Vierbeins, der Metrik und die der jeweiligen Inversen benötigt. Es soll hier zunächst $g^{\alpha\beta}$ berechnet werden.

²Die Bezeichnung q ist hierdurch motiviert.

Berechnung von $g^{\alpha\beta}$

Es gilt :

$$\begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_a \\ N_a & V_{aI} V_b^I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g^{00} & \dots & g^{03} \\ \vdots & & \vdots \\ g^{30} & \dots & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Hierbei lässt sich g_{00} noch ohne Zuhilfenahme der obigen Gleichung berechnen :

$$\begin{aligned} 1 &= e^{0I} \cdot e_{0I} = e^{0I} (N \cdot N_I + N^a V_{aI}) = e^{0I} N N_I + N^a \cdot \underbrace{\delta_a^0}_{0, \text{ denn } a \neq 0} \\ \Leftrightarrow \quad 1 &= e^{0I} N N_I \quad | \cdot N^I : N \\ \Leftrightarrow \quad e^{0I} &= -\frac{N^I}{N} \\ \Rightarrow \quad g^{00} &= e^{0I} \cdot e^0_I = \frac{N^I N_I}{N^2} = -\frac{1}{N^2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Mit der Definition von V^{aI} über $V^{aI} V_{bI} = \delta_a^b$ erhält man für g^{a0} :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad N_a g^{00} + V_{aI} V_b^I g^{0b} &= 0 \quad \stackrel{(3.41)}{\Leftrightarrow} \quad -\frac{N_a}{N^2} + V_{aI} V_b^I g^{0b} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad V_{aI} V_b^I g^{0b} &= \frac{N_a}{N^2} \quad \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \quad V^{aI} V_I^b \frac{N_a}{N^2} = g^{0b} \\ \Leftrightarrow \quad g^{0b} &= g^{b0} = \frac{N^b}{N^2}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Berechnung der g^{ab} :

$$\begin{aligned} N_{a'} \cdot g^{0a} + V_{a'I} V_b^I g^{ab} &= \delta_{a'}^a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N_{a'} N^a}{N^2} + V_{a'I} V_b^I g^{ab} = \delta_{a'}^a \\ \Leftrightarrow \quad V_{a'I} V_b^I g^{ab} &= \delta_{a'}^a - \frac{N_{a'} N^a}{N^2} \quad \Leftrightarrow \quad \delta_{a'}^a V^{a'I} V_I^b - \frac{N_{a'} N^a}{N^2} V^{a'I} V_I^b = g^{ab} \\ \Leftrightarrow \quad g^{ab} &= V^{aI} V_I^b - \frac{N^b N^a}{N^2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Insgesamt ergibt sich:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^a}{N^2} \\ \frac{N_a}{N^2} & V^{aI} V_I^b - \frac{N^b N^a}{N^2} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Berechnung von $\det(g^{\alpha\beta})$

1. Betrachte den Spezialfall D=3 : $k^{ab} := V^{aI} V_I^b$

$$\begin{aligned} \det(g^{\alpha\beta}) &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{N^2} & -\frac{N^1}{N^2} & -\frac{N^2}{N^2} \\ -\frac{N^1}{N^2} & k^{11} - \frac{N^1 N^1}{N^2} & k^{12} - \frac{N^1 N^2}{N^2} \\ -\frac{N^2}{N^2} & k^{21} - \frac{N^2 N^1}{N^2} & k^{22} - \frac{N^2 N^2}{N^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{N^2} & -\frac{N^1}{N^2} & -\frac{N^2}{N^2} \\ 0 & k^{11} & k^{12} \\ 0 & k^{21} & k^{22} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} -\frac{1}{N^2} & -\frac{N^1}{N^2} & -\frac{N^2}{N^2} \\ 0 & k^{11} & k^{12} \\ -\frac{N^2}{N^2} & \frac{N^2 N^1}{N^2} & -\frac{N^2 N^2}{N^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{N^2} & -\frac{N^1}{N^2} & -\frac{N^2}{N^2} \\ -\frac{N^1}{N^2} & -\frac{N^1 N^1}{N^2} & -\frac{N^1 N^2}{N^2} \\ 0 & k^{21} & k^{22} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} -\frac{1}{N^2} & -\frac{N^1}{N^2} & -\frac{N^2}{N^2} \\ -\frac{N^1}{N^2} & -\frac{N^1 N^1}{N^2} & -\frac{N^1 N^2}{N^2} \\ -\frac{N^2}{N^2} & -\frac{N^2 N^1}{N^2} & -\frac{N^2 N^2}{N^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{N^2} & -\frac{N^1}{N^2} & -\frac{N^2}{N^2} \\ 0 & k^{11} & k^{12} \\ 0 & k^{21} & k^{22} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{N^2} \det(V^{aI} V_I^b) \end{aligned} \quad (3.45)$$

2. allgemeiner Fall: gehe analog zum Spezialfall vor:

$$\begin{aligned}
\det(g^{\alpha\beta}) &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{N^2} & -\frac{N^1}{N^2} & \cdots & -\frac{N^D}{N^2} \\ -\frac{N^1}{N^2} & k^{11} - \frac{N^1 N^1}{N^2} & \cdots & k^{1D} - \frac{N^1 N^D}{N^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{N^D}{N^2} & k^{D1} - \frac{N^D N^1}{N^2} & \cdots & k^{DD} - \frac{N^D N^D}{N^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{N^2} & -\frac{N^1}{N^2} & \cdots & -\frac{N^D}{N^2} \\ 0 & k^{11} & \cdots & k^{1D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k^{D1} & \cdots & k^{DD} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} -\frac{1}{N^2} & -\frac{N^1}{N^2} & \cdots & -\frac{N^D}{N^2} \\ -\frac{N^1}{N^2} & -\frac{N^1 N^1}{N^2} & \cdots & -\frac{N^1 N^D}{N^2} \\ 0 & k^{21} & \cdots & k^{2D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k^{D1} & \cdots & k^{DD} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} -\frac{1}{N^2} & -\frac{N^1}{N^2} & \cdots & -\frac{N^D}{N^2} \\ 0 & k^{(D-1)1} & \cdots & k^{(D-1)D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N^D}{N^2} & -\frac{N^D N^1}{N^2} & \cdots & -\frac{N^D N^D}{N^2} \end{vmatrix} \\
&+ \underbrace{\{ \text{Alle Permutationen mit } 2 \text{ " } N - \text{ Zeilen " } \}}_0 \\
&+ \cdots + \underbrace{\{ \text{Alle Permutationen mit } 3 \text{ " } N - \text{ Zeilen " } \}}_0 \\
&+ \begin{vmatrix} -\frac{1}{N^2} & -\frac{N^1}{N^2} & \cdots & -\frac{N^D}{N^2} \\ \frac{N^1}{N^2} & -\frac{N^1 N^1}{N^2} & \cdots & -\frac{N^1 N^D}{N^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N^D}{N^2} & -\frac{N^D N^1}{N^2} & \cdots & -\frac{N^D N^D}{N^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{N^2} \det(V^{aI} V_I^b) \quad (3.46)
\end{aligned}$$

Berechnung von $\det(g_{\alpha\beta})$, $\det(e_{\alpha I})$

$$\begin{aligned}
1 &= \det(g^{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}) = \det(g^{\alpha\beta}) \det(g_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{N^2} \cdot \det(V^{aI} V_I^b) \cdot \det(g_{\alpha\beta}) \\
&\Leftrightarrow \det(g_{\alpha\beta}) = -N^2 \cdot \det(V_{aI} V_b^I) \quad (3.47)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(g_{\alpha\beta}) = \det(e_\alpha^I e_{\beta I}) = -\det(e_{I\alpha})^2 \Rightarrow \det(e_{I\alpha}) = N \sqrt{\det(V^{aI} V_I^b)} \quad (3.48)$$

Das inverse Vierbein sei hier nur angegeben mit:

$$e^{0I} = -\frac{N^I}{N}, \quad e^{aI} = V^{aI} + \frac{N^a N^I}{N}, \quad V^{bI} V_{aI} = \delta_a^b, \quad V^{aI} N_I = 0. \quad (3.49)$$

3.2.3 Abspaltung der Zeit

Ziel soll nun die Ableitung der Hamiltondichte der Einstein-Hilbert-Wirkung sein. Dazu ist es notwendig, die zeitlichen Komponenten der Anholonomien im Wirkungsfunktional abzuspalten. Anschließend ist es möglich, die zum Vierbein e_{ai} konjugierten Koordinanten π^{ai} zu definieren und über eine nachfolgende Legendretransformation den Hamiltonian der Einstein-Hilbert-Wirkung zu beschreiben. Die Rechnung wird durch die Brechung der Lorentzinvarianz des Vierbeins mit der Wahl der *Eichung*

$$N_I = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow N^I = (-1, 0, 0, 0) \quad (3.50)$$

vereinfacht. Es gilt:

$$V^{aI}N_I = 0 \Rightarrow V^{a0} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{a0} = V^{a0} + \frac{N^a N^0}{N} = -\frac{N^a}{N} \quad (3.51)$$

$$e^{0I} = -\frac{N^I}{N} = \left(\frac{1}{N}, 0, 0, 0\right) \quad (3.52)$$

$$e_{\alpha I} \stackrel{(3.51)(3.52)}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{N^1}{N} & & & \\ -\frac{N^2}{N} & & e^{ai} & \\ -\frac{N^3}{N} & & & \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

$$V_{aI}N^I = 0 \Rightarrow V_{a0} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{0I} = (N, N^a V_{ai}) = (N, N^a e_{ai}) \quad (3.54)$$

$$\Rightarrow \quad e_{aI} = (0, e_{ai}) \quad (3.55)$$

$$e_{\alpha I} \stackrel{(3.54)(3.55)}{=} \begin{pmatrix} N & N^a e_{ai} \\ 0 & \\ 0 & e_{ai} \\ 0 & \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Man ist nun in der Lage die zeitlichen Komponenten der Anholonomien des Lagrangians

$$L_{EH} = e \left(\Omega_K^{LK} \Omega_{IL}^I - \frac{1}{2} \Omega^{IKL} \Omega_{ILK} - \frac{1}{4} \Omega^{LIK} \Omega_{LIK} \right)$$

abzuspalten. Das Ergebnis wird hier als Lemma formuliert.

Lemma 3.2.1. *Für den obigen Lagrangian gilt:*

$$L_{EH} = e(2\Omega_0^{l0}\Omega_{il}^i + \Omega_k^{0k}\Omega_{i0}^i + \Omega_k^{lk}\Omega_{il}^i - \frac{1}{2}(\Omega^{ikl}\Omega_{ilk} + \Omega^{0(kl)}\Omega_{0kl}) - \frac{1}{4}\Omega^{lik}\Omega_{lik}). \quad (3.57)$$

Beweis. Wir führen den Beweis in drei Schritten durch.

1. Berechnung von Anholonomien mit Zeitkomponenten:

$$\Omega^{ij0} = e^{\alpha i} e^{\beta j} \partial_{[\alpha} e_{\beta]}^0 = e^{ai} e^{bj} \partial_{[a} e_{b]}^0 = 0, \quad \text{da } e_{b0} = 0 \quad (3.58)$$

$$\Omega^{ijk} = e^{\alpha i} e^{\beta j} \partial_{[\alpha} e_{\beta]}^k = e^{ai} e^{bj} \partial_{[a} e_{b]}^k \quad (3.59)$$

$$\Omega^{0j0} = e^{\alpha 0} e^{\beta j} \partial_{[\alpha} e_{\beta]}^0 = -e^{\alpha 0} e^{\beta j} \partial_{[b} \underbrace{e_{\alpha]}^0}_{\neq 0, \text{ für } \alpha=0} = -\frac{1}{N} e^{bj} \partial_b N \quad (3.60)$$

$$\Omega^{0jk} = e^{\alpha 0} e^{\beta j} \partial_{[\alpha} e_{\beta]}^k = e^{\alpha 0} e^{bj} \partial_{[0} e_{b]}^k = \frac{1}{N} e^{bj} \partial_{[0} e_{b]}^k - \frac{N^a}{N} e^{bj} \partial_{[a} e_{b]}^k \quad (3.61)$$

2. Zerlegung der Anholonomieprodukte:

$$\begin{aligned} \Omega_K^{LK} \Omega_{IL}^I &= (\Omega_0^{L0} + \Omega_k^{Lk})(\Omega_{0L}^0 + \Omega_{iL}^i) \\ &= \Omega_0^{L0} \Omega_{0L}^0 + \Omega_0^{L0} \Omega_{iL}^i + \Omega_k^{Lk} \Omega_{0L}^0 + \Omega_k^{Lk} \Omega_{iL}^i \\ &= \Omega_0^{l0} \Omega_{0l}^0 + \underbrace{\Omega_0^{00}}_0 \Omega_{00}^0 + \underbrace{\Omega_0^{00}}_0 \Omega_{i0}^i + \underbrace{\Omega_0^{l0} \Omega_{il}^i}_0 + \Omega_k^{0k} \underbrace{\Omega_0^{00}}_0 + \underbrace{\Omega_k^{lk} \Omega_{0l}^0}_0 \\ &\quad + \Omega_k^{0k} \Omega_{i0}^i + \Omega_k^{lk} \Omega_{il}^i = \Omega_0^{l0} \Omega_{0l}^0 + 2\Omega_0^{l0} \Omega_{il}^i + \Omega_k^{0k} \Omega_{i0}^i + \Omega_k^{lk} \Omega_{il}^i \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}
\Omega^{IKL}\Omega_{ILK} &= \Omega^{IkL}\Omega_{ILk} + \Omega^{I0L}\Omega_{ILO} = \Omega^{IkL}\Omega_{ILk} + \Omega^{Ik0}\Omega_{I0k} + \Omega^{i0L}\Omega_{iL0} + \underbrace{\Omega^{00L}}_0\Omega_{0L0} \\
&= \Omega^{ikl}\Omega_{ilk} + \Omega^{0kl}\Omega_{0lk} + \underbrace{\Omega^{ik0}}_0\Omega_{i0k} + \Omega^{0k0}\underbrace{\Omega_{00k}}_0 + \Omega^{i0l}\underbrace{\Omega_{il0}}_0 + \Omega^{i00}\Omega_{i00} \\
&= \Omega^{ikl}\Omega_{ilk} + \Omega^{0kl}\Omega_{0lk} + \Omega^{0i0}\Omega_{0i0}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^{LIK}\Omega_{LIK} &= \Omega^{LIk}\Omega_{LIk} + \Omega^{LIO}\Omega_{LIO} = \Omega^{LIk}\Omega_{LIk} + \Omega^{L0k}\Omega_{L0k} + \Omega^{Li0}\Omega_{Li0} + \Omega^{L00}\Omega_{L00} \\
&= \Omega^{lik}\Omega_{lik} + \underline{\Omega^{0ik}\Omega_{0ik}} + \underline{\Omega^{l0k}\Omega_{l0k}} + \Omega^{00k}\underbrace{\Omega_{00k}}_0 + \Omega^{li0}\underbrace{\Omega_{li0}}_0 + \underline{\Omega^{0i0}\Omega_{0i0}} \\
&\quad + \underline{\Omega^{l00}\Omega_{l00}} + \Omega^{000}\underbrace{\Omega_{000}}_0 = \Omega^{lik}\Omega_{lik} + 2\Omega^{0ik}\Omega_{0ik} + 2\Omega^{0i0}\Omega_{0i0}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

3. Herleitung des Lagrangians :

$$\begin{aligned}
L_{EH} &= e(\det\Omega_0^{l0}\Omega_{0l}{}^0\det + 2\Omega_0^{l0}\Omega_{il}{}^i + \Omega_k^{0k}\Omega_{i0}{}^i + \Omega_k^{lk}\Omega_{il}{}^i - \frac{1}{2}(\Omega^{ikl}\Omega_{ilk} + \underline{\Omega^{0kl}\Omega_{0lk}} + \Omega^{0i0}\Omega_{0i0}) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\Omega^{lik}\Omega_{lik}) - \frac{1}{2}(\underline{\Omega^{0ik}\Omega_{0ik}} + \Omega^{0i0}\Omega_{0i0})) \\
&= e(2\Omega_0^{l0}\Omega_{il}{}^i + \Omega_k^{0k}\Omega_{i0}{}^i + \Omega_k^{lk}\Omega_{il}{}^i - \frac{1}{2}(\Omega^{ikl}\Omega_{ilk} + \Omega^{0(kl)}\Omega_{0kl}) - \frac{1}{4}\Omega^{lik}\Omega_{lik})
\end{aligned} \tag{3.65}$$

□

Der obige Lagrangian läßt mit den Strukturen der Hyperfläche Σ weiter umformen. Um die Notation nicht überzustapazieren, sollen einander entsprechende Objekte auf Σ und M , bis auf wenige Ausnahmen, nicht streng durch ihre Symbolik unterschieden werden. Den Ausführungen des vorherigen Kapitels folgend, ist die eingeschränkte Metrik durch (3.36) gegeben. Mit der Eichung (3.50) ist die inverse Matrix zu q_{ab} nach

$$\begin{aligned}
q_{ab}e_i^be^{ic} &= e_a^je_{jb}e_i^be^{ic} = e_a^je_{j\beta}e_i^\beta e^{ic} = e_a^j\delta_{ji}e^{ic} = e_a^je_j^c = \delta_a^c \\
\Rightarrow q^{ab} &= e_i^be^{ic}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

zu berechnen. Ebenfalls ist e^{ai} invers zu e_{ai} . Dies bedeutet, daß die eingeschränkte Metrik durch die räumlichen Komponenten des 4-dimensionalen Dreibeins ebenso berechnet wird wie die 4-dimensionale Metrik durch dieses Vierbein. Deshalb sind alle vorangegangenen 4-dimensionalen Gleichungen wegen der speziellen Wahl der Eichung auf den 3-dimensionalen Fall übertragbar. Im folgenden erklären wir ∇ angewandt auf Objekte mit gemischtem Indexbild durch:

$$\nabla_b\lambda^{ka} := \partial_b\lambda^{ka} + \Gamma_{bc}^a\lambda^{ck}. \tag{3.67}$$

Der Term $2e\Omega_0^{l0}\Omega_{il}{}^i$ in (3.57) erweist sich als Oberflächenterm. Es gilt der folgende Satz.

Satz 3.2.2. Mit ${}^{(3)}e$ als Determinante bzgl. räumlicher Indizes des Vierbeins und ∇ als kovarianter Ableitung auf Σ gilt:

$$2e\Omega_0^{l0}\Omega_{il}{}^i = \nabla_{[a}(N^{(3)}e^{bk}\nabla_{b]}e_k^a). \tag{3.68}$$

Beweis. Als ersten Schritt zeigt man die folgende Gleichheitsrelation:

$$\begin{aligned}
2e\Omega_0^{l0}\Omega_{il}{}^i &\stackrel{(3.48)}{=} 2N^{(3)}e\Omega_0^{l0}\Omega_{il}{}^i \stackrel{(3.59)(3.60)}{=} 2N^{(3)}e\left(\frac{1}{N}e^{al}\partial_a N\right)\left(e_i^be_l^c\partial_{[b}e_{c]}^i\right) \\
&= 2^{(3)}eq^{ac}\partial_a Ne_i^b\partial_{[b}e_{c]}^i.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Im zweiten Schritt ist dann

$$\nabla_{[a}(N^{(3)} e e^{bk} \nabla_{b]} e_k^a) = 2^{(3)} e e_i^b \partial_{[b} e_c^i] q^{ca} \partial_a N \quad (3.70)$$

zu beweisen.

$$\begin{aligned} (\nabla_a N)^{(3)} e e^{bk} \nabla_b e_k^a &= -(\partial_a N)^{(3)} e e^{bk} \omega_{bk}^l e_l^a \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_a N)^{(3)} e e^{bk} e_{bm} (\Omega_k^m{}^l + \Omega^{lm}{}_k - \Omega_k^{lm}) e_l^a \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_a N)^{(3)} e (\Omega_k^{lk} - \Omega_k^{lk}) e_l^a = (\partial_a N)^{(3)} e \Omega_k^{lk} e_l^a \\ &= (\partial_a N)^{(3)} e e_k^b e^{lc} \partial_{[b} e_c^k] e_l^a = \partial_a N^{(3)} e e_k^b q^{ac} \partial_{[b} e_c^k] \quad (3.71) \\ -(\nabla_b N)^{(3)} e e^{bk} \nabla_a e_k^a &= \frac{1}{2} (\partial_b N)^{(3)} e e^{bk} e_{am} (\Omega_k^m{}^l + \Omega^{lm}{}_k - \Omega_k^{lm}) e_l^a \\ &= \frac{1}{2} (\partial_b N)^{(3)} e e^{bk} \eta_{ml} (\Omega_k^m{}^l + \Omega^{lm}{}_k - \Omega_k^{lm}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_b N)^{(3)} e e^{bk} (\underbrace{\Omega_{lk}^l + \Omega_{lk}^l}_{0} - \Omega_k^l{}_l) = -(\partial_b N)^{(3)} e e^{bk} \Omega_{kl}^l \\ &= -(\partial_a N)^{(3)} e e^{al} \Omega_{lk}^k = (\partial_a N)^{(3)} e e^{al} \Omega_{kl}^k, \text{ siehe oben} \\ &= \partial_a N^{(3)} e e_k^b q^{ac} \partial_{[b} e_c^k] \quad (3.72) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\nabla_{[a} N)^{(3)} e e^{bk} \nabla_{b]} e_k^a = 2 \partial_a N^{(3)} e e_k^b q^{ac} \partial_{[b} e_c^k]. \quad (3.73)$$

Dies entspricht schon der rechten Seite von (3.70). Auf der linken Seite entstehen wegen der Produktregel noch weitere Terme, die aufgrund der Behauptung verschwinden müssen. Dies wird im Folgenden gezeigt.

$$N^{(3)} e e^{bk} \nabla_{[a} \nabla_{b]} e_k^a = N^{(3)} e^{(3)} R \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} N^{(3)} e \nabla_{[a} e^{bk} \nabla_{b]} e_k^a &= N^{(3)} e \omega_{[a}{}^{kj} \cdot e_k^b \omega_{b]}{}^{km} e^m{}_a \\ &= -N^{(3)} e \left(\Omega_k^{ik} \Omega_{ji}{}^j - \frac{1}{2} \Omega^{ijk} \Omega_{ikj} - \frac{1}{4} \Omega^{ijk} \Omega_{ijk} \right) \\ &= -N^{(3)} e^{(3)} R \quad (3.75) \end{aligned}$$

$$\nabla^{(3)} g = 0 = \nabla^{(3)} e^2 = 2^{(3)} e \nabla^{(3)} e \Rightarrow \nabla^{(3)} e = 0. \quad (3.76)$$

Mit diesen 4 Gleichungen verifiziert leicht man die Behauptung. $\square$

Die Mannigfaltigkeit wurde so gewählt, daß die Integration über Oberflächenterme verschwindet. Der Lagrangian ist deshalb mit dem 3-Krümmungsskalar gegeben durch:

$$L_{EH} = N^{(3)} e \left(-\frac{1}{2} \Omega^{0(kl)} \Omega_{0kl} + \Omega_k^{0k} \Omega_{i0}{}^i + {}^{(3)} R \right) \quad (3.77)$$

3.3 Die Legendre-Transformation des Einstein-Hilbert Lagrangians

Die Form des Lagrangians ermöglicht jetzt eine Berechnung der zu den e_{ai} konjugierten Variablen π^{ai} .

Satz 3.3.1. *Es gilt:*

$$\pi^{ai} := \frac{\delta L}{\delta e_{ai}} = {}^{(3)} e (\Omega^{0(ki)} e_k^a - 2 \Omega_k^{0k} e^{ai}). \quad (3.78)$$

Beweis.

$$\frac{\delta\Omega_{0kl}}{\delta\dot{e}_{ai}} = -\frac{1}{N}e_k^b \frac{\delta(\partial_{[0}e_{bl]})}{\delta\dot{e}_{ai}} = -\frac{1}{N}e_k^a \frac{\delta(\partial_0 e_{al})}{\delta\dot{e}_{ai}} = -\frac{1}{N}e_k^a \delta_l^i \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \pi^{ai} &:= \frac{\delta L}{\delta\dot{e}_{ai}} = N {}^{(3)}e \frac{\delta}{\delta\dot{e}_{ai}} \left(-\frac{1}{2}\Omega^{0(kl)}\Omega_{0kl} + \Omega_k{}^{0k}\Omega_{j0}{}^j + {}^{(3)}R \right) \\ &= N {}^{(3)}e \left(-\frac{1}{2}\Omega^{0(kl)}\frac{\delta\Omega_{0kl}}{\delta\dot{e}_{ai}} - \frac{1}{2}\Omega^{0kl}\frac{\delta\Omega_{0(kl)}}{\delta\dot{e}_{ai}} + \frac{\delta}{\delta\dot{e}_{ai}}(\Omega_k{}^{0k}\Omega_{j0}{}^j) \right) \\ &= N {}^{(3)}e \left(-\Omega^{0(kl)}\frac{\delta\Omega_{0kl}}{\delta\dot{e}_{ai}} + 2\Omega^0{}_k{}^k \frac{\delta\Omega_{0j}{}^j}{\delta\dot{e}_{ai}} \right) \\ &= N {}^{(3)}e \left(\Omega^{0(kl)}\frac{1}{N}e_k^a \delta_l^i - 2\Omega^0{}_k{}^k \frac{1}{N}e_j^a \delta^{ij} \right) = {}^{(3)}e \left(\Omega^{0(ki)}e_k^a - 2\Omega^0{}_k{}^k e^{ai} \right) \end{aligned} \quad (3.80)$$

□

Daraus läßt sich der folgende Primary Constraint ableiten.

Lemma 3.3.1.

$$L^i := \epsilon^{ijk}\pi_j^a e_{ak} \approx 0 \quad (3.81)$$

Beweis.

$$\pi_j^a = {}^{(3)}e(\Omega^0{}_{(kj)}e^{ak} + 2\Omega_{0k}{}^k e_j^a) \quad (3.82)$$

$$\pi_j^a e_{as} = {}^{(3)}e(\Omega^0{}_{(kj)}\delta_s^k + 2\Omega_{0k}{}^k \delta_{js}) = {}^{(3)}e(\Omega^0{}_{(sj)} + 2\Omega_{0k}{}^k \delta_{js}) \quad (3.83)$$

$$\pi_s^a e_{aj} = (\Omega^0{}_{(js)} + 2\Omega_{0k}{}^k \delta_{sj}) = (\Omega^0{}_{(sj)} + 2\Omega_{0k}{}^k \delta_{js}) \Rightarrow \pi_j^a e_{as} = \pi_s^a e_{aj}$$

□

Nachdem die konjugierten Variablen definiert sind, ist die Legendre-Transformation des Lagrangians durch den folgenden Satz gegeben.

Satz 3.3.2. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} H &= \pi^{ai}\dot{e}_{ai} - \mathcal{L} + \Lambda_i L^i \\ &= \frac{N}{2} {}^{(3)}e \left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}(\pi_i^i)^2 - 2 {}^{(3)}e^2 {}^{(3)}R \right) - N^c e_{ci} {}^{(3)}\mathcal{D}_a \pi^{ai} + \Lambda_i L^i. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Beweis. 1. Inversion der Gleichung $\pi^{ai} = {}^{(3)}e(\Omega^{0(ki)}e_k^a - 2\Omega^0{}_k{}^k e^{ai})$:

$$\begin{aligned} \pi^{bj}e_{bj} &= {}^{(3)}e(\Omega^{0(kj)}e_k^b e_{bj} - 2\Omega^0{}_k{}^k \underbrace{e^{bj}e_{bj}}_3) = {}^{(3)}e(\Omega^{0(kj)}\delta_{kj} - 6\Omega^0{}_k{}^k) \\ &= -4 {}^{(3)}e\Omega^0{}_k{}^k \end{aligned} \quad (3.85)$$

2. Berechnung von $\pi^{ai}\pi_{ai}$ in Termen von Anholonomien:

$$\pi^{ai} = {}^{(3)}e(\Omega^{0(ki)}e_k^a - 2\Omega^0{}_k{}^k e^{ai}) \rightsquigarrow \pi_{ai} := {}^{(3)}e((\Omega^{0k}{}_i + \Omega^0{}_i{}^k)e_{ak} - 2\Omega^0{}_k{}^k e_{ai}) \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \pi^{ai}\pi_{ai} &= {}^{(3)}e^2(\Omega^{0(ki)}e_k^a - 2\Omega^0{}_k{}^k e^{ai})(\Omega^{0j}{}_i + \Omega^0{}_i{}^j)e_{aj} - 2\Omega^0{}_j{}^j e_{ai}) \\ &= {}^{(3)}e^2(\Omega^{0(ki)}(\Omega^{0j}{}_i + \Omega^0{}_i{}^j)e_k^a e_{aj} - 2\Omega^{0(ki)}\Omega^0{}_j{}^j e_k^a e_{ai} - 2\Omega^0{}_k{}^k(\Omega^{0j}{}_i + \Omega^0{}_i{}^j)e_{aj}e^{ai} \\ &\quad + 4\Omega^0{}_j{}^j\Omega^0{}_k{}^k(e^{ai}e_{ai})) \\ &= {}^{(3)}e^2(\Omega^{0(ki)}(\Omega^{0j}{}_i + \Omega^0{}_i{}^j)\delta_{kj} - 4\Omega^0{}_i{}^i\Omega^0{}_j{}^j - 4\Omega^0{}_k{}^k\Omega^0{}_i{}^i + 12\Omega^0{}_k{}^k\Omega^0{}_j{}^j) \\ &= {}^{(3)}e^2(\Omega^{0(ki)}\Omega^0{}_{(ki)} + 4\Omega^0{}_k{}^k\Omega^0{}_j{}^j) = -2 {}^{(3)}e^2(\Omega^{0(ki)}\Omega_{0ki} + 2\Omega^0{}_k{}^k\Omega_{0j}{}^j) \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -\frac{1}{2} {}^{(3)}e^2 \pi^{ai}\pi_{ai} = \Omega^{0(ki)}\Omega_{0ki} + 2\Omega^0{}_k{}^k\Omega_{0j}{}^j \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4} {}^{(3)}e^2 \pi^{ai}\pi_{ai} - \Omega^0{}_k{}^k\Omega_{0j}{}^j = \frac{1}{2}\Omega^{0(ki)}\Omega_{0ki} \end{aligned} \quad (3.88)$$

3. Mit Hilfe des Primary Constraints zeigt sich, daß $\pi^{ai} \cdot \omega_{ai}{}^j = \pi^{ai} e_a^k \Omega_{ki}^j$ gilt:

$$\pi^{ai} e_a^k \Omega_{jki} = \pi^{ak} e_a^i \Omega_{jki} = \pi^{ai} e_a^k \Omega_{jik} \quad (3.89)$$

$$\pi^{ai} e_a^k \Omega_{ki}{}^j = \pi^{ak} e_a^i \Omega_{ki}{}^j = \pi^{ai} e_a^k \Omega_{ik}{}^j = -\pi^{ai} e_a^k \Omega_{ki}{}^j \Rightarrow \pi^{ai} e_a^k \Omega_{ki}{}^j = 0 \quad (3.90)$$

$$(3.91)$$

und somit

$$\begin{aligned} \pi^{ai} \omega_{ai}{}^j &= \pi^{ai} \frac{1}{2} e_{ak} \left(\underbrace{\Omega_i^{k,j}}_{=0} + \Omega^{jk}{}_i - \Omega_i{}^{jk} \right) \\ &\stackrel{(3.90)}{=} \pi^{ai} \frac{1}{2} e_a^k \left(\Omega^j{}_{ki} + \Omega^j{}_{ik} \right) \stackrel{(3.89)}{=} \pi^{ai} e_a^k \Omega_{ki}^j. \end{aligned} \quad (3.92)$$

4. Es gilt $\pi^{ai} \partial_\gamma e_{ai} = \pi^{ai} e_a^k e_i^b \partial_\gamma e_{bk}$ denn:

$$\begin{aligned} \pi^{ai} (\partial_\gamma e_{ai}) &= \pi^{ai} \delta_i^k \delta_a^b \partial_\gamma e_{bk} = \pi^{ai} e_c^k e_i^c e_j^b \partial_\gamma e_{bk} = \pi^{aj} e_c^k e_i^c e_a^b \partial_\gamma e_{bk} = \pi^{aj} e_a^k e_j^b \partial_\gamma e_{bk} \\ &= \pi^{ai} e_a^k e_i^b \partial_\gamma e_{bk} \end{aligned} \quad (3.93)$$

5. Behandlung des Ausdrucks $-N^c e_{ci} {}^{(3)}\mathcal{D}_a \pi^{ai}$ in Hinblick auf die zu beweisende Gleichung (Oberflächenterme werden vernachlässigt):

$$\begin{aligned} -N^c e_{ci} {}^{(3)}\mathcal{D}_a \pi^{ai} &= + {}^{(3)}\mathcal{D}_a (N^c e_{ci}) \pi^{ai} + \text{Oberflächenterm} \stackrel{(3.54)}{=} (\partial_a e_{0i} + N^c e_{cj} \omega_{ai}{}^j) \pi^{ai} \\ &\stackrel{(3.91)}{=} (\partial_a e_{0i} + N^c e_{cj} e_a^k \Omega_{ki}^j) \pi^{ai} = (\partial_a e_{0i} + N^{c'} e_{c'j} e_a^k (e^{jb} e_c^c \partial_{[b} e_{c]i})) \pi^{ai} \\ &= (\partial_a e_{0i} + N^b \partial_{[b} e_{a]i}) \pi^{ai} = (\partial_{[a} e_{0]i} + N^b \partial_{[b} e_{a]i} + \partial_0 e_{ai}) \pi^{ai} \\ &= (-\partial_{[0} e_{a]i} + N^b \partial_{[b} e_{a]i}) \pi^{ai} + \dot{e}_{ai} \pi^{ai} \\ &\stackrel{(3.93)}{=} N \pi^{ai} \left(-\frac{1}{N} e_i^b e_a^k \partial_{[0} e_{b]k} + \frac{N^c}{N} e_a^k e_i^b \partial_{[c} e_{b]k} \right) + \dot{e}_{ai} \pi^{ai} \\ &= N \pi^{ai} e_a^k \Omega_{0ik} + \pi^{ai} \dot{e}_{ai} \\ N \pi^{ai} e_a^k \Omega_{0ik} &= N {}^{(3)}e (\Omega^{0(ij)} e_j^a e_a^k \Omega_{0ik} - 2 \Omega^0{}_j{}^j e^{ai} e_a^k \Omega_{0ik}) \\ &= N {}^{(3)}e (\Omega^{0(ik)} \Omega_{0ik} - 2 \Omega^0{}_j{}^j \Omega_{0k}{}^k) \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\Rightarrow -N^c e_{ci} {}^{(3)}\mathcal{D}_a \pi^{ai} = N {}^{(3)}e (\Omega^{0(ik)} \Omega_{0ik} - 2 \Omega^0{}_j{}^j \Omega_{0k}{}^k) + \dot{e}_{ai} \pi^{ai} \quad (3.95)$$

Wird die intrinsische Krümmung der Hyperfläche ${}^{(3)}R$ auf beiden Seiten von (3.95) addiert, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (3.95) \Rightarrow -N^c e_{ci} {}^{(3)}\mathcal{D}_a \pi^{ai} &- N {}^{(3)}e \left(\frac{1}{2} \Omega^{0(ik)} \Omega_{0ik} - \Omega^0{}_j{}^j \Omega_{0k}{}^k \right) \\ &= N {}^{(3)}e \left(\frac{1}{2} \Omega^{0(ik)} \Omega_{0ik} - \Omega^0{}_j{}^j \Omega_{0k}{}^k \right) + \dot{e}_{ai} \pi^{ai} \quad | - N {}^{(3)}e {}^{(3)}R \\ \Leftrightarrow -N^c e_{ci} {}^{(3)}\mathcal{D}_a \pi^{ai} &- N {}^{(3)}e \left(\frac{1}{2} \Omega^{0(ik)} \Omega_{0ik} - \Omega^0{}_j{}^j \Omega_{0k}{}^k + {}^{(3)}R \right) = \dot{e}_{ai} \pi^{ai} - \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

6. Herleitung der zu beweisenden Gleichung:

$$\begin{aligned} N {}^{(3)}e \left(\frac{1}{2} \Omega^{0(ki)} \Omega_{0ki} - \Omega^0{}_k{}^k \Omega_{0j}{}^j + {}^{(3)}R \right) &\stackrel{(3.88)}{=} N {}^{(3)}e \left(-\frac{1}{4 {}^{(3)}e^2} \pi^{ai} \pi_{ai} - 2 \Omega^0{}_k{}^k \Omega_{0j}{}^j + {}^{(3)}R \right) \\ &\stackrel{(3.85)}{=} N {}^{(3)}e \left(-\frac{1}{4 {}^{(3)}e^2} \pi^{ai} \pi_{ai} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8 {}^{(3)}e^2} (\pi^j{}_j)^2 + {}^{(3)}R \right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\Rightarrow \quad \pi^{ai} \dot{e}_{ai} - \mathcal{L} \stackrel{(3.95)(3.97)}{=} \frac{N}{4^{(3)}e} \left(\pi^{ai} \pi_{ai} - \frac{1}{2} (\pi^j_j)^2 - 4^{(3)} e^2 {}^{(3)}R \right) - N^c e_{ci} {}^{(3)}\mathcal{D}_a \pi^{ai} \quad (3.98)$$

Die Formel ist korrekt bis auf den Faktor $1/2$ der rechten Seite. Eine Variablentransformation ergibt die richtige Gleichung. $\square$

Die Faktoren N und N^c wirken in (3.98) als Lagrange-Multiplikatoren, so daß man insgesamt das folgende System von Zwangsbedingungen (Constraints) erhält:

$$L^i = \epsilon^{ijk} \pi_j^a e_{ak} = 0 \quad (\text{Gauß-Constraint}) \quad (3.99)$$

$$\mathcal{H}_c := e_{ci} {}^{(3)}\mathcal{D}_a \pi^{ai} = 0 \quad (\text{Diffeomorphismen-Constraint}) \quad (3.100)$$

$$\mathcal{H} := \frac{1}{4^{(3)}e} \left(\pi^{ai} \pi_{ai} - \frac{1}{2} (\pi^j_j)^2 + 4^{(3)} e^2 {}^{(3)}R \right) = 0 \quad (\text{Hamilton-Constraint}) \quad (3.101)$$

Kapitel 4

Einführung der Ashtekarvariablen

Wir werden zu Beginn dieses Kapitels die Verbindung von [Pel94] zu [Thi01] herstellen und anschließend den Betrachtungen in [Thi01] bis zum Ende dieses Kapitels folgen.

4.1 Erste Transformation: Die extrinsische Krümmung und das gewichtete Dreibein

Die extrinsische Krümmung ist definiert durch:

$$K_{ab} := -g(\nabla_b \partial_a, \vec{n}) . \quad (4.1)$$

Damit läßt sich die extrinsische Krümmung wie folgt durch die räumlichen Christoffelsymbole ausdrücken (siehe [BM]):

$$\begin{aligned} K_{ab} &:= g(\Gamma_{ab}^c \partial_c, \vec{n}) = g\left(\Gamma_{ab}^0 \partial_0, \frac{1}{N}(\partial_0 - N^c \partial_c)\right) = \frac{\Gamma_{ab}^0}{N} g(\partial_0, \partial_0) - \frac{\Gamma_{ab}^0}{N} N^c g(\partial_0, \partial_c) \\ &= \frac{\Gamma_{ab}^0}{N} (-N^2 + N^c N_c) - \frac{\Gamma_{ab}^0}{N} N^c N_c = -\Gamma_{ab}^0 N . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Konfigurationsvariablen π_{ai} sind, wie vorher schon angegeben, durch die Anholonomien $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ ausdrückbar. Dies ist der Grund, warum die extrinsische Krümmung ebenfalls durch die Ω dargestellt werden soll. Die Umstellung geschieht durch Ausnutzung von $D_\alpha e_{I\beta} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\alpha e_{I\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_{I\gamma} + \omega_{\alpha I}^J e_{J\beta} \Leftrightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_{I\gamma} = \partial_\alpha e_{I\beta} + \omega_{\alpha I}^J e_{J\beta} \\ &\Rightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^\delta = e^{I\delta} (\partial_\alpha e_{I\beta} + \omega_{\alpha I}^J e_{J\beta}) . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Γ_{ab}^0 ist somit gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^0 &= e^{0I} (\partial_a e_{Ib} + \omega_{aI}^J e_{Jb}), \quad e^{0I} \neq 0 \quad \text{für} \quad I = 0, \quad e^{00} = \frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{N} (\partial_a e_{0b} + \omega_{a0}^J e_{Jb}), \quad e_{b0} = 0 \\ &= \frac{1}{N} \omega_{a0}^J e_{Jb} = \frac{1}{N} \omega_{a0}^j e_{jb} \quad \stackrel{(4.2)}{\Rightarrow} K_{ab} = -\Gamma_{ab}^0 \cdot N = -\omega_{a0}^j e_{jb} . \end{aligned} \quad (4.4)$$

In den ω sind die gewünschten Anholonomien enthalten.

$$\begin{aligned} \omega_{a0}^j &= \frac{1}{2} e_a^K (\Omega_{K0}^j + \Omega_{K0}^j - \Omega_0^{jK}) \stackrel{e_a^0=0}{=} \frac{1}{2} e_a^K (\Omega_{k0}^j + \underbrace{\Omega_{k0}^j}_0 - \Omega_0^{jK}) = \frac{1}{2} e_a^K (\Omega_{k0}^j - \Omega_0^{jK}) \\ &= \frac{1}{2} e_{ak} (-\Omega_0^{kj} - \Omega_0^{jk}) = -\frac{1}{2} e_{ak} \Omega_0^{(kj)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

(4.4) mit (4.5) umgestellt nach den Ω ergibt :

$$\Omega^{0(hi)} = -2K_{ab}e^{ah}e^{bi} \quad (4.6)$$

$$\Omega^0{}_i{}^i = -K_{ab}e^{ah}e_h^b . \quad (4.7)$$

An dieser Stelle soll als erstes der Hamilton-Constraint über die extrinsische Krümmung ausgedrückt werden. Hierzu müssen notwendigerweise die π^{ai} und π_i^i ersetzt werden durch K_{cd} , d.h. die K 's sollen letztendlich die Funktion der π 's als unabhängige Variablen übernehmen. Die Kanonizität dieser Transformation wird später bewiesen. Für den Hamilton-Constraint erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{4} {}^{(3)}e \left(\pi^{ai} \pi_{ai} - \frac{1}{2} (\pi_j^j)^2 \right) - {}^{(3)}e {}^{(3)}R \\ &\stackrel{(3.97)}{=} \frac{{}^{(3)}e}{4} (-\Omega^{0(ki)} \Omega^0{}_{(ki)} + 4\Omega^0{}_k{}^k \Omega_{0j}{}^j) - {}^{(3)}e {}^{(3)}R \\ &= \frac{{}^{(3)}e}{4} (4e^{ah}e^{bi}K_{ab}K_{cd}e_i^d e_h^c - 4e^{ah}e_h^b K_{ab}e^{cj}e_j^d K_{cd}) - {}^{(3)}e {}^{(3)}R \\ &= {}^{(3)}e (K_{ab}K_{cd})((e^{ah}e_h^c)(e^{bi}e_i^d) - (e^{ah}e_h^b)(e^{cj}e_j^d)) - {}^{(3)}e {}^{(3)}R , \end{aligned} \quad (4.8)$$

wobei in der zweiten Zeile noch

$$\frac{1}{2}\Omega^{0(ki)}\Omega^0{}_{ki} = \frac{1}{4}\Omega^{0(ki)}\Omega^0{}_{(ki)} \quad (4.9)$$

benutzt wurde. Die extrinsische Krümmung ist als Tensor der Hyperfläche aufzufassen. Das bedeutet insbesondere, daß sich die Indizes von K_{ab} mit q_{ab} bzw. q^{ab} ziehen. Für die Gleichung (4.8) bedeutet das:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= {}^{(3)}e(K_{ab}K_{cd})(q^{ac}q^{bd} - q^{ab}q^{cd}) - {}^{(3)}e {}^{(3)}R = {}^{(3)}e(K^{cd}K_{cd} - K^2 - R) \\ &= q^{1/2}(K^{cd}K_{cd} - K^2 - {}^{(3)}R) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Als nächstes soll der Diffeomorphismen-Constraint umgeformt werden. Man geht hierbei analog zum Hamilton-Constraint vor. Zuerst ersetzt man π^{bi} durch die Triade (d.h. durch das Dreibein) und die extrinsische Krümmung.

$$\pi^{bi} = {}^{(3)}e(\Omega^{0(ki)}e_k^b - 2\Omega^0{}_k{}^k e^{bi}) = -{}^{(3)}e(K_{ac}e^{ak}e^{ci}2e_k^b - 2K_{ac}e^{ah}e_h^c e^{bi}) \quad (4.11)$$

$$= -2 {}^{(3)}e(K_c^b e^{ci} - K_c^c e^{bi}) \quad (4.12)$$

Dieses Ergebnis ist in den Diffeomorphismen-Constraint einzusetzen.

$$\mathcal{H}_a = e_{ai}\mathcal{D}_b\pi^{bi} \stackrel{(4.12)}{=} \mathcal{D}_b(e_{ai}\pi^{bi}) = -2 {}^{(3)}e\mathcal{D}_b(K_c^b e^{ci}e_{ai} - K_c^c \delta_a^b) = -2 {}^{(3)}e\mathcal{D}_b(K_a^b - K\delta_a^b) \quad (4.13)$$

Die Berechnung des Primary-Constraints ergibt lediglich eine bekannte Symmetrieaussage für die extrinsische Krümmung. Hierfür soll zunächst der Term $\pi_j^a e_{as}$ berechnet werden.

$$\pi_j^a e_{as} \stackrel{(3.83)}{=} {}^{(3)}e(\Omega^0{}_{(sj)} - 2\Omega^0{}_k{}^k \delta_{js}) \stackrel{(4.6)(4.7)}{=} {}^{(3)}e(K_{ab}e_s^a e_j^b - 2K\delta_{js})$$

Aus dem Primary-Constraint folgt schließlich:

$$\begin{aligned} K_{ab}e_s^a e_j^b &= K_{ab}e_j^a e_s^b \quad | \cdot e^{sc}e^{jd} \Rightarrow K_{ab}q^{ac}q^{bd} = K_{ab}q^{ad}q^{bc} \\ &\Rightarrow K^{cd} = K^{dc} . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Damit wurden alle Constraints als Funktionen der Variablen K_{ab} und e_{ai} ausgedrückt. Als weiterer Schritt soll die Umformung von den Dreibeinen (Triaden) zu den gewichteten Dreibeinen E_j^a berechnet werden. Die Kanonizität dieser Transformation ($\pi^{ai}; e_{bj}$) $\mapsto$ ($K_a^i; E_j^b$) wird im Anschluß

gezeigt. Das gewichtete Dreibein ist eine der beiden Ashtekarvariablen (bis auf Skalierung). Es ist wie folgt definiert:

$$E_j^a := e_j^a \det(e_a^j) = {}^{(3)}e e_j^a, \quad E_a^j := e_a^j \det(e_j^a), \quad E_{aj} := e_{aj} \det(e^{aj}), \quad E^{aj} := e^{aj} \det(e_{aj}) \quad (4.15)$$

E_a^j ist somit invers zu E_j^a . Der Hamilton-Constraint ist nun gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= q^{1/2} (K_b^h K_c^i e_h^c e_i^b - K_b^h K_c^i e_h^b e_i^c) - q^{1/2} {}^{(3)}R \\ &= q^{-1/2} (K_b^h K_c^i E_h^c E_i^b - K_b^h K_c^i E_h^b E_i^c) - q^{1/2} {}^{(3)}R \\ &= q^{-1/2} [(K_b^h E_i^b)(K_c^i E_h^c) - (K_b^h E_h^b)(K_c^i E_i^c)] - q^{1/2} {}^{(3)}R. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Aus den Primary-Constraint ergibt sich:

$$\begin{aligned} K_{cd} - K_{dc} = 0 \quad | \quad e_j^c &\Rightarrow K_c^i e_j^c e_{di} - K_d^i \delta_{ij} = 0 \quad | \quad e_k^d \Rightarrow K_{ck} e_j^c - K_{dj} e_k^d = 0 \\ &\Rightarrow K_{[k}^d E_{j]d} = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Der Diffeomorphismen-Constraint berechnet sich analog zu:

$$\mathcal{H}_a = -2 {}^{(3)}e \mathcal{D}_b (K_a^b - K \delta_a^b) = -2 {}^{(3)}e \mathcal{D}_b (K_a^j E_j^b - \delta_a^b K_c^j E_j^c) \quad (4.18)$$

4.2 Nachweis der Kanonizität der 1. Transformation

Man ist also von den Variablen π^{ai} und e_{bj} zu den Variablen K_a^i und E_j^b übergegangen. Die Transformation soll jetzt gewissermaßen rückwärts betrachtet werden. Das heißt es wird

$$\{E_j^a(x), K_b^i(y)\}_{E,K} = \delta_b^a \delta_j^i \delta^3(x-y), \quad \{E_j^a, E_k^b\}_{E,K} = 0, \quad \{K_a^j, K_b^k\}_{E,K} = 0 \quad (4.19)$$

gesetzt. Die Transformation $(e_{ai}, \pi^{bj}) \rightsquigarrow (E_k^c, K_d^h)$ ist kanonisch, wenn die Poissonklammern invariant gelassen werden, d.h. falls mit (4.19) gilt :

$$\{\pi^{ai}(x), e_{bj}(y)\}_{E,K} = \delta_b^a \delta_j^i \delta^3(x-y), \quad \{\pi^{ai}, \pi^{bj}\}_{E,K} = 0, \quad \{e_{ai}, e_{bj}\}_{E,K} = 0 \quad (4.20)$$

Als Aussage soll damit folgende Satz beweisen werden.

Satz 4.2.1. *Der Übergang von den Triaden e_{ia} und ihren zugehörigen Impulsen π^{bj} zum gewichteten Dreibein E_j^a und der extrinsischen Krümmung K_a^j ist eine kanonische Transformation.*

Beweis. Zur Erinnerung: Für die Poissonklammern gelten die folgenden algebraischen Relationen:

$$\text{i) Bilinearität: } \{f, g\} \text{ ist bilinear in } f \text{ und } g \quad (4.21)$$

$$\text{ii) Antikommutativität: } \{f, g\} = -\{g, f\} \quad (4.22)$$

$$\text{iii) Jacobi-Identität: } \{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0 \quad (4.23)$$

$$\text{iv) Leibnizregel: } \{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\} \quad (4.24)$$

Da $e_{aj} = e_{aj}(E_h^d)$ ist, folgt sofort: $\{e_{aj}, e_{bk}\} = \{e_{aj}(E_h^d), e_{bk}(E_i^c)\} = 0$. Womit bereits eine der Relationen von (4.20) gezeigt ist. Als nächstes sollen die Poissonklammern $\{e_{ai}, \pi^{bj}\}$ betrachtet werden. Zu deren Berechnung werden noch einige Relationen benötigt. Mit $f, g, h, s_k^c(e_i^a), t_l^d(e_i^a, E_b^j)$

als beliebige Funktionen gilt:

$$\text{a)} \quad E := \det E_j^a = \det(e_j^a \det(e_a^j)) = \det(e_a^j)^3 \det(e_j^a) = \det(e_a^j)^2 \Rightarrow E = {}^{(3)}e^2 \quad (4.25)$$

b) Aus der Variation des Krümmungstensors ist schon bekannt:

$$\delta(\det g) = (\det g) g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = (\det g) \text{tr}(g^{-1} \delta g) \Rightarrow \delta(\det g)/g = g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \{ {}^{(3)}e, f \} &= \frac{1}{2 {}^{(3)}e} \{ E, f \}, \text{ denn :} \\ \{ {}^{(3)}e^2, f \} &= {}^{(3)}e \{ {}^{(3)}e, f \} + {}^{(3)}e \{ {}^{(3)}e, f \} = 2 {}^{(3)}e \{ {}^{(3)}e, f \} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\text{d)} \quad \frac{1}{f} \left\{ f, h \right\} = -f \left\{ \frac{1}{f}, h \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{f}, h \right\} = \frac{1}{f^2} \left\{ f, h \right\} \quad (4.28)$$

$$\text{e)} \quad \{ \det s_k^c(e_i^a), t_l^d(e_i^a, E_b^j) \} = (\det s) s_a^i \{ s_i^a, t_l^d \} \quad (4.29)$$

$$\text{g)} \quad \{ fg, fh \} = f^2 \{ g, h \} + fg \{ f, h \} + fh \{ g, f \} \quad (4.30)$$

$$\text{h)} \quad \{ {}^{(3)}e, K_b^j \} \stackrel{(4.27)}{=} \frac{1}{2 {}^{(3)}e} \{ E, K_b^j \} \stackrel{(4.29)}{=} {}^{(3)}e E_a^i \{ E_i^a, K_b^j \} = \frac{1}{2} e_b^j \quad (4.31)$$

Damit ist $\{e_{ai}, \pi^{bj}\}$ in folgender Weise gegeben:

$$\begin{aligned} \{e_{aj}, \pi^{bi}\} &= -e_{cj} e_{ak} \{e^{ck}, \pi^{bi}\} \stackrel{(4.12)}{=} -e_{cj} e_a^k \left\{ \frac{E_k^c}{({}^{(3)}e)}, -2 {}^{(3)}e (K_h^i e^{hb} - K_d^h e_h^d e^{bi}) \right\} \\ &= 2 {}^{(3)}e e_{cj} e_a^k \left\{ \frac{E_k^c}{({}^{(3)}e)}, K_e^i e_h^e e^{hb} - K_d^h e_h^d e^{bi} \right\} \\ &= 2 {}^{(3)}e e_{cj} e_a^k e_h^e e^{hb} \left\{ \frac{E_k^c}{({}^{(3)}e)}, K_e^i \right\} - 2 {}^{(3)}e e_h^d e^{bi} e_{cj} e_a^k \left\{ \frac{E_k^c}{({}^{(3)}e)}, K_d^h \right\} \\ &= 2 {}^{(3)}e e_{cj} e_a^k e_h^e e^{hb} {}^{(3)}e e_k^c \left\{ \frac{1}{({}^{(3)}e)}, K_e^i \right\} + 2 e_{cj} e_a^k e_h^e e^{hb} \{E_k^c, K_e^i\} \\ &\quad - 2 e_h^d e^{bi} e_{cj} e_a^k \{E_k^c, K_d^h\} - 2 {}^{(3)}e e_h^d e^{bi} e_{cj} e_a^k e_k^c {}^{(3)}e \left\{ \frac{1}{({}^{(3)}e)}, K_d^h \right\} \\ &\stackrel{(4.28)}{=} -2 e_{cj} e_a^k q^{eb} e_k^c \{ {}^{(3)}e, K_e^i \} + 2 e_{cj} e_a^k e^{ei} e^{hb} \{E_k^c, K_{he}^i\} \\ &\quad - 2 e_h^d e^{bi} e_{cj} e_a^k \delta_d^c \delta_k^h + 2 e_h^d e^{bi} e_{cj} e_a^k e_k^c \{ {}^{(3)}e, K_d^h \} \\ &\stackrel{(4.31)}{=} -e_{aj} q^{eb} e_e^i + 2 e_{cj} e_a^k e^{ei} e^{hb} \delta_e^c \delta_{kh} - 2 e_{dj} \delta_a^d e^{bi} + e_{aj} e_h^d e^{bi} e_d^h \\ &= -e_{aj} q^{eb} e_e^i + 2 \delta_a^b \delta_j^i - 2 e_{aj} e^{bi} + 3 e_{aj} e^{bi} = 2 \delta_a^b \delta_j^i. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Der Faktor 2 lässt sich noch durch eine zusätzliche Transformation $K_e^i \longrightarrow \frac{1}{2} K_e^i$ absorbieren. Der Berechnung der letzten Poissonklammer $\{\pi^{ai}, \pi^{bj}\}$ erweist sich als am umfangreichsten. Aus praktischen Gründen soll zunächst $\{K^{ai}, e^{bj}\}$ betrachtet werden.

$$\begin{aligned} \{K^{ai}, e^{bj}\} &= q^{ac} \left\{ K_c^i, \frac{E^{bj}}{({}^{(3)}e)} \right\} = \frac{q^{ac}}{({}^{(3)}e)} \{K_c^i, E^{bj}\} + q^{ac} E^{bj} \left\{ K_c^i, \frac{1}{({}^{(3)}e)} \right\} \\ &= -\frac{q^{ac}}{({}^{(3)}e)} \delta^{ij} \delta_c^b - \frac{1}{({}^{(3)}e)^2} q^{ac} E^{bj} \{K_c^i, {}^{(3)}e\} \stackrel{(4.31)}{=} -\frac{q^{ab}}{({}^{(3)}e)} \delta^{ij} + \frac{1}{2 {}^{(3)}e} e^{bj} e^{ai}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Gleichung (4.33) liefert noch die folgende nützliche Vertauschungsrelation : $\{K^{bj}, e^{ai}\} = \{K^{ai}, e^{bj}\}$. Mit (4.32) ist $\{ {}^{(3)}e, \pi^{bj} \}$ durch :

$$\{ {}^{(3)}e, \pi^{bj} \} = e^{ai} {}^{(3)}e \{e_{ai}, \pi^{bj}\} \stackrel{(4.32)}{=} e^{ai} {}^{(3)}e \delta_a^b \delta_i^j = {}^{(3)}e e^{bj} \quad (4.34)$$

zu berechnen. Des weiteren lässt sich

$$\{K^{ai}, K^{bj}\} = 0 \quad (4.35)$$

zeigen, denn wegen

$$\begin{aligned}
K_d^j \{K^{ai}, q^{bd}\} &= K_d^j \{K^{ai}, e_k^b e^{bk}\} = K_d^j e_k^b \{K^{ai}, e^{dk}\} + K_d^j e_k^d \{K^{ai}, e^{bk}\} \\
&\stackrel{(4.33)}{=} K_d^j e_k^b \frac{1}{(3)_e} \left(-q^{ab} \delta^{ik} + \frac{1}{2} e^{ai} e^{dk} \right) + K_d^j e_k^d \frac{1}{(3)_e} \left(-q^{ab} \delta^{ik} + \frac{1}{2} e^{ai} e^{bk} \right) \\
&= \frac{1}{(3)_e} \left(K^{aj} e^{bi} + \frac{1}{2} K^{bj} e^{ai} - K^{ij} q^{ab} + \frac{1}{2} K^{bj} e^{ai} \right) \\
&= \frac{1}{(3)_e} (K^{aj} e^{bi} + K^{bj} e^{ai} - K^{ij} q^{ab})
\end{aligned} \tag{4.36}$$

erhält man für

$$\begin{aligned}
\{K^{ai}, K^{bj}\} &= \{q^{ac} K_c^i, q^{bd} K_d^j\} = q^{ac} \{K_c^i, q^{bd} K_d^j\} + K_c^i \{q^{ac}, q^{bd} K_d^j\} \\
&= q^{ac} K_d^j \{K_c^i, q^{bd}\} + K_c^i \{q^{ac}, K^{jb}\} = K_d^j \{K^{ai}, q^{bd}\} - K_c^i \{K^{jb}, q^{ac}\} \\
&\stackrel{(4.36)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Für $\{\pi^{ai}, \pi^{bj}\}$ ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
\{\pi^{ai}, \pi^{bj}\} &= 4 {}^{(3)}e^2 \{K^{ai} - K e^{ai}, K^{bj} - K e^{bj}\} - 2(K^{ai} - K e^{ai}) \{ {}^{(3)}e, 2 {}^{(3)}e(K^{ai} - K e^{ai}) \} \\
&\quad - 2(K^{bj} - K e^{bj}) \{ 2 {}^{(3)}e(K^{ai} - K e^{ai}), {}^{(3)}e \} \\
&= 4 {}^{(3)}e^2 \{K^{ai} - K e^{ai}, K^{bj} - K e^{bj}\} + \frac{1}{(3)_e} \pi^{ai} \{ {}^{(3)}e, \pi^{bj} \} + \frac{1}{(3)_e} \pi^{bj} \{ \pi^{ai}, {}^{(3)}e \} \\
&= 4 {}^{(3)}e^2 \{K^{ai}, K^{bj} - K e^{bj}\} - 4 {}^{(3)}e^2 \{K e^{ai}, K^{bj} - K e^{bj}\} + 2\pi^{ai} e^{bj} - 2\pi^{bj} e^{ai} \\
&= -4 {}^{(3)}e^2 \{K^{ai}, K_{ch} e^{ch} e^{bj}\} - 4 {}^{(3)}e^2 \{K e^{ai}, K^{bj}\} + 4 {}^{(3)}e^2 \{K e^{ai}, K e^{bj}\} + 2(\pi^{ai} e^{bj} - \pi^{bj} e^{ai}) \\
&= -4 {}^{(3)}e^2 K \{K^{ai}, e^{bj}\} - 4 {}^{(3)}e^2 K_{ch} \{K^{ai}, e^{ch}\} - 4 {}^{(3)}e^2 K \{e^{ai}, K^{bj}\} - 4 {}^{(3)}e^2 e^{ai} K_{ch} \{e^{ch}, K^{bj}\} \\
&\quad + 4 {}^{(3)}e^2 e^{ai} K \{K, e^{bj}\} + 4 {}^{(3)}e^2 e^{bj} K \{e^{ai}, K\} + 2(\pi^{ai} e^{bj} - \pi^{bj} e^{ai}) \\
&= -4 {}^{(3)}e^2 K_{ch} e^{bj} \{K^{ai}, e^{ch}\} - 4 {}^{(3)}e^2 e^{ai} K_{ch} \{e^{ch}, K^{bj}\} + 4 {}^{(3)}e^2 e^{ai} K_{ch} \{K^{ch}, e^{bj}\} \\
&\quad + 4 {}^{(3)}e^2 e^{bj} K_{ch} \{e^{ai}, K^{ch}\} + 2(\pi^{ai} e^{bj} - \pi^{bj} e^{ai}) \\
&= -4 {}^{(3)}e^2 (K_{ch} + K e_{ch}) e^{bj} \{K^{ai}, e^{ch}\} + 4 {}^{(3)}e^2 (K_{ch} + K e_{ch}) e^{ai} \{K^{bj}, e^{ch}\} + 2(\pi^{ai} e^{bj} - \pi^{bj} e^{ai}) \\
&= -4 {}^{(3)}e^2 (K_{ch} + K e_{ch}) e^{bj} \left(-\frac{g^{ac}}{(3)_e} \delta^{ih} + \frac{1}{2(3)_e} e^{ai} e^{ch} \right) + 2(\pi^{ai} e^{bj} - \pi^{bj} e^{ai}) \\
&\quad + 4 {}^{(3)}e^2 (K_{ch} + K e_{ch}) e^{ai} \left(-\frac{g^{bc}}{(3)_e} \delta^{jh} + \frac{1}{2(3)_e} e^{bj} e^{ch} \right) \\
&= -4 {}^{(3)}e e^{bj} \left(-K^{ai} + \frac{K e^{ai}}{2} - K e^{ai} + \frac{3}{2} K e^{ai} \right) + 2(\pi^{ai} e^{bj} - \pi^{bj} e^{ai}) \\
&\quad + 4 {}^{(3)}e e^{ai} \left(-K^{bj} + \frac{K e^{bj}}{2} - K e^{bj} + \frac{3}{2} K e^{bj} \right) \\
&= -4 e^{bj} {}^{(3)}e (-K^{ai} + K e^{ai}) + 4 e^{ai} {}^{(3)}e (-K^{bj} + K e^{bj}) + 2(\pi^{ai} e^{bj} - \pi^{bj} e^{ai}) \\
&= -2\pi^{ai} e^{bj} + 2\pi^{bj} e^{ai} + 2(\pi^{ai} e^{bj} - \pi^{bj} e^{ai}) = -2(\pi^{ai} e^{bj} - \pi^{bj} e^{ai}) + 2(\pi^{ai} e^{bj} - \pi^{bj} e^{ai}) = 0
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt worden, daß die Transformation $(e_{ai}, \pi^{bj}) \rightarrow (E_k^c, K_h^d)$ kanonisch ist. $\square$

4.3 Zweite Transformation: Die Zusammenhangsvariablen

Um die letzte Ashtekarvariable zu bilden ist zunächst noch die Einführung eines Skalierungsparameters β notwendig. Sei also β eine komplexe Zahl $\neq 0$, dann ist die Transformation

$$(E_i^a, K_b^j) \rightarrow ({}^{(\beta)}E_i^a := \frac{1}{\beta} E_i^a, {}^{(\beta)}K_b^j := \beta K_b^j) \tag{4.37}$$

kanonisch, wie man leicht sieht. β wird als Barbero-Immirzi-Parameter bezeichnet. Drückt man die ω durch das gewichtete Dreibein aus, kann das Dreibein gleich wieder durch $^{(\beta)}E_a^i$ ersetzt werden, da die ω invariant unter dieser Reskalierung sind:

$$\begin{aligned}
\omega_a^{ik} &= \frac{1}{2} e^{e[i} (\partial_{[a} e_{e]}^{k]} + e^{bk]} e_a^l \partial_b e_{el}) = \frac{1}{2} \frac{E^{e[i}}{E^{1/2}} \left(\partial_{[a} \left(E_{e]}^{k]} E^{1/2} \right) + \frac{E^{bk]} E_a^l}{E^{1/2}} \partial_b \left(E_{el} E^{1/2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{E^{e[i}}{E^{1/2}} \left(E^{1/2} \partial_{[a} E_{e]}^{k]} + \frac{1}{2} E^{-1/2} E_{[e}^{k]} \partial_a E + E^{bk]} E_a^l E^{1/2} \partial_b E_{el} + \frac{1}{2} E^{bk]} E_a^l E_{el} E^{-1/2} \partial_b E \right) \\
&= \frac{1}{2} E^{e[i} \left(\partial_{[a} E_{e]}^{k]} + \frac{1}{2E} E_{[e}^{k]} \partial_a E + E^{bk]} E_a^l \partial_b E_{el} + \frac{1}{2} \frac{E^{bk]} E_a^l}{E} E_{el} \partial_b E \right) \\
&= \frac{1}{2} E^{e[i} (\partial_{[a} E_{e]}^{k]} + E^{bk]} E_a^l \partial_b E_{el}) + \frac{1}{4} E^{e[i} \left(\frac{1}{E} E_{[e}^{k]} \partial_a E + \frac{E^{bk]} E_a^l}{E} E_{el} \partial_b E \right). \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Da E_a^i zu E_i^a invers ist, transformiert sich E_a^i mit $E_a^i \rightarrow {}^\beta E_a^i = \beta E_a^i$. Das bedeutet insbesondere, daß $^{(\beta)}\omega_a^{ik} := \omega_a^{ik} ({}^{(\beta)}E_b^j) = \omega_a^{ik} ({}^{(1)}E_b^j) = \omega_a^{ik}$ gilt. Eine wichtige Gleichung die unmittelbar zur Definition der zweiten Ashtekarvariable führt ist im nachfolgenden Lemma formuliert.

Lemma 4.3.1. *Es gilt:*

$$\partial_a E_i^a + \epsilon_{ikl} \Gamma_a^k E^{al} = \mathcal{D}_a E_i^a = 0, \tag{4.39}$$

wobei $\omega_{aik} := \epsilon_{ilk} \Gamma_a^l$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{D}_a E_j^a = \mathcal{D}_a ({}^{(3)}e e_{bj} q^{ba}) = {}^{(3)}e q^{ba} \mathcal{D}_a e_{bj} \\
&= {}^{(3)}e q^{ba} \partial_a e_{bj} - {}^{(3)}e q^{ba} \Gamma_{ab}^c e_{cj} + {}^{(3)}e q^{ba} \omega_{aj}{}^k e_{kb} \\
&= {}^{(3)}e q^{ba} \partial_a e_{bj} - \frac{1}{2} {}^{(3)}e q^{ba} q^{ec} e_{cj} (\partial_a q_{be} + \partial_b q_{ae} - \partial_e q_{ab}) + \omega_{aj}{}^k E_k^a \\
&= {}^{(3)}e q^{ba} \partial_a e_{bj} - {}^{(3)}e e_{cj} \left(-\delta_b^c \partial_a q^{ab} - \frac{1}{2} q^{ec} q^{ab} \partial_e (e_a^k e_{bk}) \right) + \omega_{aj}{}^k E_k^a \\
&= {}^{(3)}e q^{ba} \partial_a e_{bj} + {}^{(3)}e e_{bj} \partial_a q^{ab} + {}^{(3)}e e_j^e e^{bk} \partial_e e_{bk} + \omega_{aj}{}^k E_k^a \\
&= {}^{(3)}e \partial_a (q^{ba} e_{bj}) + e_j^e E^{bk} \partial_e e_{bk} + \omega_{aj}{}^k E_k^a \\
&\stackrel{(4.26)}{=} {}^{(3)}e \partial_a (e_j^a) + e_j^e \partial_e ({}^{(3)}e) + \omega_{aj}{}^k E_k^a \\
&= \partial_a (E_j^a) + \omega_{aj}{}^k E_k^a = \partial_a (E_j^a) + \epsilon_{jlk} \Gamma_a^l E^{ak} \tag{4.40}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.3.1. Man erhält dieses Ergebnis auch, wenn man das gewichtete Dreibein als in den beiden Indizes zweifach gewichtete Größe interpretiert und für $\mathcal{D}$ auf den Gewichten einen induzierten Zusammenhang wählt.

Diese Betrachtungen sind ebenso für die bereits durchgeführte Reskalierung richtig. Der Primary-Constraint (4.17) läßt sich auch als $G_i := \epsilon_{ikj} K_c^k E^{cj} = 0$ schreiben. Mit Gleichung (4.40) erhält man somit:

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + \epsilon_{jlk} {}^{(\beta)}K_c^l {}^{(\beta)}E^{ck} = \partial_c {}^{(\beta)}E_j^c + \epsilon_{jlk} \Gamma_c^l {}^{(\beta)}E^{ck} + \epsilon_{jlk} {}^{(\beta)}K_c^l {}^{(\beta)}E^{ck} \\
&= \partial_c {}^{(\beta)}E_j^c + \epsilon_{jlk} (\Gamma_c^l + {}^{(\beta)}K_c^l) {}^{(\beta)}E^{ck} \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Gleichung (4.41) legt die Definition eines neuen Zusammenhangs und einer neuen Zusammenhangsvariable nahe. Man definiert :

$${}^{(\beta)}A_a^i := \Gamma_a^i + {}^{(\beta)}K_a^i \tag{4.42}$$

$${}^{(\beta)}\mathcal{D}_c {}^{(\beta)}E_j^c := \partial_c {}^{(\beta)}E_j^c + \epsilon_{jlk} A_c^l {}^{(\beta)}E^{ck} = 0. \tag{4.43}$$

Mit den neuen Variablen erhält man abermals eine *Darstellung der Zwangsbedingungen*. Dazu sind noch einige Rechnungen anzustellen, die den Abschluß des vorliegenden Kapitels bilden werden. Dazu definiert man:

$$R_{ab}^k := \partial_{[a} \Gamma_{b]}^k + \epsilon_{mn}^k \Gamma_a^m \Gamma_b^n \quad (4.44)$$

$$\text{und } {}^{(\beta)}F_{ab}^j := \partial_{[a} {}^{(\beta)}A_{b]}^j + \epsilon_{kl}^j {}^{(\beta)}A_a^k {}^{(\beta)}A_b^l. \quad (4.45)$$

Es zeigt sich zunächst

$$R_{abjl} = \epsilon_{jkl} R_{ab}^k, \quad (4.46)$$

wenn man

$$R_{abjl} = \partial_{[a} \omega_{b]jl} + \omega_{[ajk} \omega_{b]}^k{}_l \quad (4.47)$$

akzeptiert (siehe [Pel94]), was mit den Mitteln des Kapitels (2.2) leicht zu beweisen ist.

Beweis. Der zweite Term in (4.47) läßt sich über

$$\begin{aligned} \omega_{[ajk} \omega_{b]}^k{}_l &= \epsilon_{kjs} \epsilon_{tl}^k \Gamma_{[a}^s \Gamma_{b]}^t = \epsilon_{kjs} \epsilon_{tl}^k (\Gamma_a^s \Gamma_b^t - \Gamma_b^s \Gamma_a^t) = (\delta_{jt} \delta_{sl} - \delta_{jl} \delta_{st}) (\Gamma_a^s \Gamma_b^t - \Gamma_b^s \Gamma_a^t) \\ &= (\delta_{jt} \delta_{sl} - \delta_{jl} \delta_{st} - \delta_{js} \delta_{tl} + \delta_{jl} \delta_{ts}) \Gamma_a^s \Gamma_b^t = (\delta_{jt} \delta_{sl} - \delta_{js} \delta_{tl}) \Gamma_a^s \Gamma_b^t \\ &= \epsilon_{kjl} \epsilon_{ts}^k \Gamma_a^s \Gamma_b^t = \epsilon_{jkl} \epsilon_{st}^k \Gamma_a^s \Gamma_b^t \end{aligned} \quad (4.48)$$

in den neuen Variablen ausdrücken und man erhält damit:

$$R_{abjl} \stackrel{(4.47)}{=} \partial_{[a} \omega_{b]jl} + \omega_{[ajk} \omega_{b]}^k{}_l \stackrel{(4.48)}{=} \epsilon_{jkl} \partial_{[a} \Gamma_{b]}^k + \epsilon_{jkl} \epsilon_{st}^k \Gamma_a^s \Gamma_b^t = \epsilon_{jkl} R_{ab}^k$$

□

Lemma 4.3.2. *Für den Diffeomorphismen-Constraint gilt*

$$\mathcal{H}_a = {}^{(\beta)}F_{ab}^j {}^{(\beta)}E_j^b. \quad (4.49)$$

Beweis. Denn aus der Definition (4.45) ist

$$\begin{aligned} {}^{(\beta)}F_{ab}^j &= \partial_{[a} {}^{(\beta)}A_{b]}^j + \epsilon_{kl}^j {}^{(\beta)}A_a^k {}^{(\beta)}A_b^l = \partial_{[a} (\Gamma_{b]}^j + {}^{(\beta)}K_{b]}^j) + \epsilon_{kl}^j (\Gamma_a^k + {}^{(\beta)}K_a^k) (\Gamma_b^l + {}^{(\beta)}K_b^l) \\ &= \partial_{[a} \Gamma_{b]}^j + \partial_{[a} {}^{(\beta)}K_{b]}^j + \epsilon_{kl}^j (\Gamma_a^k \Gamma_b^l + \Gamma_a^k {}^{(\beta)}K_b^l + \Gamma_b^l {}^{(\beta)}K_a^k + {}^{(\beta)}K_b^l {}^{(\beta)}K_a^k) \\ &= \partial_{[a} \Gamma_{b]}^j + \epsilon_{kl}^j \Gamma_a^k \Gamma_b^l + \partial_{[a} {}^{(\beta)}K_{b]}^j + \epsilon_{kl}^j \Gamma_a^k {}^{(\beta)}K_b^l + \epsilon_{kl}^j \Gamma_b^l {}^{(\beta)}K_a^k + \epsilon_{kl}^j {}^{(\beta)}K_b^l {}^{(\beta)}K_a^k \\ &= R_{ab}^j + \mathcal{D}_{[a} {}^{(\beta)}K_{b]}^j + \epsilon_{kl}^j {}^{(\beta)}K_b^l {}^{(\beta)}K_a^k \end{aligned} \quad (4.50)$$

zu berechnen. Eine Verjüngung von (4.50) mit ${}^{(\beta)}E_j^b$ ergibt

$$\begin{aligned} {}^{(\beta)}F_{ab}^j {}^{(\beta)}E_j^b &= \frac{1}{\beta} R_{ab}^j E_j^b + E_j^b (\mathcal{D}_{[a} K_{b]}^j) + \epsilon_{kl}^j \beta K_b^l K_a^k E_j^b \\ &= \frac{1}{\beta} R_{ab}^j E_j^b + E_j^b (\mathcal{D}_{[a} K_{b]}^j) + \beta K_a^k G_k. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Um (4.49) zu zeigen ist also das Verschwinden des ersten und dritten Terms in (4.51) nachzuweisen. Für den dritten Term ist das wegen $G_k = 0$ trivial. Für den ersten Term hingegen benötigt man die folgende Symmetrieeigenschaft des Krümmungstensors

$$R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} = 0. \quad (4.52)$$

Denn wegen

$$R_{ab}^j E_j^b = \frac{1}{2} \epsilon^{bcd} \epsilon_{jkl} e_c^k e_d^l R_{ab}^j = -\frac{1}{2} \epsilon^{bcd} R_{abcd} \quad (4.53)$$

erhält man mit (4.52)

$$\begin{aligned} \epsilon^{bcd} R_{abcd} &= -\epsilon^{bcd} (R_{acdb} + R_{adbc}) = -\epsilon^{bcd} R_{acdb} - \epsilon^{dbc} R_{adbc} = -2\epsilon^{bcd} R_{acdb} \\ \Rightarrow 3\epsilon^{bcd} R_{abcd} &= 0 \Rightarrow \epsilon^{bcd} R_{abcd} = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

und deshalb

$$E_j^b R_{ab}^j = 0, \quad (4.55)$$

was gerade zu beweisen war. $\square$

Es bleibt noch die Betrachtung des Hamilton-Constraints.

Lemma 4.3.3.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\beta^2 {}^{(\beta)}F_{ab}^j \epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl} + (1 + \beta^2) ({}^{(\beta)}E_{[i}^b {}^{(\beta)}E_{h]}^c {}^{(\beta)}K_b^h {}^{(\beta)}K_c^i) \right) \\ &\quad - \frac{2}{\beta} E^{aj} \mathcal{D}_a G_j. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Proof. Man bemerkt :

$$\begin{aligned} \epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}F_{ab}^j {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl} &= -\frac{1}{\beta^2} \epsilon_{kjl} R_{ab}^j E^{ak} E^{bl} + \epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl} \mathcal{D}_{[a} {}^{(\beta)}K_{b]}^j \\ &\quad + \epsilon_{mn}^j \epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}K_a^m {}^{(\beta)}K_b^n {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl} \\ &= -\frac{q}{\beta^2} R - \frac{2}{\beta} E^{aj} \mathcal{D}_a G_j + (\delta_{mk} \delta_{nl} - \delta_{ml} \delta_{nk}) K_a^m K_b^n E^{ak} E^{bl} \\ &= -\frac{q}{\beta^2} R + K_a^m K_b^n E_m^a E_n^b - K_a^m K_b^n E_n^a E_m^b - \frac{2}{\beta} E^{aj} \mathcal{D}_a G_j \\ &= -\frac{q}{\beta^2} R + (K_a^m E_m^a)^2 - (K_a^m E_n^a)(K_b^n E_m^b) - \frac{2}{\beta} E^{aj} \mathcal{D}_a G_j. \end{aligned}$$

Bringt man den zweiten Term der rechten Seite auf die linke Seite und ergänzt diese schließlich noch zu $\mathcal{H}$, so erhält man nach Multiplikation mit β^2 und Division durch $\sqrt{q}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{\sqrt{q}} \beta^2 \epsilon_{ikl} {}^{(\beta)}F_{ab}^j {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl} + \left(\frac{\beta^2}{\sqrt{q}} + \frac{1}{\sqrt{q}} \right) \left((K_a^m E_n^a)(K_b^n E_m^b) - (K_a^m E_m^a)^2 \right) - \frac{2}{\beta} E^{aj} \mathcal{D}_a G_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\beta^2 \epsilon_{ikl} {}^{(\beta)}F_{ab}^j {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl} + (1 + \beta^2) \left(({}^{(\beta)}K_a^m {}^{(\beta)}E_n^a) ({}^{(\beta)}K_b^n {}^{(\beta)}E_m^b) - ({}^{(\beta)}K_a^m {}^{(\beta)}E_m^a)^2 \right) \right) \\ &\quad - \frac{2}{\beta} E^{aj} \mathcal{D}_a G_j, \end{aligned}$$

was auf Gleichung (4.56) führt. $\square$

Diese Formulierung ist insofern inkonsequent, als daß (4.56) noch die extrinsische Krümmung als Variable enthält. Dies ist dadurch zu begründen, daß man anfänglich $\beta = i$ setzte, um den zweiten Term zu eliminieren. Die Constraints sind aus Übersichtsgründen bisher ohne die zugehörige Integration dargestellt worden. Integriert man $\mathcal{H}$, so ist zu berücksichtigen, daß es sich bei dem Term $\frac{2}{\beta} E^{aj} \mathcal{D}_a G_j$ Oberflächenterm handelt – dieser also bei Integration verschwindet. Deshalb läßt sich

ein neues System von Zwangsbedingungen aufstellen, in dem man diesen Oberflächenterm wegläßt. Insgesamt erhält man:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' &= \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\beta^2 {}^{(\beta)}F_{ab}^j \epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl} + (1 + \beta^2) ({}^{(\beta)}E_{[i}^b {}^{(\beta)}E_{h]}^c {}^{(\beta)}K_b^h {}^{(\beta)}K_c^i) \right) = 0 \\ \mathcal{H}_a &= {}^{(\beta)}F_{ab}^j {}^{(\beta)}E_j^b = 0 \\ G_j &= {}^{(\beta)}\mathcal{D}_c {}^{(\beta)}E_j^c := \partial_c {}^{(\beta)}E_j^c + \epsilon_{jlk} {}^{(\beta)}A_c^l {}^{(\beta)}E^{ck} = 0 .\end{aligned}$$

4.4 Nachweis der Kanonizität der 2. Transformation

Um die Kanonizität der Transformation $(E_i^a, K_b^j) \rightarrow ({}^{(\beta)}E_i^a, {}^{(\beta)}A_b^j)$ zu beweisen, muß

$$\{ {}^{(\beta)}A_a^i(x), {}^{(\beta)}A_b^j(y) \} = \{ {}^{(\beta)}E_i^a(x), {}^{(\beta)}E_j^b(y) \} = 0, \{ {}^{(\beta)}E_i^a(x), {}^{(\beta)}A_b^j(y) \} = \delta_b^a \delta_j^k \delta^3(x, y) \quad (4.57)$$

mit den Poissonklammern von (4.19) gezeigt werden. Die Transformation mit β ist in diesem Zusammenhang leicht zu zeigen. Der Übersicht halber soll der Index β deshalb in diesem Kapitel weggelassen werden. Da die Γ_a^i nur von den E_j^b abhängen, sieht man leicht die zweite und dritte Relation in (4.57). Die *Hauptschwierigkeit* liegt darin, das *Verschwinden der Poissonklammer zwischen den Zusammenhangsvariablen aufzuzeigen*. Hierzu bemerkt man zunächst (ohne Beweis) das folgende Lemma.

Lemma 4.4.1. *Es gilt:*

$${}^{(3)}e \epsilon^{i_1 \dots i_D} e_{i_1}^{a_1} \dots e_{i_D}^{a_D} = \epsilon^{a_1 \dots a_D} \quad \text{und} \quad (4.58)$$

$$\delta(e_{i,b}^a) = (\delta e_i^a)_{,b} . \quad (4.59)$$

Damit läßt sich als nächstes das folgende Lemma beweisen (der Nutzen von Lemma (4.4.2) wird später ersichtlich werden), wobei der Argumentation von [Thi01] gefolgt wird.

Lemma 4.4.2. *Es gilt:*

$$\int_{\Sigma} dx^3 E_i^a \delta \Gamma_a^i = 0 . \quad (4.60)$$

Beweis. Für den Term $E_i^a \delta \Gamma_a^i$ erhält man ($D = 3$)

$$\begin{aligned}E_i^a \delta \Gamma_a^i &= {}^{(3)}e e_i^a \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \delta(e_k^b [e_{ja,b} - e_{bj,a} + e_j^c e_{al} e_{c,b}^l]) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} {}^{(3)}e (e_i^a \delta(e_k^b [e_{ja,b} - e_{bj,a}]) + \delta_{il} \delta(e_k^b e_j^c e_{c,b}^l) + e_i^a e_k^b e_j^c e_{c,b}^l \delta e_{al}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} {}^{(3)}e (\delta(e_i^a e_k^b [e_{ja,b} - e_{bj,a}] + e_k^b e_j^c e_{ic,b}) - \delta(e_i^a) e_k^b [e_{ja,b} - e_{bj,a}] + e_i^a e_k^b e_j^c e_{c,b}^l \delta e_{al}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} {}^{(3)}e (\delta(e_i^a e_k^b e_{ja,b} - e_i^b e_k^a e_{aj,b} + e_k^b e_j^a e_{ia,b}) - \delta(e_i^a) e_k^b [e_{ja,b} - e_{bj,a}] + \frac{1}{2} \epsilon^{acb} e_{c,b}^l \delta e_{al}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} {}^{(3)}e (\delta(e_i^a e_k^b e_{ja,b} + e_k^b e_i^a e_{aj,b} + e_k^b e_j^a e_{ia,b}) - \delta(e_i^a) e_k^b [e_{ja,b} - e_{bj,a}] + \frac{1}{2} \epsilon^{acb} e_{c,b}^l \delta e_{al}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} {}^{(3)}e (\delta(e_k^b e_i^a e_{ja,b} + \delta(e_i^a) e_k^b e_{bj,a} + e_k^b e_i^a \delta(e_{ja,b})) + \frac{1}{2} \epsilon^{acb} e_{c,b}^l \delta e_{al}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} {}^{(3)}e e_k^b e_i^a \delta_j^l \delta(e_{la,b}) + \frac{1}{2} \epsilon^{acb} e_{c,b}^l \delta(e_{al}) = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} {}^{(3)}e e_k^b e_i^a e_j^c \delta(e_{la,b}) + \frac{1}{2} \epsilon^{acb} e_{c,b}^l \delta(e_{al}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{acb} (e_c^l \delta(e_{la,b}) - e_{c,b}^l \delta(e_{al})) = -\frac{1}{2} \epsilon^{abc} \partial_b (e_c^l \delta(e_{la})) = \partial_b \left(-\frac{1}{2} \epsilon^{abc} e_c^l \delta(e_{la}) \right) .\end{aligned}$$

Da dies ein Oberflächenterm ist, folgt

$$\int_{\Sigma} E_i^a \delta \Gamma_a^i dx^3 = 0 .$$

□

Über (4.4.2) erhält man nun eine Darstellung der Zusammenhangsvariablen. Ideen zu den nachfolgenden Ausführungen finden sich in [NM93].

Lemma 4.4.3. *Die Zusammenhangsvariablen lassen sich mit den Poissonklammern als*

$$\{F, K_a^i\} + K_a^i = A_a^i, \quad (4.61)$$

darstellen, wobei F durch

$$F := \int_{\Sigma} d^3x' \Gamma_b^k E_k^b \quad (4.62)$$

definiert ist.

Beweis.

$$\begin{aligned} \{F, K_a^i\} + K_a^i &= \left\{ \int_{\Sigma} d^3x' \Sigma_b^k E_k^b, K_a^i \right\} = \int_{\Sigma} dx'' \frac{\delta \int d^3x' \Gamma_b^k E_k^b}{\delta E_j^c} \frac{\delta K_a^i}{\delta K_c^j} + K_a^i \\ &\stackrel{(4.61)}{=} \int_{\Sigma} dx'' \left(\int_{\Sigma} d^3x' \Gamma_b^k \delta(x', x'') \delta_c^b \delta_k^j \right) \delta(x'', x) \delta_a^c \delta_j^i + K_a^i \\ &= \Gamma_a^i + K_a^i = A_a^i \end{aligned}$$

□

Damit läßt sich der entscheidende Satz beweisen:

Satz 4.4.1. *Die Poissonklammer zwischen den Zusammenhangsvariablen verschwinden. Es gilt:*

$$\{A_a^i, A_b^j\} = 0. \quad (4.63)$$

Beweis. Mit (4.61) gilt

$$\begin{aligned} \{A_a^i, A_b^j\} &= \{\{F, K_a^i\} + K_a^i, \{F, K_b^j\} + K_b^j\} \\ &= \{\Gamma_a^i, \Gamma_b^j\} + \{K_a^i, K_b^j\} + \{\{F, K_a^i\}, K_b^j\} + \{K_a^i, \{F, K_b^j\}\} \\ &= \{\{F, K_a^i\}, K_b^j\} + \{\{K_b^j, F\}, K_a^i\} \\ &= \{\{K_a^i, K_b^j\}, F\} = 0, \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Bianci-Identität verwendet wurde. □

4.5 Der Gauß-Constraint und die Interpretation der Ashtekarvariablen im Rahmen von Yang-Mills-Theorien

Der auffälligste Vorteil der Ashtekarvariablen ist die Möglichkeit, diese im Rahmen einer Yang-Mills-Theorie zu interpretieren und die Theorie der Gravitation so den Theorien der anderen drei Grundkräfte der Natur anzunähern. Wie dies geschieht, ist nun Gegenstand dieses Kapitels.

Als erstes betrachten wir die in Kapitel 4.3 vorgenommene Zerlegung der Zusammenhangsvariablen ω_{aik} nach Variablen Γ_a^l , welche wir über die Gleichung $\omega_{aik} =: e_{ilk} \Gamma_a^l$ definiert hatten. Es ist zunächst zu bemerken, daß die antisymmetrischen Tensoren zweiter Stufe in drei Dimensionen einen dreidimensionalen Vektorraum aufspannen. Dies impliziert einen Isomorphismus zwischen den antisymmetrischen Tensorfeldern zweiter Stufe in drei Dimensionen und den ebenfalls dreidimensionalen Vektorfeldern. Die angesprochene Zerlegung

$$\Gamma_a^l = \frac{1}{2} \epsilon^{ilk} \omega_{aik} \quad (4.64)$$

ist gerade ein solcher Isomorphismus zwischen den antisymmetrischen Tensorfeldern ω_a zweiter Stufe und den Vektorfeldern Γ_a (alles in drei Dimensionen und alles über der Hyperfläche Σ). Insgesamt kann man also die Γ s, in einem Zwischenschritt, als Tensoren zweiter Stufe interpretieren: $\Gamma = \Gamma_a^l dx^a \otimes \xi_l$. Diese Sichtweise erklärt auch, warum man im Rahmen der kanonischen Transformationen nun die Möglichkeit besitzt, zu den Γ s das β -fache der extrinsischen Krümmung (welche ihrer Konstruktion nach ebenfalls ein Tensorfeld zweiter Stufe ist) zu addieren. Das Ergebnis davon ist die Zusammenhangsform A_a^i nach Ashtekar, obwohl wir von einem Zusammenhang jetzt noch nicht sprechen wollen.

Im zweiten Schritt betrachten wir den Gauß-Constraint (der Index $^{(\beta)}$ wird innerhalb dieses Kapitels weggelassen).

$$\partial_c E_i^c + \epsilon_{ij}^k A_c^j E_k^c = 0 . \quad (4.65)$$

Um diesen Constraint in Verbindung mit einer Yang-Mills-Theorie zu interpretieren, nutzen wir abermals den Isomorphismus zwischen dreidimensionalen Vektoren und antisymmetrischen 3×3 Matrizen, indem wir die Basis von Vektorfeldern ξ_i auf Generatoren ϵ_i der $so(3)$ -Liealgebra abbilden. Als Strukturgleichungen nehmen wir

$$[\epsilon_i, \epsilon_j] = \epsilon_{ij}^k \epsilon_k \quad (4.66)$$

an. Die Form des Gauß-Constraints legt nun nahe, A (für reellwertiges β) als $so(3)$ -wertigen Zusammenhang und E als $so(3)$ -wertiges gewichtetes Vektorfeld zu deuten, so daß Gleichung (4.65) nichts weiter als eine kovariante Ableitung von E ist. Dies erzwingt von den beiden Variablen A und E ein entsprechendes Transformationsverhalten gegenüber vertikalen Automorphismen im Sinne dieser Interpretation. Man ist nun an einem Punkt angelangt an dem man neben der Form des Gauß-Constraints eine zweite Eigenschaft desselben berücksichtigen muß. Der Gauß-Constraint ist nämlich ein first-class Constraint (wird hier nicht bewiesen siehe [HT]). In dieser Eigenschaft erzeugt er selbst Eichtransformation. Wir werden zeigen, daß diese Transformationen für E und A gerade die durch die Yang-Mills-Interpretation implizierten sind. Damit stimmen beim Gauß-Constraint die Interpretation der Form im Rahmen der Yang-Mills-Theorie *und* die „hamiltonsche Eigenschaft“ als first-class Constraint überein.

Wir berechnen die Poissonklammern der kanonischen Variablen mit dem Gauß-Constraint.

Lemma 4.5.1. *Es gilt:*

$$\delta_G E_i^a := \{E_i^a, G(\Lambda)\} = \epsilon_{ijk} E^{ja} \Lambda^k, \quad \delta_G A_a^i := \{A_a^i, G(\Lambda)\} = -\partial_a \Lambda^i(x) + \epsilon_{lj}^i A_c^l(x) \Lambda^j(x) . \quad (4.67)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \{E_i^a(x), G(\Lambda)\} &= \{E_i^a(x), \int \Lambda^j(x') G_j(x') dx'\} \\ &= \{E_i^a(x), \int \Lambda^j(x') (\partial_b E_j^b(x') + \epsilon_{jlk} A_c^l(x') E^{ck}(x')) dx'\} \\ &= -\{E_i^a(x), \int E_j^b(x') \partial_b \Lambda^j(x') dx'\} + \int \epsilon_{jlk} \{E_i^a(x), A_c^l(x')\} E^{ck}(x') \Lambda^j(x') dx' \\ &= \int \epsilon_{jlk} \delta_c^a \delta_i^l \delta(x' - x) \Lambda^j(x') E^{ck}(x') dx' = \epsilon_{ikj} E^{ak}(x) \Lambda^j(x) \\ \{A_a^i(x), G(\Lambda)\} &= \{A_a^i(x), \int \Lambda^j(x') G_j(x') dx'\} \\ &= \{A_a^i(x), \int \Lambda^j(x') (\partial_b E_j^b(x') + \epsilon_{jlk} A_c^l(x') E^{ck}(x')) dx'\} \\ &= -\partial_a \Lambda^i(x) \delta_j^j + \epsilon_{jkl} A_c^l(x) \Lambda^j(x) \delta_a^c \delta^{ik} \\ &= -\partial_a \Lambda^i(x) + \epsilon_{lj}^i A_c^l(x) \Lambda^j(x) \end{aligned}$$

□

Die Poissonklammern von Funktionen der kanonischen Variablen, und insbesondere der kanonischen Variablen selber, mit den first-class Constraints ergeben die infinitesimalen Eichtransformationen dieser Funktionen (siehe [HT]). Des weiteren erhält man durch Exponentialbildung die Transformationsgleichungen, d.h. es gilt für ${}^{(\beta)}E$ und ${}^{(\beta)}A$

$$E' = (\exp \delta_G)E, \quad A' = (\exp \delta_g)A. \quad (4.68)$$

Drückt man nun die infinitesimalen Transformationen von Lemma 4.5.1 in der im ersten Teil dieses Kapitels beschriebenen Interpretation aus, so ergibt sich

$$\delta_G E := \{E, G(\Lambda)\} = [E, \Lambda], \quad \delta_G A := \{A, G(\Lambda)\} = -d\Lambda + [A, \Lambda]. \quad (4.69)$$

Wir zeigen den folgenden Satz.

Satz 4.5.1. *Die durch den Gauß-Constraint erzeugten Eichtransformationen für E und A sind:*

$$E' = g(\Lambda)Eg(\Lambda)^{-1}, \quad A' = g(\Lambda)dg(\Lambda)^{-1} + g(\Lambda)Ag(\Lambda)^{-1}. \quad (4.70)$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} E' &= (\exp \delta_G)E = E + [E, \Lambda] + \frac{1}{2!}[[E, \Lambda], \Lambda] + \frac{1}{3!}[[[E, \Lambda], \Lambda], \Lambda] + \dots \\ &= e^\Lambda E e^{-\Lambda} = g(\Lambda)Eg(\Lambda)^{-1}, \end{aligned}$$

wobei der vorletzte Schritt auf einer Schlußfolgerung aus der Cambell-Baker-Hausdorff-Formel beruht. Um die Systematik in der Reihenentwicklung der Transformationsformel für den Zusammenhang zu erkennen, berechnen wir noch $\delta_G \delta_G A$. Man erhält:

$$\begin{aligned} \delta_G \delta_G A &= -d\Lambda + [\delta_G A, \Lambda] = -d\Lambda + [d\Lambda + [A, \Lambda], \Lambda] \\ &= \underbrace{[d\Lambda, \Lambda]}_0 + [[A, \Lambda], \Lambda] = [[A, \Lambda], \Lambda]. \end{aligned}$$

A' ist somit durch

$$\begin{aligned} A' &= -d\Lambda + A + [A, \Lambda] + \frac{1}{2!}[[A, \Lambda], \Lambda] + \frac{1}{3!}[[[A, \Lambda], \Lambda], \Lambda] \\ &= -d\Lambda + g(\Lambda)Ag(\Lambda)^{-1} = \exp(\Lambda)d\exp(-\Lambda) + g(\Lambda)Ag(\Lambda)^{-1} \\ &= g(\Lambda)dg(\Lambda)^{-1} + g(\Lambda)Ag(\Lambda)^{-1} \end{aligned}$$

gegeben. □

Insgesamt wurde damit gezeigt, daß die Variablen E_i^a und A_a^i den Phasenraum einer $SO(3)$ -Yang-Mills-Theorie über der dreidimensionalen Hyperfläche Σ bilden.

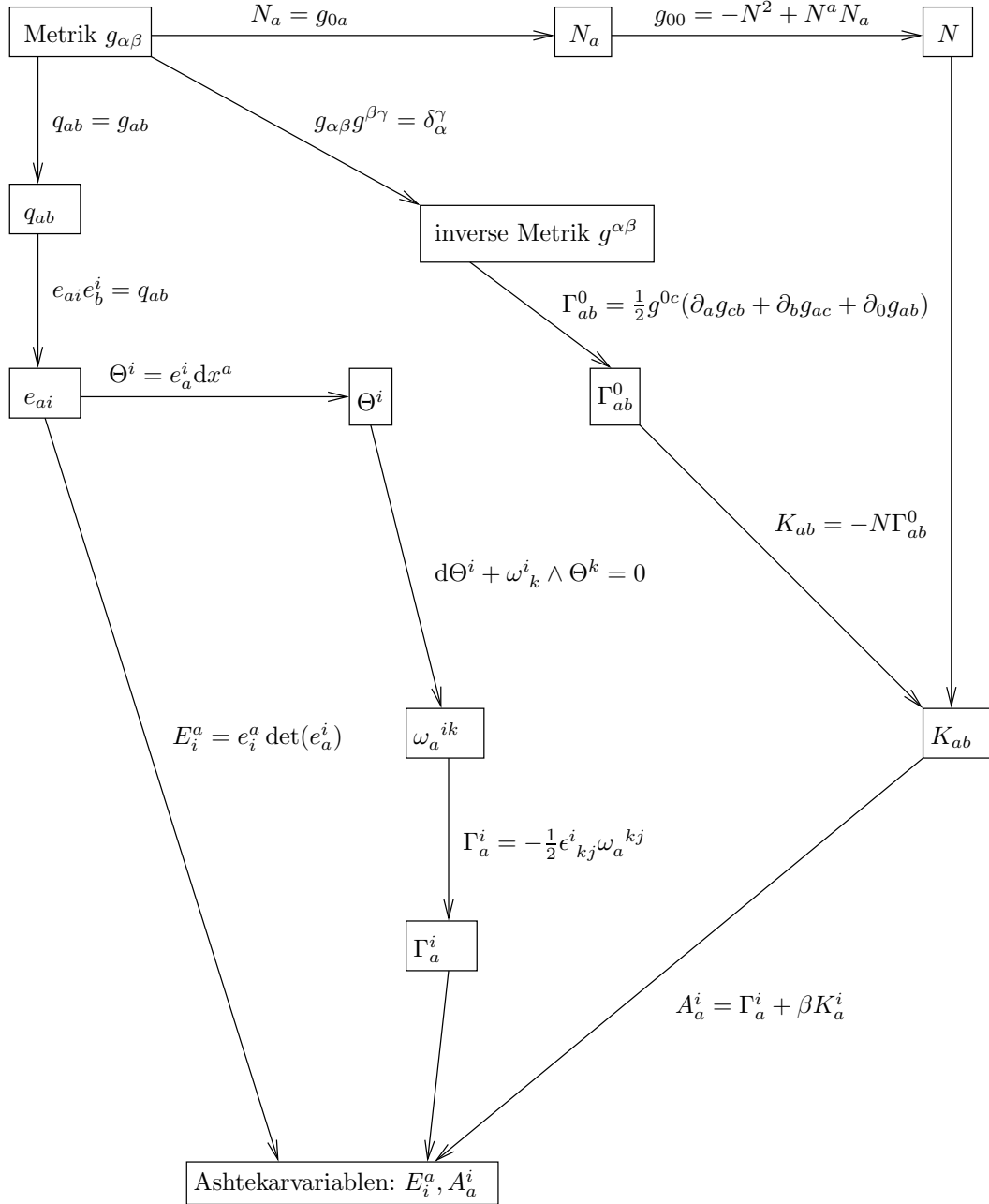


Abbildung 5.1: Schema zur Berechnung der Ashtekarvariablen

Kapitel 5

Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen in Ashtekarvariablen

5.1 Vorbetrachtungen

Gegeben sei eine Metrik welche die Vakuum-Feldgleichungen löst. Dann lassen sich dazu nach Schema 5.1 die Ashtekarvariablen berechnen. Das Schema soll hier kurz erläutert werden.

Die *Berechnung der extrinsischen Krümmung* erfolgt nach Formel (4.2). Dazu benötigt man die Lapse-Funktion N und die Christoffelsymbole Γ_{ab}^0 mit einen zeitlichen oberen Index. Für die Lapse-Funktion liest man die Shift-Funktionen N_a wegen $N_a = g_{0a}$ einfach aus der Metrik ab und hebt deren Index mit der zur räumlichen Metrik $q_{ab} = g_{ab}$ inversen Metrik q^{ab} . Dieser Schritt wurde im Diagramm aus Gründen der Übersichtlichkeit unterschlagen. Hat man nun die Shift-Funktionen berechnet, so läßt sich die Lapse-Funktion mit der Gleichung (3.37) ermitteln. Dabei soll $N > 0$ gelten. Für die Christoffelsymbole bestimmt man zunächst die inverse Metrik und benutzt dann die Gleichung (2.39). Damit hat man alle Variablen, die zur Berechnung der extrinsischen Krümmung notwendig sind, ermittelt.

Als nächstes soll das *Dreibein* betrachtet werden. Hierbei stellt man fest, daß die Koeffizienten e_{ai} lediglich durch die Gleichung (2.3) eingeschränkt werden. Das hat zur Folge das alle möglichen Lösungen für das Dreibein durch Rotation und Spiegelung auseinander hervorgehen, d.h. die Symmetriegruppe ist $O(D-1)$. Zur Erklärung definiert man $e_a := e(\partial_a)$. Gleichung (2.3) läßt nun schreiben als :

$$e_a e_b = g_{ab}, \quad (5.1)$$

wobei sich das Problem wegen $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ auf eine Gleichung mit einem Skalarprodukt im euklidischen Raum reduziert. Durch (5.1) werden also die Winkel zwischen den Vektoren und deren Länge festgelegt. Die Symmetriegruppe, die diese Parameter im $(D-1)$ -dimensionalen euklidischen Raum erhält, ist gerade die $O(D-1)$. Aus dem Dreibein ist nun das *gewichtete Dreibein* durch Bildung der Determinante $\det(e_a^i)$ und mit $E_i^a = e_i^a \det(e_a^i)$ einfach abzuleiten.

Es bleibt noch die *Berechnung des Zusammenhangs* A_a^i . Dies läßt sich mit der Gleichung (4.42) bewerkstelligen, wenn man vorher die Zusammenhangskomponenten Γ_a^i ermittelt hat. Hierzu existieren wiederum mindestens zwei Methoden, von denen aber nur eine im Schema 5.1 notiert ist. Dabei wird die Cartansche Strukturformel und die Metrizität des Zusammenhangs genutzt, indem man zuerst die duale Basis $\{\Theta^i\}$ zu den $\{e_i\}$ bildet und in $d\Theta^I + \omega_K^I \wedge \Theta^K = 0$ einen Koeffizientenvergleich durchführt. Es lohnt sich diese Rechnung für den Fall $D = 3$ allgemein für ein beliebiges Dreibein auszuführen, da das Ergebnis in den nachfolgenden Kapitel benötigt wird. Gleichzeitig erhält man ein explizites Beispiel wie der Koeffizientenvergleich durchzuführen ist.

Wie schon erwähnt, benutzt man die Torsionsfreiheit (d.h. Cartansche Strukturformel für Torsion $T^i = 0$) und die Metrizität, d.h. die beiden Gleichungen:

$$d\Theta^i = \omega_k^i \wedge \Theta^k \quad \text{und} \quad (5.2)$$

$$\omega_k^i = -\omega_i^k. \quad (5.3)$$

Zerlegt man die äußere Ableitung $d\Theta^i$ durch

$$d\Theta^i = A^i \Theta^1 \wedge \Theta^2 + B^i \Theta^2 \wedge \Theta^3 + C^i \Theta^1 \wedge \Theta^3 \quad (5.4)$$

nach der Basis von 2-Formen die von den $\{\Theta^i\}$ gebildet werden, so leitet man aus (5.2) das folgende Gleichungssystem ab:

$$\begin{aligned} \omega_2^1 \wedge \Theta^2 + \omega_3^1 \wedge \Theta^3 &= A^1 \Theta^1 \wedge \Theta^2 + B^1 \Theta^2 \wedge \Theta^3 + C^1 \Theta^1 \wedge \Theta^3 \\ \omega_1^2 \wedge \Theta^1 + \omega_3^2 \wedge \Theta^3 &= A^2 \Theta^1 \wedge \Theta^2 + B^2 \Theta^2 \wedge \Theta^3 + C^2 \Theta^1 \wedge \Theta^3 \\ \omega_1^3 \wedge \Theta^1 + \omega_2^3 \wedge \Theta^2 &= A^3 \Theta^1 \wedge \Theta^2 + B^3 \Theta^2 \wedge \Theta^3 + C^3 \Theta^1 \wedge \Theta^3. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Seien nun die Funktionen $\Theta \omega_{ak}^i$ die Komponenten der ω bezüglich der Basis $\{\Theta^I\}$, dann erhält man durch Koeffizientenvergleich im obigen Gleichungssystem die folgenden Komponenten

$$\begin{aligned} \Theta \omega_{12}^1 &= A^1 & \Theta \omega_{21}^2 &= -A^2 & \Theta \omega_{31}^3 &= -C^3 \\ \Theta \omega_{13}^1 &= C^1 & \Theta \omega_{23}^2 &= B^2 & \Theta \omega_{32}^3 &= -B^3 \end{aligned} \quad (5.6)$$

und einen weiteren Satz von Gleichungen, der durch

$$\begin{aligned} \Theta \omega_{23}^1 - \Theta \omega_{32}^1 &= B^1 \\ \Theta \omega_{13}^2 + \Theta \omega_{32}^1 &= C^2 \\ \Theta \omega_{23}^1 - \Theta \omega_{13}^2 &= A^3 \end{aligned} \quad (5.7)$$

gegeben ist. Dieses Gleichungssystem läßt sich eindeutig nach den Komponentenfunktionen auflösen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Theta \omega_{13}^2 &= \frac{1}{2} \left(C^2 + B^1 - A^3 \right) \\ \Theta \omega_{23}^1 &= \frac{1}{2} \left(B^1 + C^2 + A^3 \right) \\ \Theta \omega_{32}^1 &= \frac{1}{2} \left(C^2 + A^3 - B^1 \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Damit erhält man den Spinzusammenhang. Benutzt man anschließend die Formel $\Theta^i = e_a^i dx^a$ so bekommt man die ursprüngliche Zerlegung von ω in der Koordinatenbasis. Des weiteren lassen sich nun die Zusammenhangskomponenten Γ_a^i über $\Gamma_a^i = -\frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} \omega_a^{jk}$ berechnen.

Die zweite Methode bezieht sich auf einen anderen Zugang zu den ω_a^{ik} . So ist auch möglich zuerst die Christoffelsymbole der räumlichen Metrik zu bestimmen und dann über

$$\omega_a^{ik} = -e^{bk} \partial_a e_b^i + e^{bk} \Gamma_{ab}^c e_c^i \quad (5.9)$$

den Spinzusammenhang zu berechnen.

5.2 Die Schwarzschildmetrik

Die Ashtekarvariablen sollen hier für die Schwarzschildmetrik in der Form

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(\frac{r}{r-2M}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (5.10)$$

dargestellt werden [Kel05]. Da das in dieser Diagonalgestalt besonders einfach ist, kann man als Ausgleich die Koordinatensingularität bei $r = 2M$ in Kauf nehmen.

5.2.1 Berechnung der extrinsischen Krümmung

Die Berechnung der extrinsischen Krümmung erfolgt nach Formel (4.2), d.h. es müssen insbesondere die Christoffelsymbole der Form Γ_{ab}^0 ermittelt werden. Nach Schema 5.1 benötigt man dazu die inverse Metrik $g^{\alpha\beta}$, welche sich wegen der Diagonalgestalt von g besonders einfach berechnen läßt. Es gilt:

$$g^{\alpha\beta} = \text{diag}\left(-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right). \quad (5.11)$$

Für die zu ermittelnden Christoffelsymbole gilt nun nach Formel (2.39) und wegen $a, b \neq 0$:

$$\Gamma_{ab}^0 = \frac{1}{2}g^{0c}(\partial_a \underbrace{g_{b0}}_0 + \partial_b \underbrace{g_{a0}}_0 - \partial_0 g_{ab}) = -\frac{1}{2}g^{0c}\partial_0 g_{ab} = 0, \quad (5.12)$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, daß g_{ab} nicht zeitabhängig ist. Folglich muß die extrinsische Krümmung nach :

$$K_{ab} \stackrel{(4.2)}{=} -\Gamma_{ab}^0 N = 0 \quad (5.13)$$

verschwinden (das Ergebnis stimmt mit [Kel05] überein).

5.2.2 Berechnung des gewichteten Dreibeins

Auch bei der Berechnung der Dreibeins ist die Diagonalgestalt von entscheidendem Vorteil. Leider besteht ein durch die Bezeichnungen e_i und e_a hervorgerufener Konflikt bei der expliziten Angabe des Dreibeins. Möge also momentan das Dreibein mit holonomem Index betrachtet werden, dann erhält man als (eine) Lösung:

$$e_r = \sqrt{\frac{r}{r-2M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\phi = r \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\theta = r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

wie man durch nachrechnen von Gleichung (5.1) leicht zeigt. Es bleibt noch anzumerken, daß in dieser Darstellung e_I und e_a gerade übereinstimmen. Die Determinante ist nun durch

$$\det(e_{ai}) = r^2 \sqrt{\frac{r}{r-2M}} \sin \theta \quad (5.15)$$

gegeben. Für das gewichtete Dreibein erhält man deshalb

$$E_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_\phi = \sqrt{\frac{r-2M}{r}} \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_\theta = \sqrt{\frac{r-2M}{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

als Lösung.

5.2.3 Berechnung der Zusammenhangsvariablen und der Krümmung

Nach Schema 5.1 ist erst einmal die duale Basis Θ^i zu notieren. Mit den Dreibein (5.14) erhält man:

$$\Theta^r = \sqrt{\frac{r}{r-2M}} dr \quad \Theta^\phi = r \sin \theta d\phi \quad \Theta^\theta = r d\theta. \quad (5.17)$$

Daraus ergeben sich die 2-Formen $d\Theta^i$. Durch Nachrechnen zeigt sich leicht:

$$\begin{aligned}
d\Theta^r &= 0 \\
d\Theta^\phi &= \sin\theta dr \wedge d\phi + r \cos\theta d\theta \wedge d\phi \\
&= \sqrt{\frac{r-2M}{r}} \frac{1}{r} \Theta^r \wedge \Theta^\phi + \frac{\cos\theta}{r \sin\theta} \Theta^\theta \wedge \Theta^\phi \\
d\Theta^\theta &= dr \wedge d\theta = \sqrt{\frac{r-2M}{r}} \frac{1}{r} \Theta^r \wedge \Theta^\theta .
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Als nächstes bestimmt man über die 1. Cartansche Strukturformel die Komponenten ω_a^{ik} des Spinzusammenhangs. Für die in (5.4) eingeführten Variablen erhält man aus (5.18) mit $r \hat{=} 1$, $\phi \hat{=} 2$ und $\theta \hat{=} 3$

$$A^2 = \sqrt{\frac{r-2M}{r}} \frac{1}{r} \quad B^2 = -\frac{\cos\theta}{r \sin\theta} \quad C^3 = \sqrt{\frac{r-2M}{r}} \frac{1}{r} . \tag{5.19}$$

Der Rest ist gleich 0. Aus den Gleichungen (5.6) und (5.8) erhält man die Funktionen $\Theta\omega_{ak}^i$. Es gilt

$$\Theta\omega_{21}^2 = -\sqrt{\frac{r-2M}{r}} \frac{1}{r} \quad \Theta\omega_{23}^2 = -\sqrt{\frac{r-2M}{r}} \frac{1}{r} \quad \Theta\omega_{31}^3 = -\frac{\cos\theta}{r \sin\theta} , \tag{5.20}$$

d.h. der Spinzusammenhang ergibt sich zu

$$\omega_1^2 = -\sqrt{\frac{r-2M}{r}} \frac{1}{r} \Theta^2 \quad \omega_1^3 = -\sqrt{\frac{r-2M}{r}} \frac{1}{r} \Theta^3 \quad \omega_i^k = -\frac{\cos\theta}{r \sin\theta} \Theta^2 . \tag{5.21}$$

Die Zerlegung dieses Zusammenhangs in der Koordinatenbasis ist deshalb durch

$$\begin{aligned}
\omega_{21}^2 &\hat{=} \omega_\phi^{r\phi} = -\omega_\phi^{\phi r} = -\sqrt{\frac{r-2M}{r}} \sin\theta \\
\omega_{23}^2 &\hat{=} \omega_\phi^{\Theta\phi} = -\omega_\phi^{\phi\Theta} = -\cos\theta \\
\omega_{31}^3 &\hat{=} \omega_\Theta^{r\Theta} = -\omega_\Theta^{\Theta r} = -\sqrt{\frac{r-2M}{r}}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

gegeben. Wegen $K_{ab} = 0$ berechnet man die Zusammenhangsvariablen mit $A_a^j = -\frac{1}{2}\epsilon^j_{ik}\omega_a^{ik}$ zu

$$A_\phi^r = -\cos\theta; \quad A_\phi^\theta = \sqrt{\frac{r-2M}{r}} \sin\theta; \quad A_\theta^\phi = -\sqrt{\frac{r-2M}{r}}, \tag{5.23}$$

wobei die A mit verschwindendem Wert wieder weggelassen wurden. Mit dem gewichteten Dreibein aus (5.16) hat man somit einen Satz von Ashtekarvariablen für die Schwarzschildmetrik bestimmt. Ein Ergebnis, das in dieser Form schon in [CS92] publiziert wurde. Für den Zusammenhang A kann man noch die Krümmung berechnen. Dazu schreibt man A als:

$$A = -\cos\theta d\phi \otimes \epsilon_1 + \sqrt{\frac{r-2M}{r}} \sin\theta d\phi \otimes \epsilon_3 - \sqrt{\frac{r-2M}{r}} d\theta \otimes \epsilon_2 . \tag{5.24}$$

Mit ϵ wurden dabei Basiselemente der $so(3)$ -Lie-Algebra bezeichnet. Im nächsten Schritt benutzt man die bekannte Formel (siehe hierzu [BM],[Nak]):

$$F = dA + A \wedge A . \tag{5.25}$$

Die einzelnen Summanden sind mit (5.24) gegeben durch:

$$\begin{aligned}
dA &= \sin \theta d\theta \wedge d\phi \otimes \epsilon_1 + \frac{M}{r^2} \sqrt{\frac{r}{r-2M}} \sin \theta dr \wedge d\phi \otimes \epsilon_3 + \sqrt{\frac{r-2M}{r}} \cos \theta d\theta \wedge d\phi \otimes \epsilon_3 \\
&\quad - \frac{M}{r^2} \sqrt{\frac{r}{r-2M}} dr \wedge d\theta \otimes \epsilon_2 \\
A \wedge A &= \cos \theta \sqrt{\frac{r-2M}{r}} d\phi \wedge d\theta \otimes (\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_2 \epsilon_3) - \left| \frac{r-2M}{r} \right| \sin \theta d\phi \wedge d\theta \otimes (\epsilon_3 \epsilon_2 - \epsilon_2 \epsilon_3) \\
&= \cos \theta \sqrt{\frac{r-2M}{r}} d\phi \wedge d\theta \otimes \epsilon_3 + \left| \frac{r-2M}{r} \right| \sin \theta d\phi \wedge d\theta \otimes \epsilon_1 .
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Für die Krümmung erhält man:

$$\begin{aligned}
F &= \left(1 - \left| \frac{r-2M}{r} \right| \right) \sin \theta d\theta \wedge d\phi \otimes \epsilon_1 - \frac{M}{r^2} \sqrt{\frac{r}{r-2M}} dr \wedge d\theta \otimes \epsilon_2 \\
&\quad + \frac{M}{r^2} \sqrt{\frac{r}{r-2M}} \sin \theta dr \wedge d\phi \otimes \epsilon_3 .
\end{aligned} \tag{5.27}$$

5.3 Die Kerr-Metrik

In diesem Abschnitt sollen die Ashtekarvariablen für die Kerr-Metrik in Boyer-Lindquist-Koordinaten [Kel05]

$$g = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\Omega}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 \tag{5.28}$$

bestimmt werden. Die dabei auftretenden Variablen sind wie folgt definiert:

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta; \quad \Delta = \Lambda - 2Mr; \quad \Omega = \Lambda \Sigma + 2Ma^2 r \sin^2 \theta; \quad \Lambda = r^2 + a^2 . \tag{5.29}$$

5.3.1 Berechnung der extrinsischen Krümmung

Im Gegensatz zur Schwarzschild-Metrik in der Form (5.10) verschwindet die extrinsische Krümmung der Kerr-Metrik in Boyer-Lindquist-Koordinaten nicht. Bei der Berechnung geht man am besten wieder nach Schema 5.1 vor (konkret wurde für die Berechnung des extrinsischen Krümmung [Kel05] gefolgt). Für die Christoffelsymbole ist deshalb erst einmal $g^{\alpha\beta}$ zu bestimmen. Dazu benötigt man die Inversion der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} g_{00} & g_{03} \\ g_{30} & g_{33} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{03} \\ g^{30} & g^{33} \end{pmatrix} . \tag{5.30}$$

Über

$$\begin{pmatrix} g_{00} & g_{03} \\ g_{30} & g_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} g_{33} & -g_{03} \\ -g_{30} & g_{00} \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

lassen sich die einzelnen Einträge von A^{-1} bestimmen.

Bestimmung von $\det A$

Für die Berechnung von $\det A$ erweist sich die folgende Umformung als nützlich:

$$\Omega(\Sigma - 2Mr) + 4M^2 a^2 r^2 \sin^2 \theta = \Sigma^2 \Delta . \tag{5.32}$$

Dies sieht man über:

$$\begin{aligned}
\Omega(\Sigma - 2Mr) + 4M^2 a^2 r^2 \sin^2 \theta &= (\Lambda \Sigma + 2Ma^2 r \sin^2 \theta)(\Sigma - 2Mr) + 4M^2 a^2 r^2 \sin^2 \theta \\
&= \Lambda \Sigma^2 - 2Mr \Lambda \Sigma + 2Ma^2 r \Sigma \sin^2 \theta \\
&= \Sigma^2 \left(\Lambda - \frac{\Sigma - 2Mr \Lambda}{\Sigma} + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \\
&= \Sigma^2 \frac{\Omega - 2Mr \Lambda}{\Sigma} = \Sigma^2 \Delta,
\end{aligned}$$

womit sich $\det A$ durch

$$\begin{aligned}
\det A &= - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) \frac{\Omega}{\Sigma} \sin^2 \theta - 4M^2 a^2 r^2 \frac{1}{\Sigma^2} \sin^4 \theta \\
&= \frac{1}{\Sigma^2} \left(-(\Sigma - 2Mr) \Sigma \sin^2 \theta - 4M^2 a^2 r^2 \sin^4 \theta \right) \\
&\stackrel{(5.32)}{=} - \frac{\Sigma^2 \Delta}{\Sigma^2} \sin^2 \theta = -\Delta \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{5.33}$$

berechnen läßt.

Berechnung von $g^{\alpha\beta}$

Mit (5.31) erhält man nun

$$\begin{aligned}
g^{00} &= \frac{g_{33}}{\det A} = -\frac{\Omega}{\Sigma} \frac{\sin^2 \theta}{\Delta \sin^2 \theta} = -\frac{\Omega}{\Sigma \Delta} \\
g^{03} &= g^{30} = -\frac{g_{30}}{\det A} = -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} = -\frac{2Mar}{\Sigma \Delta} \\
g^{33} &= \frac{g_{00}}{\det A} = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} = \frac{\Sigma - 2Mr}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta}.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Die übrigen Werte liest man leicht aus der Bestimmungsgleichung $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ ab. Es gilt

$$g^{11} = \frac{\Delta}{\Sigma} \qquad g^{22} = \frac{1}{\Sigma} \tag{5.35}$$

und der Rest ist 0.

Evaluierung der Γ_{ab}^0

Es sei daran erinnert, daß sich die Variablen a und b auf räumliche Indizes beziehen. So ist z.B. der Term $\partial_a g_{0a} = 0$, denn g_{0a} ist nur für $a = 3$ ungleich 0, da aber g_{03} nicht von $\phi \triangleq 3$ abhängt ist $\partial_3 g_{03} = 0$ und somit auch $\partial_a g_{0a}$. Aus diesem Grund sind auch die Christoffelsymbole Γ_{aa}^0 mit identischen unteren räumlichen Indizes gleich 0, wie man über

$$\begin{aligned}
\Gamma_{aa}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\gamma} \left(\partial_a g_{\gamma a} + \partial_a g_{\gamma a} - \partial_\gamma g_{aa} \right) = g^{0\gamma} \partial_a g_{\gamma a} - \frac{1}{2} g^{0\gamma} \partial_\gamma g_{aa} \\
&= g^{00} \partial_a g_{0a} + g^{03} \partial_a g_{3a} - \frac{1}{2} g^{00} \partial_a g_{aa} - \frac{1}{2} g^{03} \partial_3 g_{aa} = 0
\end{aligned} \tag{5.36}$$

sieht, weil alle partiellen Ableitungen verschwinden. Bleiben noch die 3 Christoffelsymbole $\Gamma_{r\theta}^0$, $\Gamma_{r\phi}^0$ und $\Gamma_{\phi\theta}^0$ zu berechnen. Dafür werden die 2 folgenden partiellen Ableitungen separat betrachtet.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\partial_1 g_{03} &= -\partial_r \left(\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) = -2Ma \partial_r \left(\frac{r}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta = -2Ma \left(\frac{1}{\Sigma} - \frac{1}{\Sigma^2} 2r^2 \right) \sin^2 \theta \\ &= -\frac{2Ma \sin^2 \theta}{\Sigma^2} (\Sigma - 2r^2)\end{aligned}\quad (5.37)$$

$$\partial_1 g_{33} = \partial_r \left(\frac{\Omega}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) = \left(\frac{\partial_r \Omega}{\Sigma} - \frac{\Omega}{\Sigma^2} \partial_r \Sigma \right) \sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma^2} (\Sigma \partial_r \Omega - \Omega 2r) . \quad (5.38)$$

Da für die restlichen Christoffelsymbole $a \neq b$ ist gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ab}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\gamma} \left(\partial_a g_{\gamma b} + \partial_b g_{\gamma a} - \partial_\gamma \underbrace{g_{ab}}_0 \right) = \frac{1}{2} g^{00} \left(\partial_a g_{0b} + \partial_b g_{0a} \right) + \frac{1}{2} g^{03} \left(\partial_a g_{3b} + \partial_b g_{3a} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\Omega}{\Sigma \Delta} \left(\partial_a g_{0b} + \partial_b g_{0a} \right) - \frac{Mar}{\Sigma \Delta} \left(\partial_a g_{3b} + \partial_b g_{3a} \right) .\end{aligned}\quad (5.39)$$

Damit erhält man:

$$\Gamma_{12}^0 \hat{=} \Gamma_{r\theta}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\Omega}{\Sigma \Delta} \left(\partial_1 \underbrace{g_{02}}_0 + \partial_2 \underbrace{g_{01}}_0 \right) - \frac{Mar}{\Sigma \Delta} \left(\partial_1 \underbrace{g_{32}}_0 + \partial_2 \underbrace{g_{31}}_0 \right) = 0 \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^0 &\hat{=} \Gamma_{r\phi}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\Omega}{\Sigma \Delta} \left(\partial_1 g_{03} + \partial_3 \underbrace{g_{01}}_0 \right) - \frac{Mar}{\Sigma \Delta} \left(\partial_1 g_{33} + \partial_3 \underbrace{g_{31}}_0 \right) \\ &= \frac{\Omega Ma \sin^2 \theta}{\Sigma^3 \Delta} (\Sigma - 2r^2) - \frac{Mar \sin^2 \theta}{\Sigma^3 \Delta} (\Sigma \partial_r \Omega - 2\Omega r) \\ &= \frac{Ma \sin^2 \theta}{\Delta \Sigma^3} (\Omega \Sigma - 2\Omega r^2 - \Sigma r \partial_r \Omega + 2\Omega r^2) = \frac{Ma \sin^2 \theta}{\Sigma^2 \Delta} (\Omega - r \partial_r \Omega)\end{aligned}\quad (5.41)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{32}^0 &\hat{=} \Gamma_{\phi\theta}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\Omega}{\Sigma \Delta} \left(\partial_2 g_{03} + \partial_3 \underbrace{g_{02}}_0 \right) - \frac{Mar}{\Sigma \Delta} \left(\partial_2 g_{33} + \partial_3 \underbrace{g_{32}}_0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\Sigma \Delta} \left(\partial_\theta \left(\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \right) - \frac{Mar}{\Sigma \Delta} \left(\partial_\theta \left(\frac{\Omega}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \right) \\ &= -\frac{Mar \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta} \partial_\theta \Omega .\end{aligned}\quad (5.42)$$

Berechnung von K_{ab}

Die Shift-Funktionen und die Metrik der Hyperfläche lassen sich leicht aus $g_{\alpha\beta}$ ablesen. Man bekommt daher die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned}g_{ab} &= \text{diag} \left(\frac{\Sigma}{\Delta}, \Sigma, \frac{\Omega}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \Rightarrow g^{ab} = \text{diag} \left(\frac{\Delta}{\Sigma}, \frac{1}{\Sigma}, \frac{\Sigma}{\Omega \sin^2 \theta} \right) \\ N_a &= \text{diag} \left(0, 0, -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} \right)\end{aligned}\quad (5.43)$$

und mit $N^a = g^{ab} N_b$

$$N^a = \text{diag} \left(0, 0, -\frac{2Mar}{\Omega} \right) . \quad (5.44)$$

Daraus berechnet man die Lapse-Funktion.

$$\begin{aligned}N^2 &= N^a N_a - g_{00} = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) + \frac{4M^2 a^2 r^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Omega} \\ &= \frac{\Sigma \Omega - 2Mr \Omega + 4M a^2 r^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Omega} = \frac{\Sigma \Delta}{\Omega}\end{aligned}$$

Die Eichung für N sei hier so gewählt, daß

$$N = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta}{\Omega}} \quad (5.45)$$

gilt. Damit sind alle Variablen die zur Berechnung der extrinsischen Krümmung nach der im Schema angegebenen Formel notwendig sind ermittelt. Man erhält:

$$K_{r\phi} = \frac{(r\partial_r \Omega - \Omega)Ma \sin^2 \theta}{\sqrt{\Sigma^3 \Omega \Delta}} \quad K_{\Theta\phi} = \frac{(\partial_\theta \Omega)Mar \sin^2 \theta}{\sqrt{\Sigma^3 \Omega \Delta}}. \quad (5.46)$$

Die restlichen Komponenten verschwinden.

5.3.2 Berechnung des gewichteten Dreibeins

Die Metrik der Hyperfläche besitzt aufgrund der gewählten Koordinatendarstellung wieder die vorteilhafte Diagonalgestalt, so daß man ein mögliches Dreibein leicht ablesen kann. So generiert das Dreibein

$$e_r = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\theta = \sqrt{\Sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\phi = \sqrt{\frac{\Omega \sin^2 \theta}{\Sigma}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

die Metrik g_{ab} . Das Gewicht dieses Dreibeins (also $\det(e_{ai})$) läßt sich einfach nach der Sarrusregel berechnen. Das gewichtete Dreibein ist deshalb mit

$$E_r = \sqrt{\frac{1}{\Omega \sin^2 \theta}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_\theta = \sqrt{\frac{\Delta}{\Omega \sin^2 \theta}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_\phi = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

anzugeben.

5.3.3 Berechnung der Zusammenhangsvariablen

Man benötigt wieder die duale Basis $\{\Theta^i\}$. Es gilt:

$$\Theta^1 = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}} dr \quad \Theta^2 = \sqrt{\Sigma} d\theta \quad \Theta^3 = \sqrt{\frac{\Omega \sin^2 \theta}{\Sigma}} d\phi, \quad (5.49)$$

so daß die äußeren Ableitungen dieser Formen durch

$$\begin{aligned} d\Theta^1 &= \partial_\theta \left(\sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}} \right) d\theta \wedge dr \\ d\Theta^2 &= \partial_r (\sqrt{\Sigma}) dr \wedge d\theta \\ d\Theta^3 &= \partial_r \left(\sqrt{\frac{\Omega \sin^2 \theta}{\Sigma}} \right) dr \wedge d\phi + \partial_\theta \left(\sqrt{\frac{\Omega \sin^2 \theta}{\Sigma}} \right) d\theta \wedge d\phi \end{aligned} \quad (5.50)$$

anzugeben sind. Das obige Gleichungssystem motiviert die Vereinfachung der darin auftretenden partiellen Ableitungen. Es ergibt sich:

$$\partial_\theta \left(\sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \partial_\theta \left(\frac{\Sigma}{\Delta} \right) = -\frac{1}{\sqrt{\Sigma\Delta}} a^2 \sin \theta \cos \theta \quad (5.51)$$

$$\partial_r(\sqrt{\Sigma}) = \frac{r}{\sqrt{\Sigma}} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \partial_r \left(\sqrt{\frac{\Omega \sin^2 \theta}{\Sigma}} \right) &= \sqrt{\frac{\Sigma}{\Omega \sin^2 \theta}} \frac{1}{2} \partial_r \left(\frac{\Omega \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Omega}} \frac{1}{2} \partial_r \left(\frac{\Omega}{\Sigma} \right) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Sigma}{\Omega}} \left(\frac{\partial_r \Omega}{\Sigma} - \Omega \frac{1}{\Sigma^2} \partial_r \Sigma \right) \sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Sigma}{\Omega}} \frac{\sin \theta}{\Sigma^2} \left(\Sigma \partial_r \Omega - \Omega 2r \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\Sigma \sqrt{\Sigma \Omega}} \left(\Sigma \partial_r \Omega - \Omega 2r \right) \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta \left(\sqrt{\frac{\Omega \sin^2 \theta}{\Sigma}} \right) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Sigma}{\Omega \sin^2 \theta}} \partial_\theta \left(\frac{\Omega \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Sigma}{\Omega \sin^2 \theta}} \partial_\theta \left(\frac{2 \sin \theta \cos \theta \Omega}{\Sigma} + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} \partial_\theta \Omega - \frac{\Omega \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \partial_\theta \Sigma \right) \\ &= \frac{1}{2 \Sigma^2} \sqrt{\frac{\Sigma}{\Omega}} \left(2 \Sigma \Omega \cos \theta + \Sigma (\partial_\theta \Omega) \sin \theta - \Omega (\partial_\theta \Sigma) \sin \theta \right) \\ &= \frac{1}{2 \Sigma \sqrt{\Sigma \Omega}} \left(2 \Sigma \Omega \cos \theta + 2 \Omega a^2 (\sin^2 \theta) \cos \theta + \Sigma (\partial_\theta \Omega) \sin \theta \right) \\ &= \frac{1}{2 \Sigma \sqrt{\Sigma \Omega}} \left(2 \Omega \Lambda \cos \theta + \Sigma (\partial_\theta \Omega) \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Für das Gleichungssystem der äußeren Ableitungen folgt deshalb:

$$\begin{aligned} d\Theta^1 &= -\frac{1}{\sqrt{\Sigma\Delta}} a^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \wedge dr \\ d\Theta^2 &= \frac{r}{\sqrt{\Sigma}} dr \wedge d\theta \\ d\Theta^3 &= \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\Sigma \sqrt{\Sigma \Omega}} \left(\Sigma \partial_r \Omega - \Omega 2r \right) dr \wedge d\phi \\ &\quad + \frac{1}{2 \Sigma \sqrt{\Sigma \Omega}} \left(2 \Omega \Lambda \cos \theta + \Sigma (\partial_\theta \Omega) \sin \theta \right) d\theta \wedge d\phi. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Man braucht von (5.55) wieder die Darstellung in der Basis $\{\Theta^i\}$. Wegen der einfachen Struktur von (5.49) ist dies leicht zu bewerkstelligen. Es ist:

$$\begin{aligned} d\Theta^1 &= \frac{1}{\Sigma \sqrt{\Sigma}} a^2 \sin \theta \cos \theta \Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ d\Theta^2 &= \frac{1}{\Sigma} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ d\Theta^3 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\Sigma \Omega} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \left(\Sigma \partial_r \Omega - 2r \Omega \right) \Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ &\quad + \frac{1}{2 \Sigma \Omega} \frac{1}{\sqrt{\Sigma \sin^2 \theta}} \left(2 \Omega \Lambda \cos \theta + \Sigma (\partial_\theta \Omega) \sin \theta \right) \Theta^2 \wedge \Theta^3. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Hieraus liest man die in (5.4) eingeführten Variablen ab. Man bekommt:

$$\begin{aligned} A^1 &= \frac{1}{\Sigma\sqrt{\Sigma}} a^2 \sin \theta \cos \theta \\ A^2 &= \frac{1}{\Sigma} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \\ B^3 &= \frac{1}{2\Sigma\Omega} \frac{1}{\sqrt{\Sigma \sin^2 \theta}} \left(2\Omega\Lambda \cos \theta + \Sigma(\partial_\theta \Omega) \sin \theta \right) \quad C^3 = \frac{1}{2} \frac{1}{\Sigma\Omega} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \left(\Sigma\partial_r \Omega - 2r\Omega \right). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Die Koeffizienten des Spinzusammenhangs zur $\{\Theta^i\}$ -Basis lassen sich nun durch:

$$\begin{aligned} \Theta\omega_{12}^1 &= -\Theta\omega_{11}^2 = \frac{1}{\Sigma\sqrt{\Sigma}} a^2 \sin \theta \cos \theta \\ \Theta\omega_{21}^2 &= -\Theta\omega_{22}^1 = -\frac{1}{\Sigma} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \\ \Theta\omega_{31}^3 &= -\Theta\omega_{33}^1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Sigma\Omega} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \left(\Sigma\partial_r \Omega - 2r\Omega \right) \\ \Theta\omega_{32}^3 &= -\Theta\omega_{33}^2 = -\frac{1}{2\Sigma\Omega} \frac{1}{\sqrt{\Sigma \sin^2 \theta}} \left(2\Omega\Lambda \cos \theta + \Sigma(\partial_\theta \Omega) \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

angeben, woraus sich der Spinzusammenhang zu

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= \frac{1}{\Sigma\sqrt{\Sigma}} a^2 \sin \theta \cos \theta \Theta^1 + \frac{1}{\Sigma} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \Theta^2 \\ \omega_1^3 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Sigma\Omega} \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}} \left(\Sigma\partial_r \Omega - 2r\Omega \right) \Theta^3 \\ \omega_2^3 &= -\frac{1}{2\Sigma\Omega} \frac{1}{\sqrt{\Sigma \sin^2 \theta}} \left(2\Omega\Lambda \cos \theta + \Sigma(\partial_\theta \Omega) \sin \theta \right) \Theta^3 \end{aligned} \quad (5.59)$$

ergibt. Durch Einsetzen der Gleichungen für die Θ^i s erhält man die Koordinatendarstellung des Spinzusammenhangs:

$$\begin{aligned} \omega_1^{21} &= -\omega_1^{12} = \frac{1}{\Sigma\sqrt{\Delta}} a^2 \sin \theta \cos \theta \\ \omega_2^{21} &= -\omega_2^{12} = \frac{r}{\Sigma} \sqrt{\Delta} \\ \omega_3^{13} &= -\omega_3^{31} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Sigma^2} \sqrt{\frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Omega}} \left(\Sigma\partial_r \Omega - 2\Omega r \right) \\ \omega_3^{23} &= -\omega_3^{32} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Sigma^2 \sqrt{\Omega}} \left(2\Omega\Lambda \cos \theta + \Sigma(\partial_\theta \Omega) \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Bei der Berechnung des Ashtekarzusammenhangs für die Kerr-Lösung muß im Gegensatz zur Schwarzschild-Lösung die extrinsische Krümmung mit berücksichtigt werden, insbesondere sind Ausdrücke $K_i^a = K_{ab}e^{bi}$ zu benutzen. Diese sind nach dieser Gleichung durch

$$\begin{aligned} K_3^1 &= \frac{(r\partial_r \Omega - \Omega)Ma \sin^2 \theta}{\Sigma^2 \sqrt{\Omega}} & K_3^2 &= \frac{(\partial_\theta \Omega)Mar \sin^2 \theta}{\sqrt{\Omega\Delta}\Sigma^2} \\ K_1^3 &= \frac{(r\partial_r \Omega - \Omega)Ma}{\Sigma\sqrt{\Omega^2\Delta}} \sqrt{\sin^2 \theta} & K_2^3 &= \frac{(\partial_\theta \Omega)Mar \sqrt{\sin^2 \theta}}{\Sigma\Omega\sqrt{\Delta}} \end{aligned} \quad (5.61)$$

zu notieren. Um den Ashtekarzusammenhang nach Schema 5.1 zu ermitteln, braucht man noch die Γ_a^i . Diese berechnen sich wie gehabt mit $\Gamma_a^i = -\frac{1}{2}\epsilon^i_{jk}\omega_a^{jk}$. Man erhält

$$\begin{aligned}\Gamma_1^3 &= \frac{1}{\Sigma\sqrt{\Delta}}a^2\sin\theta\cos\theta & \Gamma_2^3 &= -\sqrt{\Delta}\frac{r}{\Sigma} \\ \Gamma_3^2 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\frac{\sin\theta}{\Sigma^2\sqrt{\Omega}}\left(\Sigma\partial_r\Omega - 2r\Omega\right) & \Gamma_3^1 &= -\frac{1}{2\Sigma^2\sqrt{\Omega}}\left(2\Omega\Lambda\cos\theta + \Sigma(\partial_\theta\Omega)\sin\theta\right).\end{aligned}\quad (5.62)$$

Insgesamt ergibt sich deshalb für den Zusammenhang:

$$\begin{aligned}A_3^1 &= -\frac{1}{2\Sigma^2\sqrt{\Omega}}\left(2\Omega\Lambda\cos\theta + \Sigma(\partial_\theta\Omega)\sin\theta\right) + \beta\frac{(r\partial_r\Omega - \Omega)Ma\sin^2\theta}{\Sigma^2\sqrt{\Omega}} \\ A_1^3 &= \frac{1}{\Sigma\sqrt{\Delta}}a^2\sin\theta\cos\theta + \beta\frac{(r\partial_r\Omega - \Omega)Ma}{\Sigma\sqrt{\Omega^2\Delta}}\sqrt{\sin^2\theta} \\ A_3^2 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\frac{\sin\theta}{\Sigma^2\sqrt{\Omega}}\left(\Sigma\partial_r\Omega - 2r\Omega\right) + \beta\frac{(\partial_\theta\Omega)Mar\sin^2\theta}{\sqrt{\Omega\Delta}\Sigma^2} \\ A_2^3 &= -\frac{\sqrt{\Delta}r}{\Sigma} + \beta\frac{(\partial_\theta\Omega)Mar\sqrt{\sin^2\theta}}{\Sigma\Omega\sqrt{\Delta}}.\end{aligned}\quad (5.63)$$

5.4 Die Robertson-Walker-Metrik

Zur Berechnung der Ashtekarvariablen für die Robertson-Walker-Metrik [Olo02] sei diese hier in der Form

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2\right] \quad (5.64)$$

angegeben, womit von der üblichen Form in umgekehrter Signatur abgewichen wird, da die Konventionen der vorangegangenen Abschnitte beibehalten werden sollen. Für die Shift-Funktionen liest man $N_i = 0$ ab, weshalb sich $N = 1$ für die Lapse-Funktion ergibt.

5.4.1 Berechnung der extrinsischen Krümmung

Die entsprechenden Christoffelsymbole sind durch

$$\begin{aligned}\Gamma_{ab}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\gamma}(\partial_a g_{b\gamma} + \partial_b g_{a\gamma} - \partial_\gamma g_{ab}) \\ &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_a g_{b0} + \partial_b g_{a0} - \partial_0 g_{ab}) \\ &= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{ab}\end{aligned}\quad (5.65)$$

gegeben. Bei Nichtverschwinden muss also $a = b$ sein, d.h. für $K_{ab} \neq 0$ gilt:

$$K_{ab} = \frac{\dot{R}}{R}g_{ab}, \quad (5.66)$$

wobei noch verwendet wurde, daß wegen

$$g^{\alpha\beta} = \text{diag}\left(-1, \frac{1-kr^2}{R^2}, \frac{1}{R^2r^2}, \frac{1}{R^2r^2\sin^2\theta}\right) \quad (5.67)$$

$g^{00} = -1$ ist.

5.4.2 Berechnung des gewichteten Dreibeins

Durch Nachrechnen zeigt sich leicht, daß

$$e_1 = e_{1i} = \sqrt{\frac{R^2}{1-kr^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = e_{2i} = Rr \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = e_{3i} = Rr \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

ein mögliches Dreibein ist. Nach Division durch

$$\det(e_{ai}) = \sqrt{\frac{1}{1-kr^2}} R^3 r^2 \sin \theta \quad (5.69)$$

erhält man das zugehörige gewichtete Dreibein.

5.4.3 Berechnung der Zusammenhangsvariablen und der Krümmung

Mit dem Dreibein berechnet sich die duale Basis zu:

$$\Theta^1 = \sqrt{\frac{R^2}{1-kr^2}} dr \quad \Theta^2 = Rr d\theta \quad \Theta^3 = Rr \sin \theta d\phi. \quad (5.70)$$

Die äußere Ableitung ist dann mit

$$\begin{aligned} d\Theta^1 &= 0 \\ d\Theta^2 &= Rdr \wedge d\theta = \frac{\sqrt{1-kr^2}}{Rr} \Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ d\Theta^3 &= R \sin \theta dr \wedge d\phi + Rr \cos \theta d\theta \wedge d\phi \\ &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1-kr^2}{R^2}} \Theta^1 \wedge \Theta^3 + \frac{\cos \theta}{Rr \sin \theta} \Theta^2 \wedge \Theta^3 \end{aligned} \quad (5.71)$$

zu notieren. Hieraus liest man die benötigten Koeffizienten ab. Man erhält:

$$A^2 = \frac{1}{Rr} \sqrt{1-kr^2} \quad B^3 = \frac{\cos \theta}{Rr \sin \theta} \quad C^3 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1-kr^2}{R^2}}. \quad (5.72)$$

Die Koeffizienten des Spinzusammenhangs ergeben sich deshalb zu

$$\Theta \omega_{21}^2 = -\frac{1}{Rr} \sqrt{1-kr^2} \quad \Theta \omega_{31}^3 = -\frac{1}{r} \sqrt{\frac{1-kr^2}{R^2}} \quad \Theta \omega_{32}^3 = -\frac{\cos \theta}{Rr \sin \theta}, \quad (5.73)$$

so daß man für diesen

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{Rr} \sqrt{1-kr^2} \Theta^2 \quad \omega_1^3 = -\frac{1}{r} \sqrt{\frac{1-kr^2}{R^2}} \Theta^3 \quad \omega_2^3 = -\frac{\cos \theta}{Rr \sin \theta} \Theta^3 \quad (5.74)$$

in der Theta-Basis erhält. Hieraus lassen sich wieder die Spinkoeffizienten in der Koordinaten-Basis zu

$$\omega_{21}^2 = -\sqrt{1-kr^2} \quad \omega_{31}^3 = -\sqrt{1-kr^2} \sin \theta \quad \omega_{32}^3 = -\cos \theta \quad (5.75)$$

ablesen. Im nächsten Schritt berechnet man die Γ_a^i und erhält:

$$\Gamma_3^1 = \cos \theta \quad \Gamma_3^2 = -\sqrt{1-kr^2} \sin \theta \quad \Gamma_2^3 = \sqrt{1-kr^2} \quad (5.76)$$

Um schließlich die Komponenten des Ashtekarzusammenhangs auszudrücken benötigt man noch die Komponenten K_a^i der extrinsischen Krümmung mit einem internen Index. Hierzu sei an die Formel $K_a^i = e^{bi} K_{ab}$ erinnert. Man bekommt

$$K_a^i = \frac{\dot{R}}{R} e_a^i \quad (5.77)$$

beziehungsweise

$$K_a^i = \text{diag}\left(-\frac{\dot{R}}{\sqrt{1-kr^2}}, -\dot{R}r, -\dot{R}r \sin \theta\right) \quad (5.78)$$

in expliziter Form als Lösung, so daß sich für den Ashtekarzusammenhang

$$\begin{aligned} A_1^1 &= -\beta \frac{\dot{R}}{\sqrt{1-kr^2}} & A_2^2 &= -\beta \dot{R}r & A_3^3 &= -\beta r \dot{R} \sin \theta \\ A_2^3 &= \sqrt{1-kr^2} & A_3^2 &= -\sqrt{1-kr^2} \sin \theta & A_3^1 &= \cos \theta \end{aligned} \quad (5.79)$$

ergibt. Für die Krümmung schreibt man den Zusammenhang wieder als

$$\begin{aligned} A &= -\beta \frac{\dot{R}}{\sqrt{1-kr^2}} dr \otimes \epsilon_1 - \beta \dot{R}r d\theta \otimes \epsilon_2 - \beta \dot{R}r \sin \theta d\phi \otimes \epsilon_3 \\ &\quad + \sqrt{1-kr^2} d\theta \otimes \epsilon_3 - \sqrt{1-kr^2} \sin \theta d\phi \otimes \epsilon_2 + \cos \theta d\phi \otimes \epsilon_1 \end{aligned} \quad (5.80)$$

und berechnet

$$\begin{aligned} dA &= -\beta \dot{R}dr \wedge d\theta \otimes \epsilon_2 - \beta \dot{R} \sin \theta dr \wedge d\phi \otimes \epsilon_3 - \beta \dot{R}r \cos \theta d\theta \wedge d\phi \otimes \epsilon_3 \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{1-kr^2}} kr dr \wedge d\theta \otimes \epsilon_3 - \frac{1}{\sqrt{1-kr^2}} kr \sin \theta dr \wedge d\phi \otimes \epsilon_2 \\ &\quad - \sqrt{1-kr^2} \cos \theta d\theta \wedge d\phi \otimes \epsilon_2 - \sin \theta d\theta \wedge d\phi \otimes \epsilon_1 \\ A \wedge A &= \frac{\beta^2 \dot{R}^2 r}{\sqrt{1-kr^2}} dr \wedge d\theta \otimes [\epsilon_1, \epsilon_2] + \frac{\beta^2 \dot{R}^2 r \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}} dr \wedge d\phi \otimes [\epsilon_1, \epsilon_3] - \beta \dot{R}dr \wedge d\theta \otimes [\epsilon_1, \epsilon_2] \\ &\quad + \beta^2 \dot{R}^2 r^2 \sin \theta d\theta \wedge d\phi \otimes [\epsilon_2, \epsilon_3] - \beta \dot{R}r \cos \theta d\theta \wedge d\phi \otimes [\epsilon_2, \epsilon_1] + \beta \dot{R} \sin \theta \otimes [\epsilon_1, \epsilon_2] \\ &\quad - |1-kr^2| \sin \theta d\theta \wedge d\phi \otimes [\epsilon_3, \epsilon_2] + \sqrt{1-kr^2} \cos \theta d\theta \wedge d\phi \otimes [\epsilon_3, \epsilon_1], \end{aligned} \quad (5.82)$$

womit sich schließlich

$$\begin{aligned} F &= \frac{r}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\beta^2 \dot{R} + k \right) dr \wedge d\theta \otimes \epsilon_3 + \left(\beta^2 \dot{R}^2 - k \right) \frac{r \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}} dr \wedge d\phi \otimes \epsilon_2 \\ &\quad + (\beta^2 \dot{R}^2 r^2 + |1-kr^2| - 1) \sin \theta d\theta \wedge d\phi \otimes \epsilon_1 \end{aligned} \quad (5.83)$$

ergibt.

5.5 Die Ashtekarvariablen für die linearisierte Theorie

In der linearisierten Theorie setzt man eine Metrik an, die nur wenig von der des flachen Raumes abweicht:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad h_{\alpha\beta} \ll 1, \quad (5.84)$$

d.h. Terme, welche nichtlinear in der Ordnung h oder den Ableitungen von h sind, werden gegenüber linearen Termen in h vernachlässigt (siehe [Ste88]).

5.5.1 Berechnung der extrinsischen Krümmung

Zur Berechnung der extrinsischen Krümmung benötigt man die inverse Metrik $g^{\alpha\beta}$. Dazu setzen wir $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \bar{h}^{\alpha\beta}$ an, wobei $\bar{h}^{\alpha\beta}$ noch näher bestimmt werden muß. Es folgt:

$$\delta_\alpha^\gamma = g^{\gamma\beta} g_{\alpha\beta} = (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\eta^{\gamma\beta} - \bar{h}^{\gamma\beta}) = \delta_\alpha^\gamma - \eta_{\alpha\beta} \bar{h}^{\gamma\beta} + h_{\alpha\beta} \eta^{\gamma\beta} - h_{\alpha\beta} \bar{h}^{\gamma\beta}, \quad (5.85)$$

d.h. die letzten 3 Terme müssen verschwinden. Nehmen wir mal für einen Moment an wir hätten $\bar{h}$ so gewählt, daß der letzte Term von quadratischer Ordnung wäre, dann müßten nur noch die beiden gemischten Terme verschwinden. Es ist jetzt

$$\begin{aligned}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}^{\gamma\beta} &= h_{\alpha\beta}\eta^{\gamma\beta} \quad | \cdot \eta^{\alpha\delta} \\ \Leftrightarrow \bar{h}^{\gamma\delta} &= \eta^{\alpha\delta}h_{\alpha\beta}\eta^{\gamma\beta}\end{aligned}\quad (5.86)$$

zu schlußfolgern. Wie man feststellt, ist $\bar{h}$ von der Ordnung h , so daß unsere Bedingung, der letzte Term in (5.85) sei von quadratischer Ordnung erfüllt ist. Im nächsten Schritt ist es möglich, die Christoffelsymbole der Form Γ_{ab}^0 zu bestimmen. Man erhält:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ab}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\gamma}\left(\partial_a g_{\gamma b} + \partial_b g_{\gamma a} - \partial_\gamma g_{ab}\right) = \frac{1}{2}g^{a\gamma}\left(\partial_a h_{\gamma b} + \partial_b h_{\gamma a} - \partial_\gamma h_{ab}\right) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{0\gamma}\left(\partial_a h_{\gamma b} + \partial_b h_{\gamma a} - \partial_\gamma h_{ab}\right) + \mathcal{O}(h^2) \\ &\approx -\frac{1}{2}\left(\partial_a h_{0b} + \partial_b h_{0a} - \partial_0 h_{ab}\right).\end{aligned}\quad (5.87)$$

Für die räumliche Metrik gilt $q_{ab} = \delta_{ab} + h_{ab}$, so daß man $q^{ab} = \delta^{ab} - \delta^{ac}h_{cd}\delta^{db}$ folgern kann. Da nun N_a wegen $N_a = g_{0a} = h_{0a}$ von der Ordnung h ist, ist $N^a N_a$ mit $N^a = q^{ab}N_b$ von der Ordnung h^2 . Für die Berechnung der Lapse-Funktion gilt deshalb:

$$\begin{aligned}g_{00} &= -N^2 + N^a N_a \approx -N^2 \\ \Rightarrow N &= \sqrt{1 - h_{00}} \approx 1 - \frac{1}{2}h_{00}.\end{aligned}\quad (5.88)$$

Die extrinsische Krümmung läßt sich somit durch:

$$K_{ab} = N\Gamma_{ab}^0 = \left(1 - \frac{1}{2}h_{00}\right)\Gamma_{ab}^0 = \Gamma_{ab}^0 + \mathcal{O}(h^2) \approx \Gamma_{ab}^0 \quad (5.89)$$

angeben.

5.5.2 Berechnung des inversen Dreibeins

Es ist $\eta_{ik} = \delta_{ik}$. Für das Dreibein muß bekanntermaßen

$$e_{ai}e_b^i = e_{ai}e_{bi} = g_{ab} \quad (5.90)$$

gelten. Deshalb setzt man $e_{ai} = \delta_i^b(\delta_{ab} + \frac{1}{2}h_{ab})$ an (das Dreibein ist natürlich nicht eindeutig festgelegt) und zeigt zum Beweis (5.90).

$$\begin{aligned}e_{ai}e_b^i &= \delta_i^c\left(\delta_{ac} + \frac{1}{2}h_{ac}\right)\delta^{di}\left(\delta_{bd} + \frac{1}{2}h_{bd}\right) = \delta^{cd}\left(\delta_{ac} + \frac{1}{2}h_{ac}\right)\left(\delta_{bd} + \frac{1}{2}h_{bd}\right) \\ &= \delta^{cd}\left(\delta_{ac}\delta_{bd} + \frac{1}{2}h_{ac}\delta_{bd} + \frac{1}{2}\delta_{ac}h_{bd} + \frac{1}{4}h_{ac}h_{bd}\right) \\ &= \delta_{ab} + \frac{1}{2}h_{ab} + \frac{1}{2}h_{ba} + \mathcal{O}(h^2) = \delta_{ab} + h_{ab} = g_{ab}.\end{aligned}\quad (5.91)$$

Das inverse Dreibein ist durch $e^{ci} = (\delta_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab})\delta^{ac}\delta^{bi}$ gegeben, wie man durch Nachrechnen leicht zeigt. Des weiteren ist die Determinante für kleine X durch $\det(1+X) \approx 1 + \text{tr}(X)$ zu nähern, so daß man insgesamt für das gewichtete Dreibein

$$E_i^a = \left(\delta_i^a - \frac{1}{2}\delta^{ba}h_{bc}\delta_i^c\right)\left(1 + \text{tr}(h_{ab})\right) \quad (5.92)$$

erhält. *Achtung* im folgenden werden wir mit $\text{tr}h$ die Spur von h ohne die h_{00} -Komponente bezeichnen.

5.5.3 Berechnung der Zusammenhangsvariablen und der Krümmung

Zur Bestimmung der ω soll hier erstmals die Formel

$$\omega_a^{ik} = \underbrace{-e^{bk}\partial_a e_b^i}_{\textcircled{1}} + e^{bk} \underbrace{\underbrace{\Gamma_{ab}^c}_{\textcircled{2}} e_c^i}_{\textcircled{3}} \quad (5.93)$$

angewendet werden, wobei die Vorgehensweise mit den entsprechenden Zahlen in der obigen Gleichung markiert worden ist. Es gilt:

①

$$\begin{aligned} -e^{bk}\partial_a e_b^i &= -\left(\delta_{a'b'} - \frac{1}{2}h_{a'b'}\right)\delta^{a'b}\delta^{b'k}\partial_a\left(\delta_{be} + \frac{1}{2}h_{be}\right) \\ &= -\left(\delta_{a'b'} - \frac{1}{2}h_{ab'}\right)\delta^{a'b}\delta^{b'k}\delta^{ei}\frac{1}{2}\partial_a h_{be} = -\delta_{a'b'}\delta^{a'b}\delta^{b'k}\delta^{ei}\frac{1}{2}\partial_a h_{be} + \mathcal{O}(h^2) \\ &\approx -\frac{1}{2}\delta^{bk}\delta^{ei}\partial_a h_{be} \end{aligned} \quad (5.94)$$

②

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^c &= \frac{1}{2}g^{c\alpha}\left(\partial_a g_{\alpha b} + \partial_b g_{\alpha a} - \partial_\alpha g_{ab}\right) = \frac{1}{2}g^{c\alpha}\left(\partial_a h_{\alpha b} + \partial_b h_{\alpha a} - \partial_\alpha h_{ab}\right) \\ &\approx \frac{1}{2}\delta^{c\alpha}\left(\partial_a h_{\alpha b} + \partial_b h_{\alpha a} - \partial_\alpha h_{ab}\right) \end{aligned} \quad (5.95)$$

③

$$\begin{aligned} e^{bk}\Gamma_{ab}^c e_c^i &= \left(\delta_{a'b'} - \frac{1}{2}h_{a'b'}\right)\delta^{a'b}\delta^{b'k}\frac{1}{2}\left(\partial_a h_{\alpha b} + \partial_b h_{\alpha a} - \partial_\alpha h_{ab}\right)\delta^{c\alpha}\delta^{ei}\left(\delta_{ce} + \frac{1}{2}h_{ce}\right) \\ &= \delta_{a'b'}\delta^{a'b}\delta^{b'k}\frac{1}{2}\left(\partial_a h_{\alpha b} + \partial_b h_{\alpha a} - \partial_\alpha h_{ab}\right)\delta^{c\alpha}\delta^{ei}\delta_{ce} + \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(h^3) \\ &\approx \frac{1}{2}\delta^{bk}\delta^{di}\left(\partial_a h_{db} + \partial_b h_{da} - \partial_d h_{ab}\right). \end{aligned} \quad (5.96)$$

Insgesamt ergibt sich damit ω zu:

$$\begin{aligned} \omega_a^{ik} &= -\frac{1}{2}\delta^{bk}\delta^{di}\partial_a h_{bd} + \frac{1}{2}\delta^{bk}\delta^{di}\left(\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{da} - \partial_d h_{ab}\right) \\ &= \frac{1}{2}\delta^{bk}\delta^{di}\left(\partial_b h_{da} - \partial_d h_{ab}\right). \end{aligned} \quad (5.97)$$

Des weiteren lassen sich nun die Zusammenhangskomponenten der Form Γ_a^i berechnen. Man erhält:

$$\begin{aligned} \Gamma_a^j &= -\frac{1}{2}\epsilon^j_{ik}\omega_a^{ik} = -\frac{1}{4}\epsilon^j_{ik}\delta^{bk}\delta^{di}\left(\partial_b h_{da} - \partial_d h_{ab}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\epsilon^{jdb}\left(\partial_b h_{da} - \partial_d h_{ab}\right) = \frac{1}{2}\epsilon^{jbd}\partial_b h_{da}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Zur Angabe des Ashtekarzusammenhangs benötigen wir abschließend noch die extrinsische Krümmung in der K_a^i -Darstellung. Da K_{ab} von der Ordnung h ist, gilt

$$K_a^i = e^{bi}K_{ab} = \delta^{bi}K_{ab} = \delta^{bi}\Gamma_{ab}^0, \quad (5.99)$$

so daß der Ashtekarzusammenhang durch

$$\begin{aligned} A &= A_a^i dx^a \otimes \epsilon_i \\ &= \left(\frac{1}{2} \epsilon^{ibd} \partial_b h_{da} - \frac{\beta}{2} \left(\partial_a h_{0b} + \partial_b h_{0a} - \partial_0 h_{ab} \right) \delta^{bi} \right) dx^a \otimes \epsilon_i \end{aligned} \quad (5.100)$$

gegeben ist. Wir berechnen die Krümmung des Zusammenhangs. dA ist durch:

$$\begin{aligned} dA &= \left(\frac{1}{2} \epsilon^{ibd} \partial_c \partial_b h_{da} - \frac{\beta}{2} \left(\partial_c \partial_a h_{0b} + \partial_c \partial_b h_{0a} - \partial_c \partial_0 h_{ab} \right) \delta^{bi} \right) dx^c \wedge dx^a \otimes \epsilon_i \\ &= \left(\frac{1}{2} \epsilon^{ibd} \partial_c \partial_b h_{da} - \frac{\beta}{2} \left(\partial_c \partial_b h_{0a} - \partial_c \partial_0 h_{ab} \right) \delta^{bi} \right) dx^c \wedge dx^a \otimes \epsilon_i \end{aligned} \quad (5.101)$$

gegeben und von der Ordnung h . Da A von der Ordnung h ist, muß $A \wedge A \sim \mathcal{O}(h^2)$ sein, weshalb $F = dA$ gilt. Für die Komponenten von F erhält man:

$$F_{ca}^i = \frac{1}{2} \left(\epsilon^{ibd} \partial_b \partial_{[c} h_{a]d} - \beta \left(\partial_b \partial_{[c} h_{a]0} - \partial_0 \partial_{[c} h_{a]b} \right) \delta^{bi} \right). \quad (5.102)$$

5.5.4 Berechnung der Zwangsbedingungen für die linearisierte Theorie

Es liegt die Vermutung nahe, daß die eingebrachte Näherungsmethode für die Metrik eine Vereinfachung der Zwangsbedingungen zur Folge hat. Aus diesem Grund sollen hier die Zwangsbedingungen mit den Lösungen aus dem vorangegangenen Kapitel berechnet werden.

Berechnung des Gauß-Constraints

Als erster Schritt soll der Gauß-Constraint berechnet werden. Dieser hat die Form

$$G_j = \underbrace{\partial_c {}^{(\beta)} E_j^c}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\epsilon_{jlk} {}^{(\beta)} A_c^l {}^{(\beta)} E^{ck}}_{\textcircled{2}}, \quad (5.103)$$

wobei in der obigen Formel wieder die Vorgehensweise bei der Berechnung der einzelnen Terme markiert worden ist. Man erhält:

①

$$\begin{aligned} \partial_c {}^{(\beta)} E_j^c &= \frac{1}{\beta} \partial_c \left(\delta_j^c - \frac{1}{2} \delta^{ac} h_{ba} \delta_j^b + \delta_j^c \text{tr} h - \frac{1}{2} \delta^{bc} h_{ba} \delta_j^a \text{tr} h \right) \\ &\approx \frac{1}{\beta} \left(\delta_j^c \partial_c (\text{tr} h) - \frac{1}{2} \delta^{ac} (\partial_c h_{ba}) \delta_j^b \right) \sim \mathcal{O}(h) \end{aligned} \quad (5.104)$$

②

$$\begin{aligned} {}^{(\beta)} A_c^l {}^{(\beta)} E^{ck} &\approx \frac{1}{\beta} {}^{(\beta)} A_c^l \delta^{ck} \\ \Rightarrow \epsilon_{jlk} {}^{(\beta)} A_c^l {}^{(\beta)} E^{ck} &\approx \frac{1}{\beta} \epsilon_{jl}^c {}^{(\beta)} A_c^l = \frac{1}{2\beta} \epsilon^{lbd} \epsilon_{jl}^c \partial_b h_{dc} - \frac{1}{2} \epsilon_{jl}^c \delta^{lb} \left(\partial_c h_{0b} + \partial_b h_{0c} - \partial_0 h_{bc} \right) \\ &= -\frac{1}{2\beta} \epsilon^{lbd} \epsilon_{lj}^c \partial_b h_{dc} = -\frac{1}{2\beta} \left(\delta_j^b \delta^{dc} - \delta^{bc} \delta_j^d \right) \partial_b h_{dc} \\ &= -\frac{1}{2\beta} \left(\delta_j^b \partial_b \text{tr}(h) - \delta^{bc} \partial_b h_{dc} \delta_j^d \right). \end{aligned} \quad (5.105)$$

Insgesamt erhält man für den Gauß-Constraint:

$$G_j = \frac{1}{2\beta} \delta_j^b \partial_b \text{tr} h. \quad (5.106)$$

Berechnung des Diffeomorphismen-Constraints

Im zweiten Schritt betrachten wir den Diffeomorphismen-Constraint. Da F von der Ordnung h ist, ist

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_a &= {}^{(\beta)}F_{ab}^j {}^{(\beta)}E_j^b \approx {}^{(\beta)}F_{ab}^j \delta_j^b \frac{1}{\beta} \\ &= \frac{1}{2\beta} \delta_j^b \left(\epsilon^{jcd} \partial_c \partial_{[a} h_{b]d} - \beta (+\partial_c \partial_{[a} h_{b]0} - \partial_0 \partial_{[a} h_{b]c}) \delta^{cj} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \delta^{bc} \left(\partial_c \partial_{[a} h_{b]0} - \partial_0 \partial_{[a} h_{b]c} \right).\end{aligned}\quad (5.107)$$

Berechnung des Hamilton-Constraints

Bevor wir den Hamilton-Constraint berechnen soll nochmal an dessen Form erinnert werden. Es gilt:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\underbrace{\beta^2 {}^{(\beta)}F_{ab}^j \underbrace{\epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl}}_{\textcircled{1}}}_{\textcircled{2}} + \underbrace{(1 + \beta^2) \left({}^{(\beta)}E_{[i}^b {}^{(\beta)}E_{h]}^c {}^{(\beta)}K_b^h {}^{(\beta)}K_c^i \right)}_{\textcircled{3}} \right). \quad (5.108)$$

Wir bemerken, daß in $\textcircled{3}$ die extrinsische Krümmung auftaucht. Diese ist von der Ordnung h , weshalb $\textcircled{3}$ mindestens von der Ordnung h^2 sein muß. Des weiteren zeigt eine Berechnung von Term $\textcircled{1}$, daß dieser Terme der Ordnung 1 beinhaltet. F ist von der Ordnung h und der gesamte Term $\textcircled{2}$ somit ebenfalls von h -ter Ordnung. Der Term $\textcircled{3}$ kann also gegenüber Term $\textcircled{2}$ vernachlässigt werden. Wir untermauern die eben getätigten Aussagen durch die konkrete Berechnung von $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$. Für $\textcircled{1}$ erhält man

$$\begin{aligned}\epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}E^{ak} E^{bl} &= \frac{1}{\beta^2} \epsilon_{jkl} \left(1 + \text{tr} h \right)^2 \left(\delta^{ak} - \frac{1}{2} \delta^{ac} h_{cd} \delta^{dk} \right) \left(\delta^{bl} - \frac{1}{2} \delta^{be} h_{ef} \delta^{fl} \right) \\ &\approx \frac{1}{\beta^2} \epsilon_{jkl} \left(1 + 2\text{tr} h \right) \left(\delta^{ak} \delta^{bl} - \frac{1}{2} \delta^{bl} \delta^{ac} h_{cd} \delta^{dk} - \frac{1}{2} \delta^{ak} \delta^{be} h_{ef} \delta^{fl} \right)\end{aligned}\quad (5.109)$$

und schließlich für $\textcircled{2}$

$$\beta^2 \underbrace{{}^{(\beta)}F_{ab}^j \epsilon_{jkl} {}^{(\beta)}E^{ak} {}^{(\beta)}E^{bl}}_{\sim \mathcal{O}(h)} \approx {}^{(\beta)}F_{ab}^j \epsilon_j^{ab}. \quad (5.110)$$

Vereinfacht man 5.110 weiter, so ergibt sich

$$\begin{aligned}{}^{(\beta)}F_{ab}^j \epsilon_j^{ab} &= {}^{(\beta)}F_{ca}^j \epsilon_j^{ca} = \epsilon_i^{ca} \frac{1}{2} \left(\epsilon^{ibd} \partial_b \partial_{[c} h_{a]d} - \beta \left(\partial_b \partial_{[c} h_{a]0} - \partial_0 \partial_{[c} h_{a]b} \right) \delta^{bi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_i^{ca} \epsilon^{ibd} \partial_b \partial_{[c} h_{a]d} = \frac{1}{2} \left(\delta^{cb} \delta^{ad} - \delta^{cd} \delta^{ab} \right) \left(\partial_b \partial_c h_{ad} - \partial_b \partial_a h_{cd} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta^{cb} \partial_b \partial_c \text{tr} h - \delta^{cd} \delta^{ab} \partial_b \partial_c h_{ad} - \delta^{bc} \delta^{ad} \partial_b \partial_a h_{cd} + \delta^{ab} \partial_a \partial_b \text{tr} h \right) \\ &= \delta^{ab} \partial_a \partial_b \text{tr} h - \delta^{cd} \delta^{ab} \partial_b \partial_c h_{ad}.\end{aligned}\quad (5.111)$$

Insgesamt ist der Hamilton-Constraints also mit

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{\sqrt{q}} \delta^{cd} \delta^{ab} \partial_b \partial_c h_{ad} \quad (5.112)$$

anzugeben, wobei der erste Term in (5.111) wegen seiner Abhängigkeit zum Gauss-Constraint weggelassen wurde. Die genäherten Constraints finden sich in der entsprechenden Form unter anderen in [ARS91].

5.5.5 Die Ashtekarvariablen für Gravitationswellen

Nach [Ste88] gilt: Gravitationswellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Sie sind transversal und besitzen zwei Freiheitsgrade der Polarisierung. In geeigneten Koordinaten haben sie die Metrik (siehe [Ste88]; $c = 1$):

$$ds^2 = (1 + f_{xx})dx^2 + 2f_{xy}dxdy + (1 - f_{xx})dy^2 + dz^2 - dt^2 \quad (5.113)$$

mit

$$f_{xx} = a_{xx} \cos(\omega z - \omega t + \phi), \quad f_{xy} = a_{xy} \cos(\omega z - \omega t + \psi) \quad . \quad (5.114)$$

Mit den Formeln (5.100) und (5.92) lassen sich die zugehörigen Ashtekarvariablen berechnen. Als Ergebnis erhält man mit $\text{tr}(h_{ab}) = 0$

$$\begin{aligned} E = E_t^a \partial_a \otimes \epsilon^i &= \left(1 - \frac{1}{2}f_{xx}\right) \partial_x \otimes \epsilon^1 + \frac{1}{2}f_{xy} \partial_y \otimes \epsilon^2 + \frac{1}{2}f_{xy} \partial_x \otimes \epsilon^2 + \\ &\quad \left(1 + \frac{1}{2}f_{xx}\right) \partial_y \otimes \epsilon^2 + \partial_z \otimes \epsilon^3 \end{aligned} \quad (5.115)$$

für das gewichtete Dreibein und

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left(g_{yx} - \beta g_{xx} \right) dx \otimes \epsilon_1 - \frac{1}{2} \left(g_{xy} - \beta g_{xx} \right) dy \otimes \epsilon_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(g_{xx} + \beta g_{xy} \right) dy \otimes \epsilon_1 + \frac{1}{2} \left(g_{xx} + \beta g_{xy} \right) dx \otimes \epsilon_2, \end{aligned} \quad (5.116)$$

wobei

$$g_{xx} := a_{xx} \omega \sin(\omega z - \omega t + \phi) = \partial_t f_{xx} \quad (5.117)$$

$$g_{yy} := a_{xy} \omega \sin(\omega z - \omega t + \psi) = \partial_t f_{xy} \quad (5.118)$$

gesetzt wurde.

Literaturverzeichnis

- [ABCK98] ASHTEKAR, A., J. BAEZ, A. CORICHI und KIRILL KRASNOV: *Quantum geometry and black hole entropy*. Phys. Rev. Lett., 80:904–907, 1998.
- [ABK00] ASHTEKAR, A., JOHN C. BAEZ und KIRILL KRASNOV: *Quantum geometry of isolated horizons and black hole entropy*. Adv. Theor. Math. Phys., 4:1–94, 2000.
- [ADM62] ARNOWITT, R., S. DESER und C. W. MISNER: *The dynamics of general relativity*. 1962.
- [ARS91] ASHTEKAR, ABHAY, CARLO ROVELLI und LEE SMOLIN: *Gravitons and loops*. Phys. Rev., D44:1740–1755, 1991.
- [Ash] ASHTEKAR, A.: *Lectures on nonperturbative canonical gravity*. Singapore, Singapore: World Scientific (1991) 334 p. (Advanced series in astrophysics and cosmology, 6).
- [Ash86] ASHTEKAR, A.: *New Variables for Classical and Quantum Gravity*. Phys. Rev. Lett., 57:2244–2247, 1986.
- [Ash87] ASHTEKAR, A.: *New Hamiltonian formulation of general relativity*. Phys. Rev. D, 36:1587–1602, September 1987.
- [Bar95a] BARBERO, J. FERNANDO: *Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space times*. Phys. Rev., D51:5507–5510, 1995.
- [Bar95b] BARBERO, J. FERNANDO: *Reality conditions and Ashtekar variables: A Different perspective*. Phys. Rev., D51:5498–5506, 1995.
- [BM] BAEZ, J. and J. P. MUNIAIN: *Gauge fields, knots and gravity*. Singapore, Singapore: World Scientific (1994) 465 p. (Series on knots and everything, 4).
- [CLM03] CASTRILLÓN LÓPEZ, MARCO and JERROLD E. MARSDEN: *Some remarks on Lagrangian and Poisson reduction for field theories*. J. Geom. Phys., 48(1):52–83, 2003.
- [CS92] CHANG, LAY-NAM and CHO-PIN SOO: *Einstein manifolds in ashtekar variables: Explicit examples*. 1992.
- [Dew67] DEWITT, B. S.: *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*. Physical Review, 160:1113–1148, August 1967.
- [Dir58] DIRAC, P. A. M.: *The Theory of Gravitation in Hamiltonian Form*. Royal Society of London Proceedings Series A, 246:333–343, August 1958.
- [DL04] DOMAGALA, MARCIN and JERZY LEWANDOWSKI: *Black hole entropy from quantum geometry*. Classical and Quantum Gravity, 21:5233, 2004.
- [Dö00] DÖRING, ANDREAS: *Kinematik diffeomorphismeninvarianter quantisierter Eichtheorien*. 2000. Diplomarbeit.

- [Ein16] EINSTEIN, A.: *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 688–696., Seiten 688–696, 1916.
- [FK03] FISCHER, HELMUT und HELMUT KAUL: *Mathematik für Physiker*, Band 3. Teubner, 2003.
- [Fle01] FLEISCHHACK, CHRISTIAN: *Mathematische und physikalische Aspekte verallgemeinerter Eichfeldtheorien im Ashtekarprogramm*. 2001. Dissertation.
- [Giu93] GIULINI, DOMENICO: *Ashtekar variables in classical general relativity*. 1993.
- [GKL] GIULINI, D., C. KIEFER und C. LÄMMERZAHN: *Quantum gravity: From theory to experimental search*. Berlin, Germany: Springer (2003) 400 p.
- [GMS] GIACHETTA, G., L. MANGIAROTTI und G. SARDANASHVILY: *New Lagrangian and Hamiltonian methods in field theory*. Singapore: World Scientific.
- [Hat00] HATCHER, ALLEN: *Vector Bundles and K-Theory*. 2000.
- [Haw75] HAWKING, S. W.: *Particle creation by black holes*. Commun. Math. Phys., 43:199–220, 1975.
- [Heu00] HEUSER, HARRO: *Lehrbuch der Analysis*, Band 2. Teubner, 11 Auflage, 2000.
- [HT] HENNEAUX, M. und C. TEITELBOIM: *Quantization of gauge systems*. Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 520 p.
- [Imm97] IMMIRZI, G.: *Letter to the Editor: Real and complex connections for canonical gravity*. Classical and Quantum Gravity, 14:L177–L181, Oktober 1997.
- [Jä92] JÄNISCH, KLAUS: *Vektoranalysis*. Springer, 4 Auflage, 1992.
- [Kel05] KELLY, BERNARD: *Exact Solutions in the 3+1 Split*. 2005.
- [Kra98] KRASNOV, KIRILL V.: *On statistical mechanics of gravitational systems*. Gen. Rel. Grav., 30:53–68, 1998.
- [KS00] KOURANBAEVA, SHINAR und STEVE SHKOLLER: *A variational approach to second-order multisymplectic field theory*. J. Geom. Phys., 35:333–366, 2000.
- [Mal96] MALDACENA, JUAN MARTIN: *Black holes in string theory*. 1996.
- [Mei04] MEISSNER, KRZYSZTOF A: *Black hole entropy in Loop Quantum Gravity*. Classical and Quantum Gravity, 21:5245, 2004.
- [MTW73] MISNER, CHARLES W., KIP S. THORNE, and JOHN ARCHIBALD WHEELER: *Gravitation*. W. H. Freeman and Co., 1973.
- [Nak] NAKAHARA, M.: *Geometry, topology and physics*. Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics).
- [Nic96] NICOLAESCU, LIVIU I.: *Lectures on the geometry of manifolds*. Singapore: World Scientific. xvii, 481 p. , 1996.
- [NM93] NICOLAI, H. and H. J. MATSCHULL: *Aspects of canonical gravity and supergravity*. J. Geom. Phys., 11:15–62, 1993.
- [Nor01] NORGAARD, ERIK: *Vector fields on the sphere*. 2001. Master Thesis.
- [Olo02] OLOFF, R.: *Geometrie der Raumzeit*. Vieweg Verlag, 2 Auflage, 2002.

- [Pel94] PELDAN, PETER: *Actions for gravity, with generalizations: A Review*. Class. Quant. Grav., 11:1087–1132, 1994.
- [Per04] PEREZ, ALEJANDRO: *Introduction to loop quantum gravity and spin foams*. 2004.
- [Rov] ROVELLI, CARLO: *Quantum gravity*. Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004) 455 p.
- [Rov96] ROVELLI, C.: *Black Hole Entropy from Loop Quantum Gravity*. Physical Review Letters, 77:3288–3291, Oktober 1996.
- [Rov97] ROVELLI, CARLO: *Strings, loops and others: A critical survey of the present approaches to quantum gravity*. 1997.
- [Rov00] ROVELLI, CARLO: *Notes for a brief history of quantum gravity*. 2000.
- [Rud03] RUDOLPH, GERD: *Vorlesungen zur Mathematischen Physik Teil 1: Mannigfaltigkeiten, Tensorfelder und Hamiltonsche Systeme*. 2003. Vorlesungsskript.
- [Rud04] RUDOLPH, GERD: *Vorlesungen zur Mathematischen Physik Teil 2: Faserbündel, Zusammenhänge und Eichtheorie*. 2004. Vorlesungsskript.
- [Sch01] SCHWARZ, JOHN H.: *String Theory*. Current Science, 81, 2001.
- [Sen81] SEN, A.: *On the existence of neutrino "zero-modes" in vacuum spacetimes*. Journal of Mathematical Physics, 22:1781–1786, August 1981.
- [Sen82a] SEN, A.: *Gravity as a spin system*. Physics Letters B, 119:89–91, Dezember 1982.
- [Sen82b] SEN, A.: *Quantum Theory of Spin-3/2 Field in Einstein Spaces*. International Journal of Theoretical Physics, 21:1–+, Januar 1982.
- [Smo03] SMOLIN, LEE: *How far are we from the quantum theory of gravity?* 2003.
- [Ste88] STEPHANI, HANS: *Allgemeine Relativitätstheorie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 3 Auflage, 1988.
- [SV96] STROMINGER, ANDREW und CUMRUN VAFA: *Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy*. Phys. Lett., B379:99–104, 1996.
- [Sve99] SVETLICHNY, GEORGE: *Preparation for Gauge Theory*, 1999.
- [Thi01] THIEMANN, THOMAS: *Introduction to modern canonical quantum general relativity*. 2001.
- [Wit81] WITTEN, EDWARD: *A simple proof of the positive energy theorem*. Commun. Math. Phys., 80:381, 1981.
- [Woo] WOODHOUSE, N. M. J.: *Geometric quantization*. New York, USA: Clarendon (1992) 307 p. (Oxford mathematical monographs).

Index

- ADM-Zerlegung, 28–31
 - über das Vierbein, 29
- Ashtekarvariablen
 - gewichtetes Dreibein, 39
 - Schema zur Berechnung, 50
 - Zusammenhangsvariable, 42
 - Zusammenhangsvariablen
 - Darstellung über Poissonklammer, 46
 - Verschwinden der Poissonklammer zw. den, 47
- assoziertes Bündel, 19
- Barbero-Immirzi-Parameter, 7, 43
- Basisdarstellung, Zusammenhang, 15
- Bekenstein-Hawking-Entropie, 6
- Cartansche Strukturformel, 18
- Christoffelsymbole, 16
- Constraint
 - Diffeomorphismen, 37, 39, 40
 - Gauß, 37
 - Hamilton, 37, 39, 40
- Cramersche Regel, 22
- Einsteinsche Feldgleichungen, 18
- Evolutionsgleichungen, 28
- Faserbündel, 9
- gewichteter Skalar, 20
- Hauptfaserbündel, 19
- Hawking-Strahlung, 6
- Jet, 23
- Jetbündel, 24
- Kerr-Metrik, 55
- Krümmung, extrinsische, 38
- Lagrangedichte, 24
- Laplacescher Entwicklungssatz, 21
- Levi-Civita-Zusammenhang, 15
- linearisierte Theorie, 63
 - Zwangsbedingungen, 66
- Lorentz-Zusammenhang, 14
- Metrik
 - eingeschränkte, 28
 - interne, 10
- metrische Äquivalenz, 11
- musikalischen Operatoren, 11
- Planck-Länge, 5
- Poissonklammern, 40
- Repèrebündel, 20
- Robertson-Walker-Metrik, 61
- Schwarzschildmetrik, 52
- Transformation
 - kanonische, 40
 - Legendre, 35
- Trivialisierung, 10
- Vektorbündel, 10
 - Tensorprodukt, 12
- Vierbeinformalismus, 9
- Wheeler-DeWitt Gleichung, 6
- Wirkungsprinzip, 23
- Zusammenhang, 13
 - induzierter, 20

Danksagung

In erster Linie möchte ich hier Herrn Dr. Christian Fleischhack für die engagierte Betreuung meiner Diplomarbeit danken. Er fand selbst an Wochenenden und Feiertagen Zeit, um sich meinen Fragen und Problemen mit großer Geduld zu stellen. Aus den Gesprächen mit ihm habe ich viele Anregungen und Ideen erhalten, die ich in die Diplomarbeit aufgenommen habe.

Herrn Prof. Dr. Gerd Rudolph danke ich für die Vermittlung des Diplomthemas und für die Gelegenheit, im Rahmen des Gruppenseminars der Abteilung Quantenfeldtheorie und Gravitation, Vorträge über die Geometrie der Ashtekarvariablen halten zu dürfen.

Nadine Große danke ich für die Unterstützung, die ich von ihr bei der Vorbereitung dieser Vorträge erhalten habe, sowie für die Durchsicht der Diplomarbeit auf orthographische und grammatikalische Fehler. Dieser Dank gebührt auch Alexander Hertsch. Herrn Dr. Matthias Schmidt möchte ich für die Überprüfung des Kapitels zu den induzierten Zusammenhängen danken.

Zuletzt danke ich meiner Familie für die finanzielle und moralische Unterstützung, die ich während meiner Arbeit erhalten habe.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Diese Arbeit wurde in dieser oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Ort

Datum

Unterschrift

Erklärung

Hiermit erkläre ich mich einverstanden, daß die vorliegende Arbeit nach positiver Begutachtung zur Nutzung in der Zweigstelle Physik der Universitätsbibliothek Leipzig zur Verfügung gestellt wird.

Ort

Datum

Unterschrift